Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

Sommersemester 2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis II
Serie 9

Aufgabe 1. Zeigen Sie für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Identität:

$$\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g \cdot \Delta f$$

Aufgabe 2. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; ; \; (x, y) \mapsto (y - x^2)(y - 2x^2)$$

Skizzieren Sie den Graphen von f und zeigen Sie:

a.) Die Funktion f besitzt kein lokales Minimum im Punkt $(0, 0)$.

b.) Für jedes $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ besitzt die Funktion $f_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; t \mapsto f(t \cdot v)$ in $t = 0$ ein lokales Minimum.

Aufgabe 3. Berechnen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; ; \; (x, y) \mapsto \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{für } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das Doppelintegral

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Wie lässt sich dieses geometrisch deuten?

Aufgabe 4. Es sei

$$W := \{f \in C^2[a, b] \mid f(a) = f(b) = 0\}$$

Wir definieren das Funktional

$$F : W \to \mathbb{R} \; ; \; f \mapsto \int_a^b \left((f'(t))^2 - 1\right)^2 \mathrm{d}t$$

Zeigen Sie:

$$\inf_{f \in W} F(f) = 0$$

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 16.6.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.