Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

Sommersemester 2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis II

Serie 4

Aufgabe 1. Es sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass eine C^1-Parametertransformation $\varphi : [0, L(c)] \to [a,b]$ existiert, so dass der Tangentialvektor der Kurve $d : [0, L(c)] \to \mathbb{R}^n\,;\ s \mapsto (c \circ \varphi)(s)$ konstante Länge eins hat. Folgern Sie $L(d|_{[0,s_0]}) = s_0$ für $0 \leq s_0 \leq L(c)$.

Hinweis: Setzen Sie $\varphi^{-1}(t) = \int_0^t \|c'(r)\| \mathrm{d}r$.

Aufgabe 2. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ die Einschränkungen $f|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ t \mapsto f(x_0, t)$ bzw. $f|_{\mathbb{R}\times\{y_0\}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ s \mapsto f(s, y_0)$ stetig sind, f selbst jedoch nicht stetig ist.

Aufgabe 3. Es sei $f : (M,d) \to (\tilde{M}, \tilde{d})$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a.) f ist genau dann stetig, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

b.) Ist f stetig, so sind die Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen.

c.) Ist f stetig, so sind die Urbilder von kompakten Mengen wieder kompakt.

Aufgabe 4. Gegeben seien die Abbildungen

$$D : (C^1[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to (C^0[a,b], \|\cdot\|_\infty)\ ;\ f \mapsto f'$$

$$I : (C^0[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)\ ;\ f \mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Zeigen Sie:

a.) Die Abbildungen D und I sind jeweils linear und surjektiv. Bestimmen Sie den Kern von D.

b.) Die Abbildung I ist stetig, die Abbildung D jedoch nicht.

Zusatzaufgabe 5. Es sei (M,d) metrischer Raum und K kompakte Teilmenge von M. Ferner sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl $\lambda > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert: Für jede Teilmenge X von M mit $X \cap K \neq \emptyset$ und Durchmesser $\mathrm{diam}(X) \leq \lambda$ existiert ein $i \in I$ mit $X \subseteq U_i$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 5.5.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.