Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 6

20. Sei $A : I \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ eine differenzierbare Kurve invertierbarer $(n \times n)$-Matrizen. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \det A(t) \quad = \quad \mathrm{spur}(A^{-1}(t) \cdot A'(t)) \cdot \det A(t) \,.$$

21. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\gamma : [0, a] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Ferner sei $J(t)$ Jacobi-Feld längs γ mit $J(0) = 0$ und $J'(0) = w$. Zeigen Sie folgende "Identität":

$$J(t) \quad = \quad t \cdot w - \frac{t^3}{6} \cdot R_{w,\gamma'(0)}\gamma'(0) + o(t^3) \,.$$

Hinweis: Identifizieren Sie die Tangentialräume $T_{\gamma(0)}M$ und $T_{\gamma(t)}M$ mit Hilfe einer parallelen Basis von Vektorfeldern längs γ.

22. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\gamma : [0, a] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Seien $J_1, ..., J_{n-1}$ Jacobi-Felder längs γ mit $J_i(0) = 0$ und $J_i'(0) = e_i$ für eine Orthonormalbasis $e_1, ..., e_{n-1}$ von $\langle \gamma'(0) \rangle^\perp$, $i = 1, ..., n-1$. Die symmetrische Matrix $g(t)$ sei gegeben durch

$$g_{ij}(t) \quad := \quad \frac{1}{t^2} \cdot g(Y_i(t), Y_j(t)) \,, \quad 1 \le i, j \le n-1 \,.$$

Bestimmen Sie $g(0)$, $g'(0)$ und $g''(0)$.

23. Sei b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Ferner bezeichne $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die Sphäre vom Radius eins. Zeigen Sie

$$\int_{S^{n-1}} b(x, x) \, \mu_{S^{n-1}} \quad = \quad \frac{1}{n} \cdot \mathrm{vol}(S^{n-1}) \cdot \mathrm{spur}(b) \,,$$

wobei $\mathrm{spur}(b) = \sum_{i=1}^n b(e_i, e_i)$ für eine Orthonormalbasis $(e_1, ..., e_n)$ von $\mathbb{R}^n$.

Hinweis: Gaußscher Integralsatz.

24. Sei (M^n, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M^n$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{vol}(B_g(p, t)) = t^n \cdot V_0^n(1) \cdot \Big(1 - \frac{\mathrm{scal}(g)_p}{6(n+2)} + o(t^2)\Big)$$

Hier bezeichnet $\mathrm{scal}(g)_p = \mathrm{spur}(\mathrm{Ric}(g)_p)$ die Skalarkrümmung der Metrik g.

Hinweis: Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe 20. und 22. die Taylorentwicklung von $\sqrt{\det g_{ij}(t)}$ in $t = 0$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 16.5.2004, 12:15.