Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

Sommersemester 2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis II
Serie 8

Aufgabe 1. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; ; \; (x, y) \mapsto y^2(x + 1)^3 - \frac{1}{1 + x^2}$$

a.) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und klären Sie, ob lokale Extrema vorliegen.

b.) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f. Besitzt f ein globales Minimum?

Aufgabe 2. Es seien Punkte $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ gegeben für $m \geq 2$. Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto \sum_{i=1}^{m} \|x - a_i\|^2$ besitzt ein globales Minimum $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie nun x_0 und $f(x_0)$.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; ; \; (x, y) \mapsto \frac{1}{1-x-y}$ gegeben. Berechnen Sie die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (T_k f)((x, y))$ von f im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und bestimmen Sie deren Konvergenzgebiet.

Aufgabe 4. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c : [a, b] \to (V, \| \cdot \|)$ eine differenzierbare Kurve. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\|c(b) - c(a)\| \leq \sup_{t \in [a,b]} \|c'(t)\| \cdot |b - a|$$

Zusatzaufgabe 5. Es sei $\mathbb{R}^{2k}_+ := \{(x_1, \ldots, x_{2k}) \in \mathbb{R}^{2k} \mid x_i > 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq 2k\}$. Gegeben sei weiter die Funktion

$$f : \mathbb{R}^{2k}_+ \to \mathbb{R} \; ; \; (x_1, \ldots, x_{2k}) \mapsto \Big(\sum_{i=1}^{k} x_{2i-1} x_{2i} \Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i x_{2k+1-i}} \Big) .$$

Zeigen Sie, dass f ein globales Minimum $x_0 \in \mathbb{R}^{2k}_+$ besitzt und berechnen Sie $f(x_0)$.
Hinweis: Unterteilen Sie (soweit möglich) die Variablen in Viererblöcke $(x_1, x_2, x_{2k-1}, x_{2k})$, $(x_3, x_4, x_{2k-3}, x_{2k-2})$, usw. und zeigen Sie, dass man $x_1 x_{2k} = x_2 x_{2k-1}$, usw. annehmen kann. Zeigen Sie ferner, dass man $x_1 x_2 = x_{2k-1} x_{2k}$, usw. annehmen kann. Formulieren Sie nun obiges Minimierungsproblem in den Variablen $c_1 = x_1 x_2 = x_{2k-1} x_{2k}$, $c_2 = x_3 x_4 = x_{2k-3} x_{2k-2}$, usw.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 9.6.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.