PD Dr. C. Böhm WS 2004/2005

Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 11

41. Zeigen Sie, dass homogene Räume geodätisch vollständig sind.

42. Zeigen Sie, dass symmetrische Räume homogen sind.

43. (*Weihnachtsaufgabe*) Seien (M, g) und (N, g') vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension mit induzierten Abstandsfunktionen d_g bzw. $d_{g'}$. Zeigen Sie: Ist $f : (M, d_g) \to (N, d_{g'})$ eine Isometrie zwischen metrischen Räumen, d.h. gilt $d_{g'}(f(p), f(q)) = d_g(p, q)$ für alle $p, q \in M$, so ist $f : (M, g) \to (N, g')$ Isometrie zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Gehen Sie dabei in folgender Weise vor:

    (a) Sei $p \in M$, $q = f(p) \in N$ und $v \in T_pM$. Dann existiert genau ein Tangentialvektor $L(v) \in T_qN$ mit $f(\exp_p(tv)) = \exp_q(tL(v))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

    (b) Die Abbildung $L : (T_pM, g_p) \to (T_qN, g'_q)$ ist abstandserhaltend, d.h. es gilt $\|v\|_p = \|L(v)\|'_q$ für alle $v \in T_pM$.

    (c) Die Abbildung $L : (T_pM, g_p) \to (T_qN, g'_q)$ ist eine lineare Isometrie.

    (d) Die Abbildung f ist differenzierbar und es gilt $df_p = L$.

    (e) Die Abbildung f ist ein Diffeomorphismus.

44. Betrachten sie die Isometrien $h_{A_1}(z) = z + 1$ und $h_{A_2}(z) = 2z$ der hyperbolischen Ebene $(\mathbb{H}, g^{\mathbb{H}})$, sowie die hiervon erzeugten Gruppen $\Gamma_1 = \langle h_{A_1} \rangle$ und $\Gamma_2 = \langle h_{A_2} \rangle$. Wir bezeichnen mit $M_1 = \mathbb{H}/\Gamma_1$ und $M_2 = \mathbb{H}/\Gamma_2$ die entsprechenden Bahnenräume, versehen mit der von $g^{\mathbb{H}}$ induzierten Riemannschen Metrik g_1 bzw. g_2. Zeigen Sie:

    (a) Die Bahnenräume M_1 und M_2 sind diffeomorph.

    (b) Die Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M_1, g_1) und (M_2, g_2) sind nicht isometrisch.

45. (*Kovariante Ableitung von Tensoren*) Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, T ein (r, i)-Tensor, $i \in \{0, 1\}$, $r \in \mathbb{N}$ und ∇ ein Zusammenhang auf M.

    (a) Zeigen Sie, dass durch die Identität

    $$(\nabla T)(X, X_1, \ldots, X_r) := \\ = \nabla_X(T(X_1, \ldots, X_r)) - \sum_{i=1}^{r} T(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_r)$$

    ein $(r + 1, i)$-Tensor ∇T auf M definiert wird.

    (b) Ist (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, so gilt: Ein Zusammenhang ∇ auf M ist genau dann metrisch, falls $\nabla g = 0$ gilt.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 12.1.2005, 11:15.