Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

Sommersemester 2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis II
Serie 13

Aufgabe 1. Es seien $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Finden Sie eine partikuläre Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Hinweis: Variation der Konstanten

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems

$$ty'(t) - 2y(t) + t = 0 \ , \quad y(t_0) = y_0$$

für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie nun (in Abhängigkeit von y_0) diejenigen Lösungen, welche auf ganz $\mathbb{R}$ stetig fortsetzbar sind.

Aufgabe 3. Es bezeichne $C[a, b]$ den Raum der stetigen Funktionen $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ versehen mit der Supremumsnorm $\| \cdot \|_\infty : C[a, b] \to \mathbb{R}$; $c \mapsto \sup_{x \in [a,b]} \|c(x)\|$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ein Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Kurven von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}^n$ konvergiert *gleichmäßig* gegen $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in [a, b] \ \ \forall n \geq N : \quad \|c_n(x) - c(x)\| < \epsilon$$

Zeigen Sie: Eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C[a, b]$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, wenn $c \in C[a, b]$ gilt und $\lim_{n\to\infty} \|c_n - c\|_\infty = 0$ ist.

Aufgabe 4. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Teilmenge und $M := \{c : [a, b] \to A \mid c \text{ stetig}\}$. Es bezeichne $d_\infty^M : M \times M \to \mathbb{R}$ die Einschränkung auf M der durch die Supremumsnorm aus Aufgabe 3 induzierten Metrik. Zeigen Sie: Der Raum (M, d_∞^M) ist vollständig.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 14.6.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.