Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Sommersemester 09
WWU Münster

Übungen zu Differentialformen und Mannigfaltigkeiten
Serie 3

Aufgabe 1. Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\, ;\ (x, y, z) \mapsto e^{-2z} \cdot z - x^2 - y^2.$$

Zeigen Sie: $M := f^{-1}(0)$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, die diffeomorph ist zu $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass N eine abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 3. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei der Gruppenhomomorphismus

$$\rho_\alpha : \mathbb{Z} \to \text{Homöo}(S^1)\, ;\ n \mapsto (x \mapsto e^{2\pi i\alpha\cdot n} \cdot x)$$

gegeben. Zeigen Sie:

a) Das Bild $im(\rho_\alpha)$ ist genau dann endlich, wenn $\alpha \in \mathbb{Q}$.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und sei $x \in S^1$. Dann ist die Bahn $\{\rho_\alpha(n)(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ dichte Teilmenge von S^1.

Aufgabe 4. Sei $S^{2k-1} := \{(z_1, ..., z_k) \in \mathbb{C}^{2k} : \sum_{i=1}^{k} |z_i|^2 = 1\}$ und $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$. Bezeichne $E_p := \{z \in \mathbb{C} : z^p = 1\}$ die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln. Seien $1 \leq q_1, ..., q_k < p$ ganze Zahlen, so dass q_i und p teilerfremd sind für $1 \leq i \leq k$. Zeigen Sie: Die Gruppe E_p operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf S^{2k-1} vermittels

$$\rho :\ E_p \to \text{Diffeo}(S^{2k-1})\, ;\ z \mapsto ((z_1, ..., z_k) \mapsto (z^{q_1} \cdot z_1, ..., z^{q_k} \cdot z_k))\, .$$

Der Bahnenraum $L(p, q_1, ..., q_k) := S^{2k-1}/E_p$ wird *Linsenraum* vom Typ $(p; q_1, ..., q_k)$ genannt.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 11.5.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.