PD Dr. C. Böhm WS 2004/2005

Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 3

8. (*Der Satz vom regulären Urbild*) Sei $g : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung und $y = g(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^{m+k}$. Zeigen Sie: Die Menge
$$M^k := g^{-1}(y)$$
ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+k}$, falls für alle $x \in M^k$ gilt: $\mathrm{Rang}(Dg_x) = m$ (Hinweis: Impliziter Funktionensatz).

9. Es bezeichne $O(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n\}$ die orthogonale Gruppe des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $O(n)$ eine $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist.

10. Sei M eine n-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe von Diffeomorphismen von M. Zeigen Sie: Operiert G frei und eigentlich diskontinuierlich auf M, so ist der Bahnenraum M/G ein differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

11. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Auf M operiere eine Gruppe G von Diffeomorphismen frei und eigentlich diskontinuierlich. Es bezeichne M/G den Bahnenraum und $\pi : M \to M/G$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

    (a) Ist $f : M \to N$ differenzierbar und *G-invariant* (d. h. für alle $\gamma \in G$ und $p \in M$ gilt $f(\gamma.p) = f(p)$), dann gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\bar{f} : M/G \to N$ mit $f = \bar{f} \circ \pi$.

    (b) Ist f Immersion [bzw. lokaler Diffeomorphismus], so auch $\bar{f}$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 3.11.2004, 11:15.