Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Sommersemester 09
WWU Münster

Übungen zu Differentialformen und Mannigfaltigkeiten

Serie 10

Aufgabe 1. Sei M^n differenzierbare Mannigfaltigkeit und K eine kompakte Teilmenge von M^n. Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $f : M^n \to \mathbb{R}$ existiert mit $f|_K \equiv 1$ und kompaktem Träger.

Aufgabe 2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $\omega \in \Omega^{n-1}(U \backslash \{x\})$ mit $d\omega = 0$ gegeben. Seien $A, B \subset U$ Kompakta mit glattem Rand und $x \in \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$. Zeigen Sie:

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{\partial B} \omega$$

Aufgabe 3. (*Die Cauchysche Integralformel*) Sei U eine offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ vermittels $(u, v) \mapsto u + iv$, so können wir f als Abbildung von $U \subset \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ auffassen vermittels $f(z) = f_1(z) + i \cdot f_2(z)$. Wir setzen $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \cdot (\frac{\partial}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y})$ und $dz := dx + i \cdot dy$. Die Funktion f heißt holomorph, falls für alle $z \in U$ gilt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion f ist holomorph genau dann, wenn für alle $u \in U$ das Differential Df_u mit jeder schiefsymmetrischen (2×2)-Matrix kommutiert.

b) Die Funktion f ist holomorph genau dann, wenn $f \cdot dz$ geschlossen ist.

c) Ist f holomorph, so ist für $a \in U$ $\frac{f(z)}{z-a} \cdot dz$ eine geschlossene Differentialform auf $U \backslash \{a\}$.

d) Sei $K \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann gilt für alle $a \in \mathrm{int}K$:

$$f(a) = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - a} \cdot dz$$

Hinweis: Nach Aufgabe 2 kann man $K = \overline{B_\epsilon(a)}$ annehmen.

Aufgabe 4. In $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ betrachten wir die $(n-1)$-Form

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot \frac{x_i}{\|x\|^n} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \,.$$

Zeigen Sie, dass ω geschlossen, aber nicht exakt ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 5.7.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.