Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 7

25. (*Der Satz von Toponogov für Sekanten*) Sei $k \in \mathbb{R}$ und (M^n, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K \geq k$. Seien ferner $o \in M^n$, $p_1, p_2 \in M^n \backslash \{o\}$ Punkte und $c_i : p_i \rightsquigarrow o$, $c : p_1 \rightsquigarrow p_2$ nach Bogenlänge parametrisierte Kürzeste. Die entsprechenden (nach Bogenlänge parametrisierten) Kürzesten im Vergleichsdreieck $\tilde{\Delta}_{\tilde{o},\tilde{p}_1,\tilde{p}_2} \subset M^2_k$ bezeichnen wir mit $\tilde{c}_i : \tilde{p}_i \rightsquigarrow \tilde{o}$, bzw. $\tilde{c} : \tilde{p}_1 \rightsquigarrow \tilde{p}_2$. Zeigen Sie:

$$d_g(c_i(t), c(s)) \geq d_{M^2_k}(\tilde{c}_i(t), \tilde{c}(s))\,.$$

Hinweis: Mehrfaches Anwenden von Toponogov; für eine Kürzeste $\gamma_s : o \rightsquigarrow c(s)$ betrachten Sie auch das Dreieck $\Delta_{o,p_1,c(s)} \in M^n$ mit Kanten c_1, $c|_{[0,s]}$ und γ_s.

26. (*Kritische Punkte von Abstandsfunktionen*) Sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $A \subset M$ abgeschlossene Teilmenge. Man nennt $p \in M$ *singulär* bzgl. der Abstandsfunktion d_A von A, falls für jeden Tangentialvektor $v \in T_pM$ eine Kürzeste $c_p : [0, d_A(p)] \to M$ von $p = c_p(0)$ nach A existiert mit

$$g(c_p'(0), v) \geq 0\,.$$

Nicht-singuläre Punkte werden *regulär* genannt. Zeigen Sie:

(a) Ist p regulärer Punkt, so existiert eine offene Umgebung U von p und ein differenzierbares Vektorfeld X auf U mit $\|X\| \equiv 1$, so dass für jede Kürzeste $c_u : [0, d_A(u)] \to M$ von $u = c_u(0) \in U$ nach A

$$g(c_u'(0), X(u)) < 0$$

gilt. Ein solches Vektorfeld X nennt man *gradientenartig* bzgl. d_A.

(b) Die Menge U_A der regulären Punkte bzgl. d_A ist eine offene Menge.

(c) Auf der Menge U_A existiert ein bzgl. d_A gradientenartiges Vektorfeld X.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 23.5.2004, 12:15.