PD Dr. C. Böhm SS 2007

Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 5

16. Sei (M,g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $K \subset M$ kompakte Teilmenge und $f_K : M \to \mathbb{R}\,;\ p \mapsto d_g(K,p)$ die Abstandsfunktion bezüglich K. Zeigen Sie: Ist f_K in einer Umgebung U von $q \in M \backslash K$ differenzierbar, so gilt $\|\nabla f_K\| \equiv 1$.

17. (*Kovariante Ableitung von Tensoren*) Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, T ein (r,i)-Tensor, $i \in \{0,1\}$, $r \in \mathbb{N}$ und ∇ ein Zusammenhang auf M.

    (a) Zeigen Sie, dass durch die Identität

    $$\begin{aligned}(\nabla T)(X, X_1, \ldots, X_r) &:= \\ &= \nabla_X(T(X_1,\ldots,X_r)) - \sum_{i=1}^{r} T(X_1,\ldots,\nabla_X X_i\,,\ldots,X_r)\end{aligned}$$

    ein $(r+1,i)$-Tensor ∇T auf M definiert wird.

    (b) Ist (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, so gilt: Ein Zusammenhang ∇ auf M ist genau dann metrisch, falls $\nabla g = 0$ gilt.

18. Sei (M^n,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : [0,1] \to M$ injektive, differenzierbare nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $N : [0,1] \to TM^n$ ein differenzierbares Vektorfeld längs c mit $\|N(t)\| = 1$ und $N(t) \perp c'(t)$. Zeigen Sie:

    (a) Für kleine $\epsilon > 0$ ist

    $$F^2 := \{\exp_{c(t)}(s \cdot N(t)) \mid t \in [0,1],\ s \in (-\epsilon,\epsilon)\}$$

    eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M^n

    (b) Es gilt $K^{F^2}(p) \leq K_g(T_pF^2)$.
    Hinweis: $J(s) := \frac{d}{ds}\exp_{c(t)}(s \cdot N(t))$ ist ein Jacobi-Feld sowohl in M^n als auch in F^2. Berechnen Sie nun $\frac{d^2}{ds^2}g(J,J)$.

19. Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K \leq \delta$, $\gamma : [0,L] \to M$ nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $\gamma(0) = p$ und $L < \pi/\sqrt{\delta}$ im Fall $\delta > 0$. Dann gilt für die Hauptkrümmungen $\lambda_i(t)$ der Abstandssphären $S(t,p)$ folgende Abschätzung:

    $$\lambda_i(t) \geq \mathrm{ct}_\delta(t)\,.$$

    Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 18.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 9.5.2004, 12:15.