PD Dr. C. Böhm WS 2004/2005

Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 5

16. (*Tangentiale Vektorfelder längs Untermannigfaltigkeiten*) Sei M^n eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$. Dann nennt man ein differenzierbares Vektorfeld $X : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ *tangential längs* M^n, falls $X(p) \in T_pM^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ für alle $p \in M^n$ gilt. Zeigen Sie:

    (a) Ist X tangentiales Vektorfeld längs M^n und $c : I \to \mathbb{R}^{n+k}$ Integralkurve von X mit $c(0) \in M^n$, dann existiert $\epsilon > 0$ mit $c(t) \in M^n$ für $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

    (b) Die Einschränkung von X auf M^n definiert ein differenzierbares Vektorfeld $\bar{X}$ auf der Mannigfaltigkeit $(M^n, \mathfrak{a}^{n+k}_{M^n})$, gegeben durch $\bar{X}(p) = [c]$, c Integralkurve von X mit $c(0) = p$.

17. Sei $Y \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ eine schiefsymmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $X_Y : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})\,;\ V \mapsto Y \cdot V$ tangential längs $SO(n)$ ist, und bestimmen Sie die Integralkurven von $X_Y|_{SO(n)}$.

18. (*Umkehrsatz auf Mannigfaltigkeiten*) Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Zeigen Sie: Ist für ein $p \in M$ das Differential $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein Vektorraum-Isomorphismus, so ist f ein Diffeomorphismus nahe p.

19. Sei M eine n-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit, G eine Gruppe von Diffeomorphismen von M, welche frei und eigentlich diskontinuierlich operiert, und M/G der Bahnenraum. Ferner bezeichne $\pi : M \to M/G\,;\ p \mapsto [p]$ die Projektionsabbildung. Ein differenzierbares Vektorfeld X auf M nennt man G-invariant, falls $dg_p(X(p)) = X(g.p)$ für alle $g \in G$ und alle $p \in M$ gilt. Zeigen Sie:

    (a) Ist X ein differenzierbares, G-invariantes Vektorfeld auf M, so ist das Vektorfeld $\bar{X} : M/G \to TM/G\,;\ [p] \mapsto d\pi_p(X(p))$ wohldefiniert und differenzierbar.

    (b) Ist X differenzierbares G-invariantes Vektorfeld auf M und c Integralkurve von X, so ist $\pi \circ c$ Integralkurve von $\bar{X}$.

    (c) Sei $v \in \mathbb{R}^2$ und $X_v(x) := v$ das entsprechende konstante Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie für $M = \mathbb{R}^2$ und $G = \mathbb{Z}^2$, Gruppe der ganzzahligen Translationen des $\mathbb{R}^2$, die Integralkurven des Vektorfeldes $\bar{X}_v([x]) = d\pi_x X_v(x)$ und untersuchen Sie, für welche $v \in \mathbb{R}^2$ diese Kurven periodisch sind.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 17.11.2004, 11:15.