Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Sommersemester 09
WWU Münster

Übungen zu Differentialformen und Mannigfaltigkeiten
Serie 7

Aufgabe 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge. Zeigen Sie: Es existieren Isomorphismen $A : \Omega^1(U) \to \mathfrak{X}(U)$, $B : \Omega^2(U) \to \mathfrak{X}(U)$ und $C : \Omega^3(U) \to C^\infty(U)$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} C^\infty(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "id"'] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "A"'] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "B"'] & \Omega^3(U) \arrow[d, "C"'] \\ C^\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{grad}"'] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{rot}"'] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{div}"'] & C^\infty(U) \end{tikzcd}$$

Aufgabe 2. Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$ gegeben durch

$$\omega(x,y) := \frac{-y}{x^2+y^2} \cdot dx + \frac{x}{x^2+y^2} \cdot dy$$

Zeigen Sie: Es gilt $d\omega = 0$, jedoch gibt es kein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$ mit $df = \omega$.

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, die *sternförmig* sei, das heißt, es existiert ein $x_0 \in U$, so dass für alle $x \in U$ und $t \in [0,1]$ gilt: $((1-t) \cdot x_0 + t \cdot x) \in U$. Sei $\omega \in \Omega^1(U)$ mit $d\omega = 0$ gegeben. Zeigen Sie: Es existiert ein $f \in C^\infty(U)$ mit $df = \omega$.

Aufgabe 4. Sei $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ gegeben durch

$$\omega(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (z \cdot dx \wedge dy - y \cdot dx \wedge dz + x \cdot dy \wedge dz)$$

Zeigen Sie: Es gilt $d\omega = 0$, jedoch existiert kein $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ mit $d\alpha = \omega$.
Hinweis: Widerspruchsbeweis; Betrachten Sie dazu die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,;\, (\phi, \psi) \mapsto (cos(\phi) \cdot sin(\psi), sin(\phi) \cdot sin(\psi), -cos(\psi)).$$

Schreiben Sie $F^*\omega(\phi,\psi) = f(\phi,\psi)\, d\phi \wedge d\psi$ und integrieren Sie f über $[0,2\pi] \times [0,\pi]$. Sie dürfen (ohne Beweis) die Identität $d(F^*w) = F^*(dw)$ verwenden.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 15.6.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.