PD Dr. C. Böhm SS 2007

Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 3

8. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [0, L] \to M$ stückweise differenzierbare nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $L(c) = d_g(c(0), c(L))$. Zeigen Sie, dass c eine Geodätische ist.

9. Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann existiert eine offene Umgebung U von p und $\epsilon > 0$, so dass für alle $q \in U$ der Injektivitätsradius $\mathrm{inj}(q)$ im Punkt q der Abschätzung $\mathrm{inj}(q) \geq \epsilon$ genügt.

   Hinweis: Sei $\pi : TM \to M$ die Fußpunktabbildung. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$F : TM \to M \times M \ ; \ \ v \mapsto (\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v))$$

   ein lokaler Diffeomorphismus ist.

10. Sei $(\hat{M}, \hat{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeit und M Untermannigfaltigkeit von $\hat{M}$ versehen mit der induzierten Metrik $g = \hat{g}|_{TM \times TM}$. Sei $\nu M = (TM)^\perp$ das Normalenbündel von M und seien $\hat{\nabla}$ und ∇ die Levi-Civita-Ableitungen von $(\hat{M}, \hat{g})$ bzw. (M, g). Zeigen Sie:

    (a) Eine (lokales) differenzierbares Vektorfeld X auf M kann zu einem (lokalen) differenzierbaren Vektorfeld $\hat{X}$ auf $\hat{M}$ fortgesetzt werden.

    (b) Für differenzierbare Vektorfelder X, Y auf M gilt:

    $$\nabla_X Y = \mathrm{pr}_{TM}(\hat{\nabla}_{\hat{X}} \hat{Y}) \, .$$

    Für $p \in M$ ist die zweite Fundamentalform von M im Punkt p gegeben durch

    $$\alpha_p : T_pM \times T_pM \to \nu_pM \ ; \ \ (x_p, y_p) \mapsto \mathrm{pr}_{\nu_pM}((\hat{\nabla}_{\hat{X}} \hat{Y})(p))$$

    für Fortsetzungen $\hat{X}, \hat{Y}$ von differenzierbaren Vektorfeldern X, Y auf M mit $X(p) = x_p$ und $Y(p) = y_p$. Zeigen Sie:

    (c) Die zweite Fundamentalform α_p ist wohldefiniert und symmetrisch.

    Man nennt M *totalgeodätische* Untermannigfaltigkeit von $\hat{M}$, falls jede Geodätische in (M, g) auch Geodätische in $(\hat{M}, \hat{g})$ ist. Zeigen Sie:

    (d) Die Untermannigfaltigkeit M ist totalgeodätisch genau dann, wenn ihre zweite Fundamentalform verschwindet.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 25.4.2004, 12:15.