Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Sommersemester 09
WWU Münster

Übungen zu Differentialformen und Mannigfaltigkeiten
Serie 1

Aufgabe 1. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

a) M ist genau dann zusammenhängend, wenn M wegzusammenhängend ist.

b) Die Wegzusammenhangskomponenten von M sind offen und abgeschlossen.

Aufgabe 2. (*Nicht-Hausdorffsche Mannigfaltigkeiten*) Sei $X := \mathbb{R} \cup \{x\}$ die disjunkte Vereinigung der reellen Geraden und einem Punkt $\{x\}$. Ferner bezeiche T_{std} die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B}(0) := \{(-\epsilon, \epsilon) \mid \epsilon > 0\} \subset T_{std}$ eine Umgebungsbasis von $0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Das Mengensystem

$$\mathcal{B} := T_{std} \cup \big\{ \{x\} \cup U \backslash \{0\} : U \in \mathcal{B}(0) \big\}$$

ist Basis einer Topologie T auf X.

b) Jeder Punkt $p \in X$ besitzt eine offene Umgebung $U \in T$, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $(\mathbb{R}, T_{std})$ ist.

c) (X, T) ist nicht Hausdorffsch.

Aufgabe 3. Für $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Jeder C^r-Atlas von M ist in genau einem maximalen C^r-Atlas enthalten.

Aufgabe 4. Für $Q := \{(x_1, x_2) : |x_1|, |x_2| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ bezeichne $M := \partial Q$ den Rand von Q, welcher mit der vom $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie T versehen sei. Zeigen Sie:

a) M besitzt einen C^∞-Atlas.

b) (M, T) ist eine C^∞-Mannigfaltigkeit.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 27.4.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.