Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Sommersemester 09
WWU Münster

Übungen zu Differentialformen und Mannigfaltigkeiten

Serie 11

Aufgabe 1. Berechnen Sie $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{x_1\})$ für eine Punkt $x_1 \in \mathbb{R}^2$. Können Sie auch $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{x_1, ..., x_p\})$ berechnen für p paarweise verschieden Punkte $x_1, ..., x_p \in \mathbb{R}^2$?

Aufgabe 2. (*Zusatzaufgabe, 4 Punkte extra*) Sei $\omega \in \Omega_k^n(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: Genau dann existiert eine Form $\eta \in \Omega_k^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $d\eta = \omega$, wenn $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$.

Aufgabe 3. Sei M^n eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

a) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M^n und sind $p, q \in M^n$, so gibt es endlich viele Indizes $i_1, ..., i_k \in I$, so dass

  (i) $p \in U_{i_1}, q \in U_{i_k}$,

  (ii) $U_{i_l} \cap U_{i_{l+1}} \neq \emptyset$ für $l = 1, ..., k-1$.

b) Sei $\omega \in \Omega_k^n(M^n)$ und sei $W \subset M^n$ offen und nichtleer. Dann existiert $\eta \in \Omega_k^{n-1}(M^n)$, so dass $\operatorname{supp}(d\eta - \omega) \subset W$.
Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4. Sei M^n eine differenzierbare, kompakte, zusammenhängende und orientierbare Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Die lineare Abbildung

$$\Omega^n(M^n) \to \mathbb{R}\,;\, \omega \mapsto \int_{M^n} \omega$$

induziert einen Isomorphismus $H^n(M^n) \to \mathbb{R}$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 13.7.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.