Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

Sommersemester 2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis II
Serie 6

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ ;\ (x, y, z) \mapsto x \cdot \sin(y \cdot z)$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\} \to \mathbb{R}\ ;\ (x, y, z) \mapsto \frac{x \cdot e^y}{z}$$

alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung.

Aufgabe 3. Gegeben sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ;\ (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

gilt. Ist f einmal stetig partiell differenzierbar?

Aufgabe 4. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ ;\ (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$$

a.) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion f. In welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hat $(Jf)_{(x,y)}$ vollen Rang?

b.) Skizzieren Sie die Abbildung f als Vektorfeld.

c.) Fassen Sie die Abbildung f nun als Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ auf, indem sie $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren vermittels $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}\,;\ (x, y) \mapsto x + iy$.

Zusatzaufgabe 5. Wir bezeichnen den Raum der $(n \times n)$-Matrizen mit reellen Einträgen mit $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie

a.) Die Menge $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, versehen mit den Verknüpfungen

$$+ : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) : (A, B) \mapsto A + B$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})\,;\ (\lambda, A) \mapsto \lambda \cdot A$$

ist ein reeller Vektorraum der Dimension n^2.

b.) Die Abbildung

$$\| \cdot \| : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,;\ A \mapsto \sqrt{\mathrm{Spur}(A \cdot A^T)}$$

ist eine Norm auf $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$.

c.) Die Menge

$$\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) : A \text{ ist invertierbar}\}$$

ist eine offene Teilmenge von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, welche nicht wegzusammenhängend ist.

d.) Die Abbildung

$$F : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,;\ A \mapsto \frac{1}{\det(A)}$$

ist stetig partiell differenzierbar.

e.) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{Inv} : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})\,;\ A \mapsto A^{-1}$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie das Differential $(D\mathrm{Inv})_A$ für alle $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.
Hinweis: Cramersche Regel.

Zum Skizzieren von Funktionen stehen Ihnen an den Universitätsrechnern Programme zur Verfügung. So lässt sich z.B. der Graph der Funktion $[-5, 5] \times [-4, 4] \to \mathbb{R}\ ;\ (x, y) \mapsto x \sin(y)$ in MATHEMATICA *mittels* `Plot3D[x Sin[y],{x,-5,5},{y,-4,4}]` *gefolgt von* `Shift Enter`*, in* MAPLE *vermöge* `plot3d(x*sin(y), x = -5 .. 5, y = -4 .. 4)` *gefolgt von* `Enter`*, zeichnen (und dann auch dreidimensional rotieren). Höhenlinien ergeben sich durch* `ContourPlot[x Sin[y],{x,-5,5},{y,-4,4}]` *bzw. mit der Befehlsfolge* `with(Student[MultivariateCalculus]);` *und* `CrossSection(x*sin(y), z = 1, x = -5 .. 5, y = -4 .. 4)` *(zur Höhe $z = 1$).*

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 26.5.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.