Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

Sommersemester 2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis II
Serie 1

Aufgabe 1. Es seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$d_1 \times d_2 : (M_1 \times M_2) \times (M_1 \times M_2) \to \mathbb{R} \; ; \; ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

eine Metrik auf $M_1 \times M_2$ ist.

Aufgabe 2. Es seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume. Eine Funktion $f : M_1 \to M_2$ nennt man Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L > 0$, falls für alle $x_1, y_1 \in M_1$ gilt: $d_2(f(x_1), f(y_1)) \leq L \cdot d_1(x_1, y_1)$. Zeigen Sie, dass für einen metrischen Raum (M, d) die Metrik

$$d : (M \times M, d \times d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist.

Aufgabe 3. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Weiter sei N eine Teilmenge von M. Wir definieren die Abbildung

$$d_N : N \times N \to \mathbb{R} \; ; \; (x, y) \mapsto d(x, y) \, .$$

Zeigen Sie, dass (N, d_N) ein metrischer Raum ist und dass gilt: Ist $\tilde{U}$ offene Teilmenge von N, so existiert eine offene Teilmenge U von M mit der Eigenschaft $\tilde{U} = U \cap N$.

Aufgabe 4. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1[a, b]$ den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a.) Die Menge $C^1[a, b]$ ist ein Untervektorraum von $B[a, b]$.

b.) Die Abbildung

$$\|\cdot\|_{C^1} : C^1[a, b] \to \mathbb{R} \;\; ; \; f \mapsto \sup \{ \, |f(x)| + |f'(x)| : x \in [a, b] \, \}$$

ist eine Norm auf $C^1[a, b]$.

c.) Die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $C^1[a, b]$ und die Norm $\|\cdot\|_{C^1}$ sind nicht *äquivalent*, d.h. es existieren keine Konstanten $C, D > 0$ mit $C \cdot \|f\|_\infty \leq \|f\|_{C^1} \leq D \cdot \|f\|_\infty$ für alle $f \in C^1[a, b]$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 14.4.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.