Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Sommersemester 09
WWU Münster

Übungen zu Differentialformen und Mannigfaltigkeiten

Serie 9

Aufgabe 1. Sei M^n eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für $k, l \leq n$ seien $\omega \in \Omega^k(M^n)$ und $\tau \in \Omega^l(M^n)$ gegeben. Zeigen Sie:

(i) Die Form $\omega \wedge \tau$ ist differenzierbar.

(ii) $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \cdot \tau \wedge \omega$

(iii) $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k \cdot \omega \wedge d\tau$

Aufgabe 2. Seien X, Y und Z differenzierbare Mannigfaltigkeiten, seien $\phi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ differenzierbare Abbildungen und sei $\omega \in \Omega^k(Z)$ eine Differentialform. Zeigen Sie:

(i) $\psi^*\omega$ ist eine Differentialform auf Y.

(ii) Es gilt $(\psi \circ \phi)^*\omega = \phi^*(\psi^*\omega)$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n existiert eine Riemannsche Metrik g.

Aufgabe 4. Sei M^n differenzierbare Mannigfaltigkeit und $g = (g_p)_{p \in M^n}$ eine Familie von Skalarprodukten g_p auf T_pM^n. Zeigen Sie: Sind für jede Karte (U, x) von M^n die Koeffizientenfunktionen

$$g^x_{ij} : U \to \mathbb{R} \; ; \; p \mapsto g_p\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\big)$$

der ersten Fundamentalform differenzierbar, $1 \leq i, j \leq n$, so ist g eine Riemannsche Metrik auf M^n.

Aufgabe 5. Sei (M^n, g) orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, vol_{M^n} die Volumenform auf M^n und (U, x) orientierungserhaltende Karte von M^n. Dann gilt

$$(x^{-1})^*(\mathrm{vol}_{M^n}) = \sqrt{\det(g^x_{ij})} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \, .$$

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 29.6.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.