PD Dr. C. Böhm WS 2004/2005

Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 7

24. (*Oberes Halbebenenmodel der Hyperbolischen Ebene*) Es bezeichne $\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{C} : y > 0\}$ die obere Halbebene der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$. Die Identität

$$g_{(x,y)}(v, w) := \frac{1}{y^2} \cdot \langle v, w \rangle_0$$

definiert die sogenannte *hyperbolische Metrik* g auf $\mathbb{H}$; die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathbb{H}, g)$ nennt man die *hyperbolische Ebene.* Zeigen Sie:

(a) Für $A = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ ist die Abbildung

$$h_A : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \ ; \ \ z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{H}$ in sich (ein „Automorphismus“).

(b) Die Diffeomorphismen $h_A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $A \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ sind Isometrien der hyperbolischen Ebene.

(c) Die Abbildung $\rho : (\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R}) \, , \cdot) \to (\mathrm{Aut}(\mathbb{H}), \circ) \, ; \ A \mapsto h_A$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(d) Die Gruppe $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$.

(e) Für α, $\beta > 0$ ist die Kurve $c : [0, 1] \to \mathbb{H}; \ t \mapsto t\beta i + (1 - t)\alpha i$ kürzeste Kurve zwischen den Punkten αi und βi. Können Sie auch Kürzeste zwischen zwei beliebigen Punkten in der hyperbolischen Ebene angeben?

25. (*Positiv definite Matrizen*) Es bezeichne S die Menge der positiv definiten, symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen und $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ der Vektorraum der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen. Zeigen Sie:

(a) S ist eine offene Teilmenge von $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$.

(b) Die Identität

$$g_P(V, W) := \mathrm{Spur}\,(V P^{-1} W P^{-1}), \quad P \in S, \quad V, W \in T_P S = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$$

definiert eine Riemannsche Metrik g auf S.

(c) Die Gruppenaktion $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \times S \to S \, , (G, P) \mapsto GPG^t$ ist isometrisch und transitiv.

26. Sei $\tilde{g}$ die von $g^{S^n} := \langle \cdot \, , \cdot \rangle_0 |_{TS^n \times TS^n}$ induzierte Metrik auf $\mathbb{R}P^n = S^n / \{\pm id\}$. Der Vektorraum $\mathrm{Mat}(n + 1, \mathbb{R})$ sei versehen mit dem Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := 1/2 \cdot \mathrm{Spur}(A \cdot B^T)$. Zeigen Sie, dass die Veroneseeinbettung

$$(\mathbb{R}P^n, \tilde{g}) \to V_n \subset (\mathrm{Mat}(n + 1, \mathbb{R}), \langle \cdot \, , \cdot \rangle) \, , \quad [p] \mapsto p \cdot p^T$$

eine Isometrie ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 1.12.2004, 11:15.