Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 4

12. (*Der n-dimensionale Torus*) Es bezeichne $\mathbb{Z}^n$ die Gruppe der ganzzahligen Translationen des $\mathbb{R}^n$, d. h. die Menge aller $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto x + z$ für $z \in \mathbb{Z}^n$. Zeigen Sie, dass der Bahnenraum $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Können Sie auch zeigen, dass T^n Liegruppe ist?

13. (*Linsenräume*) Wir fassen die Sphäre S^{2k-1} als Menge aller $(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k \cong \mathbb{R}^{2k}$ mit $\sum_{i=1}^k |z_i|^2 = 1$ auf. Zeigen Sie: Sind $p \geq 2$ und $1 \leq q_1, \ldots, q_k < p$ ganze Zahlen, so dass q_i und p teilerfremd sind, $1 \leq i \leq k$, so operiert die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln $E_p := \{z \in \mathbb{C} : z^p = 1\} \subset \mathbb{C}$ frei und eigentlich diskontinuierlich auf S^{2k-1} durch
$$z.(z_1, \ldots, z_k) = (z^{q_1} z_1, \ldots, z^{q_k} z_k)\,.$$
Der Bahnenraum $L(p, q_1, \ldots, q_k) = S^{2k-1}/E_p$ wird *Linsenraum* vom Typ $(p; q_1, \ldots, q_k)$ genannt.

14. Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$, $p \in M$ und $f : V \subset \mathbb{R}^n \to U \subset M$ eine Einbettung mit $f(v) = p$. Wir bezeichnen mit
$$T_pM := \operatorname{Bild} Df_v$$
den Tangentialraum von M in p. Zeigen Sie:
    (a) Der Tangentialraum T_pM ist ein n-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n+k}$ und es gilt $T_pM = \operatorname{Bild} D\tilde{f}_{\tilde{v}}$ für jede Einbettung $\tilde{f} : \tilde{V} \to \tilde{U} \subset M$ mit $\tilde{f}(\tilde{v}) = p$.
    (b) Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine differenzierbare Kurve mit $c(0) = p$ und $\operatorname{Bild}(c) \subset M$. Dann gilt $c'(0) \in T_pM$ und jedes $w \in T_pM$ ist von dieser Form.

15. (*Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit*) Für eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^{n+k}$ bezeichne
$$TM := \{(p, w) \in \mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k} \mid p \in M,\ w \in T_pM\}$$
das *Tangentialbündel* von M und $\pi : TM \to M$; $(p, w) \mapsto p$ die kanonische Projektion auf M. Zeigen Sie, dass TM eine $2n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k}$ ist (Hinweis: Konstruieren Sie aus gegebener Parametrisierung $f : V \to U \subset M$ eine Parametrisierung $\hat{f} : V \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U) \subset TM$).

Abgabe: Bis Mittwoch, den 10.11.2004, 11:15.