PD Dr. C. Böhm WS 2004/2005

Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 6

20. Sei M differenzierbare Mannigfaltigkeit. Berechnen Sie die Lieklammer zweier Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ in lokalen Koordinaten.

21. (*f-verwandte Vektorfelder*) Es sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie: Sind die Vektorfelder X und Y f-verwandt zu Vektorfeldern $\hat{X}$ bzw. $\hat{Y}$, so ist auch die Lieklammer $[X, Y]$ von X und Y f-verwandt zur Lieklammer $[\hat{X}, \hat{Y}]$ von $\hat{X}$ und $\hat{Y}$.

22. Sei M differenzierbare Mannigfaltigkeit und X, Y differenzierbare Vektorfelder. Zeigen Sie: Es gilt $[X, Y] = 0$ genau dann, wenn die lokalen Flüsse von X und Y kommutieren.

23. (*Liealgebra von* $\mathrm{SO}(n)$) Es sei $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ die spezielle orthogonale Gruppe. Den Vektorraum

$$\mathfrak{so}(n) := T_I \mathrm{SO}(n) = \{V \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) : V = -V^t\}$$

versehen wir mit der Bilinearform

$$[\ ,\ ]_0 : \mathfrak{so}(n) \times \mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{so}(n)\ ;\ \ [V, W]_0 = VW - WV\,.$$

Ferner sei $V \in \mathfrak{so}(n)$ und $X_V(A) = A \cdot V$ differenzierbares Vektorfeld auf $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) $(\mathfrak{so}(n), [\ ,\ ]_0)$ ist eine Liealgebra.

(b) Für $V, W \in \mathfrak{so}(n)$ gilt:
$$[X_V, X_W](I) = [V, W]_0\,.$$

(c) Für die tangentialen Vektorfelder $\bar{X}_V := X_V|_{SO(n)}$ längs $\mathrm{SO}(n)$ gilt:
$$[\bar{X}_V, \bar{X}_W] = \bar{X}_{[V,W]_0}\,.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 24.11.2004, 11:15.