Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 8

27. (*Levi-Civita-Ableitung*) Es sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass durch die Identität

$$\begin{aligned} 2\langle\nabla_X Y, Z\rangle \;=\; & + X\langle Y,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle + Y\langle Z,X\rangle \\ & + \langle[X,Y],Z\rangle + \langle[Z,X],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle \end{aligned}$$

eine metrische und torsionsfreie kovariante Ableitung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ auf M definiert wird.

28. (*Isometrie-Invarianz von ∇ und R*) Es seien (M,g) und $(N,\tilde g)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Levi-Civita-Ableitungen ∇ und $\tilde\nabla$ und $f : (M,g) \to (N,\tilde g)$ eine lokale Isometrie. Ferner seien X, Y, Z Vektorfelder auf M, die f-verwandt zu Vektorfeldern $\tilde X, \tilde Y, \tilde Z$ auf N sind. Zeigen Sie:

    (a) $\nabla_X Y$ ist f-verwandt zu $\tilde\nabla_{\tilde X}\tilde Y$ (Hinweis: Koszul-Formel).

    (b) Bezeichnen R und $\tilde R$ die Krümmungstensoren bezüglich der kovarianten Ableitungen ∇ und $\tilde\nabla$, so ist $R_{X,Y}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ f-verwandt zu $\tilde R_{\tilde X,\tilde Y}\tilde Z$.

29. (*Torsionsfreie kovariante Ableitungen*) Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) bezeichne ∇ die Levi-Civita-Ableitung. Zeigen Sie, dass die Menge aller torsionsfreier kovarianter Ableitungen auf M gegeben ist durch

$$\{\tilde\nabla = \nabla - T : T \text{ symmetrischer (2,1)-Tensor}\}\,.$$

30. (*Gradientenvektorfelder und Hessische*) Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Zeigen Sie, dass ein differenzierbares Vektorfeld ∇f auf M existiert, so dass für alle differenzierbaren Vektorfelder X auf M die Identität

$$g(\nabla f, X) = L_X f$$

gilt und geben Sie eine Formel für den Gradienten ∇f von f bezüglich der Metrik g in lokalen Koordinaten an. Zeigen Sie ferner, dass der Gradient senkrecht auf Niveauflächen steht und dass die Hesseform

$$\mathrm{Hess}(f)(X,Y) := g(\nabla_X(\nabla f), Y)$$

von f eine symmetrische Bilinearform ist.

31. (*Konforme Variationen*) Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $f(p) > 0$ für alle $p \in M$. Sei $\tilde g = f \cdot g$ konforme Variation von g. Zeigen Sie: Für die Levi-Civita-Ableitungen ∇ und $\tilde\nabla$ von g beziehungsweise $\tilde g$ gilt

$$\tilde\nabla_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2f}\cdot\big(\,(Xf)\cdot Y + (Yf)\cdot X - g(X,Y)\cdot\nabla f\,\big)\,.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 8.12.2004, 11:15.