Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Sommersemester 09
WWU Münster

Übungen zu Differentialformen und Mannigfaltigkeiten

Serie 6

Aufgabe 1.

a) Sei M^k differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $\hat{X}$ differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$, so dass $\hat{X}(p) \in T_pM^k$ für alle $p \in M^k$ gilt. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$X : M^k \to TM^k\,;\, p \mapsto \hat{X}(p)$$

ist ein differenzierbares Vektorfeld auf M^k.

b) Die Untermannigfaltigkeit $SO(n) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ ist parallelisierbar.

Anleitung: Betrachten Sie für ein $B \in T_I SO(n)$ die Abbildung

$$\hat{X} : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})\,;\, A \mapsto A \cdot B$$

Aufgabe 2. (*Das Möbius-Band*) Es sei

$$M^2 := \{(e^{2\pi i \cdot t}, s \cdot e^{\pi i \cdot t}) : s, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^4$$

und $\mu : M^2 \to S^1\,;\, (w, z) \mapsto w$. Zeigen Sie: (M^2, S^1, μ) ist ein nicht-triviales Vektorraumbündel über S^1.

Aufgabe 3. Es seien (E_1, B, π_1) und (E_2, B, π_2) Vektorraumbündel über einer Mannigfaltigkeit B. Für $p \in B$ bezeichne $Hom((E_1)_p, (E_2)_p)$ den Raum der Homomorphismen von $(E_1)_p$ nach $(E_2)_p$. Ferner bezeichne

$$Hom(E_1, E_2) := \bigcup_{p \in B} Hom((E_1)_p, (E_2)_p)$$

und

$$\pi : Hom(E_1, E_2) \to M\,;\, \phi_p \in Hom((E_1)_p, (E_2)_p) \mapsto p\,.$$

Versehen Sie die Menge $Hom(E_1, E_2)$ mit einer Topologie und einer differenzierbaren Struktur, so dass $(Hom(E_1, E_2), B, \pi)$ ein Vektorraumbündel ist.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $p \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p-\text{mal}} \to \mathbb{R}$$

heißt *p-Multilinearform* auf V, wenn für $i \in \{1, ..., p\}$, $v_1, ..., v_i, v_i', ..., v_p \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\omega(v_1, ..., \lambda \cdot v_i + \mu \cdot v_i', ..., v_p) = \lambda \cdot \omega(v_1, .., v_i, ..., v_p) + \mu \cdot \omega(v_1, ..., v_i', ..., v_p)$$

Eine p-Multilinearform ω heißt *symmetrisch*, wenn für $i, j \in \{1, ..., p\}$ mit $i < j$, sowie $v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_p \in V$ gilt:

$$\omega(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_p) = \omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_p)$$

Es bezeichnen nun $(Sym^p(V))$ $Mult^p(V)$ den Vektorraum der (symmetrischen) p-Multilinearformen auf V. Berechnen Sie die Dimension dieser Vektorräume.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 8.6.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.