Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Sommersemester 09
WWU Münster

Übungen zu Differentialformen und Mannigfaltigkeiten

Serie 4

Aufgabe 1. Sei M^n eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M^n$. Zeigen Sie, dass der Tangentialraum T_pM^n von M^n im Punkt p die Struktur eines reellen Vektorraumes besitzt, so dass für jede Karte (U, x) von M^n um p die Abbildung

$$\Theta^{-1}_{(x,p)} : T_pM \to \mathbb{R}^n \,;\, [c] \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (x \circ c)(t)$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Auf M operiere eine Gruppe G von Diffeomorphismen frei und eigentlich diskontinuierlich. Es bezeichne M/G den Bahnenraum und $\pi : M \to M/G$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

1. Ist $f : M \to N$ differenzierbar und G-*invariant* (d. h. für alle $\gamma \in G$ und $p \in M$ gilt $f(\gamma.p) = f(p)$), dann gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\bar{f} : M/G \to N$ mit $f = \bar{f} \circ \pi$.

2. Ist f Immersion [bzw. lokaler Diffeomorphismus], so auch $\bar{f}$.

Aufgabe 3. Sei (e_1, e_2, e_3, e_4) die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ (bezüglich des Standardskalarprodukts). Wir setzen $1 := e_1, i := e_2, j := e_3, k = e_4$ und definieren folgende (nicht-kommutative) Multiplikation auf $\mathbb{R}^4$:

$$1 \cdot e_m = e_m \cdot 1 \quad \text{für } m = 1, ..., 4$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = k = -ji\,,\; ki = j = -ik\,,\; jk = i = -kj$$

und

$$\Big(\sum_{n=1}^{4} \alpha_n \cdot e_n\Big) \cdot \Big(\sum_{m=1}^{4} \beta_m \cdot e_m\Big) = \sum_{n,m=1}^{4} (\alpha_n \cdot \beta_m) \cdot (e_n \cdot e_m)$$

mit $\alpha_n, \beta_m \in \mathbb{R}$. Wir erhalten so eine $\mathbb{R}$-lineare Multiplikation auf $\mathbb{R}^4$ und bezeichnen den so erhaltenen *Schiefkörper* mit $\mathbb{H}$. Zeigen Sie:

a) Ist $q = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot i + \gamma \cdot j + \delta \cdot k \in \mathbb{H} \backslash \{0\}$ und $\bar{q} := \alpha \cdot 1 - \beta \cdot i - \gamma \cdot j - \delta \cdot k$, so gilt

$$q^{-1} = \bar{q} \cdot \frac{1}{||q||^2}$$

b) Für $q \in S^3 = \{q \in \mathbb{H} : ||q|| = 1\}$ sind die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} L_q &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \,;\, v \mapsto q \cdot v \\ R_{q^{-1}} &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \,;\, v \mapsto v \cdot q^{-1} \end{aligned}$$

Isometrien von $\mathbb{R}^4$ (bezüglich des Standardskalarprodukts).

c) Wir bezeichnen nun mit

$$\mathbb{R}^3 := \text{ Im } \mathbb{H} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{i, j, k\} \subset \mathbb{H}$$

die rein imaginären Quaterionen. Für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\big(L_q \circ R_{q^{-1}}\big)(x) = q \cdot x \cdot q^{-1} \in \mathbb{R}^3$$

für alle $q \in S^3$. Dies induziert eine Abbildung

$$\rho : S^3 \to SO(3)$$

d) Die Abbildung ρ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker(\rho) = \{-1, 1\}$.

Hinweis: Für ein $q \in S^3$ schreiben Sie

$$q = cos(\phi) \cdot 1 + sin(\phi) \cdot x_q$$

für geeignete $x_q \in \mathbb{R}^3$ und $\phi \in \mathbb{R}$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 18.5.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.