PD Dr. C. Böhm WS 2004/2005

Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 1

1. (*Produktmannigfaltigkeiten*) Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $M \times N$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist (Hinweis: Hierbei verwende man die *Produkttopologie* auf $M \times N$: Offen sind die leere Menge, Produkte offener Teilmengen von M und N sowie beliebige Vereinigungen solcher Produkte).

2. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)\cdot(x-y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

(versehen mit der Spurtopologie) keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

3. Es bezeichne $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ die Sphäre im $\mathbb{R}^3$ und $N = (0,0,1)^t$, $S = (0,0,-1)^t$ den Nord- bzw. den Südpol auf der S^2. Zeigen Sie, dass die Karten

$$x_N : S^2\backslash\{N\} \to \mathbb{R}^2 \ ; \ (x,y,z)^t \ \mapsto \ \frac{1}{1-z}(x,y)^t$$
$$x_S : S^2\backslash\{S\} \to \mathbb{R}^2 \ ; \ (x,y,z)^t \ \mapsto \ \frac{1}{1+z}(x,-y)^t$$

einen Atlas von S^2 definieren, dessen Kartenwechsel biholomorph sind.
(S^2 ist mit diesem Atlas „*komplexe Mannigfaltigkeit*“ der komplexen Dimension 1 oder auch „*komplexe Kurve*“).

4. Für die ein-dimensionale Mannigfaltigkeit $M^1 = \mathbb{R}$ betrachte man die aus je einer Karte bestehenden Atlanten $\mathfrak{a}_1 = (\mathbb{R}, x_1)$ und $\mathfrak{a}_2 = (\mathbb{R}, x_2)$ mit $x_1(y) = y$ und $x_2(y) = y^3$. Zeigen Sie:

   (a) Die entsprechenden maximalen C^∞-Atlanten $\hat{\mathfrak{a}}^1$ und $\hat{\mathfrak{a}}_2$ sind verschieden.

   (b) Die C^∞-Mannigfaltigkeiten $(\mathbb{R}, \hat{\mathfrak{a}}^1)$ und $(\mathbb{R}, \hat{\mathfrak{a}}_2)$ sind diffeomorph, d.h. es existiert eine bijektive Abbildung $f : (\mathbb{R}, \hat{\mathfrak{a}}^1) \to (\mathbb{R}, \hat{\mathfrak{a}}_2)$, so dass f und f^{-1} differenzierbar sind.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19.10.2004 bis 11:15 im Briefkasten 85.