Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

Sommersemester 2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis II
Serie 5

Aufgabe 1. Es sei (M, d) ein metrischer Raum, $K \subseteq M$ eine kompakte Teilmenge und $x_0 \in M$ ein Punkt in M. Wir definieren den Abstand $d(x_0, K)$ von K zu x_0 vermittels

$$d(x_0, K) := \inf\{d(x_0, y) : y \in K\}$$

Zeigen Sie, dass ein $y_0 \in K$ existiert mit $d(x_0, K) = d(x_0, y_0)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}$$

versehen mit der vom $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik d_M ein zusammenhängender metrischer Raum ist.

Aufgabe 3. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; ; \; (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen Γ_f und die Niveaumengen, und zeigen Sie:

a.) Alle partiellen Ableitungen von f existieren.

b.) Die Funktion f ist nicht stetig.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; ; \; (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen Γ_f und die Niveaumengen, und zeigen Sie, dass f stetig partiell differenzierbar ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 19.5.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.