Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 9

31. (*Killingfelder*) Sei (M^n, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und X ein differenzierbares Vektorfeld mit Fluss $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass die Diffeomorphismen ϕ_t Isometrien sind (für alle $t \in \mathbb{R}$) genau dann, wenn für alle Vektorfelder V, W gilt:

$$g(\nabla_V X, W) \;=\; -g(V, \nabla_W X)\,.$$

Ist eine der beiden Bedingungen erfüllt, so nennt man das Vektorfeld X *Killingfeld*.

32. Sei (M^n, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, X Killingfeld und $T(A) := \nabla_A X$. Zeigen Sie, dass die kovariante Ableitung $\nabla_B T$ des $(1,1)$-Tensors T ebenso wie T schiefsymmetrisch ist, d.h. für alle Vektorfelder V, W gilt:

$$g((\nabla_B T)(V), W) \;=\; -g(V, (\nabla_B T)(W))\,.$$

33. Sei (M^n, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und X Killingfeld. Zeigen Sie

$$(\nabla_V(\nabla X))(W) + R_{XV}W \;=\; 0\,.$$

34. Sei (M^n, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, X Killingfeld und

$$f \;:=\; \frac{1}{2}\cdot g(X, X)\,.$$

Zeigen Sie:

(a) $\nabla f = -T(X) = -\nabla_X X$.

(b) $(\mathrm{Hess} f)(V, W) = -g((T^2 + \nabla_X T + R_X)(V), W)$, wobei $R_X(V) = R_{V,X}X$.

(c) $\Delta f = \sum_{i=1}^n (\mathrm{Hess} f)(e_i, e_i) = -\mathrm{Ric}(X, X) - \mathrm{tr}\,(T^2)$, $(e_1, ..., e_n)$ lokale Orthonormalbasis von (M^n, g).

35. (*Satz von Bochner*) Sei (M^n, g) kompakte orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Ric}(g) \leq 0$. Dann ist jedes Killingfeld parallel.

Hinweis: Es gilt $0 = \int_{M^n} \Delta f \,\mu_g$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 13.6.2004, 12:15.