Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

Sommersemester 2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis II
Serie 7

Aufgabe 1. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Gegebene Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$ seien stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen

$$\begin{aligned} f+g : \quad & U \to \mathbb{R}\,; \quad x \mapsto f(x)+g(x), \\ f \cdot g : \quad & U \to \mathbb{R}\,; \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x) \\ \tfrac{f}{g} : \quad & \{x \in U \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}\,; \quad x \mapsto \tfrac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

stetig partiell differenzierbar sind.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x \cdot y^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$$

existieren, die Funktion selbst jedoch nicht stetig ist.

Aufgabe 3. Es sei $\alpha \geq 0$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbare Funktion mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\langle (\nabla f)_x, x \rangle = \alpha \cdot f(x)\,.$$

Zeigen Sie: Die Funktion f ist homogen von Ordnung α, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t > 0$ gilt $f(tx) = t^\alpha \cdot f(x)$.

Hinweis: Betrachten Sie für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Hilfsfunktion $F_x(t) := f(tx) - t^\alpha f(x)$.

Aufgabe 4. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und U offene und zusammenhängende Teilmenge von V. Zeigen Sie: Für alle $x, y \in U$ existiert ein in U verlaufender Streckenzug von x nach y, d.h. es existieren Punkte $x_1, ..., x_n \in U$ mit $x_1 = x$ und $x_n = y$, so dass für alle $i = 1, ..., n-1$ die Strecke

$$\overline{x_i x_{i+1}} = \{\lambda \cdot x_i + (1-\lambda) \cdot x_{i+1} : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Teilmenge von U ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 2.6.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.