

Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 12

44. Sei (V^n, h) Euklidischer Vektorraum. Sei ferner R ein algebraischer Krümmungsoperator. Zeigen Sie

$$\text{Ric}(R^2 + R^\#)_{ij} = \sum_{k,l=1}^n R_{iklj} \cdot \text{Ric}(R)_{kl}$$

für eine Orthonormalbasis (e_1, \dots, e_n) von (V^n, h) .

Hinweis: Uhlenbeck-Trick.

45. Sei (V^n, h) Euklidischer Vektorraum und W ein algebraischer Weylkrümmungsoperator. Zeigen Sie

$$\text{Ric}(W^2 + W^\#) = 0.$$

46. Sei $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion. Für $t_0 \in (0, 1]$ definieren wir

$$s'(t_0) := \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{s(t_0) - s(t)}{t_0 - t}.$$

Zeigen Sie:

(a) Aus $s(0) = 0$ und $s'(t_0) \leq 0$ für alle $t_0 \in (0, 1]$ folgt $s \leq 0$.

(b) Sei $L > 0$. Aus $s(0) = 0$ und $s'(t_0) \leq L \cdot s(t_0)$ für alle $t_0 \in (0, 1]$ folgt $s \leq 0$.

47. Sei M^n kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Einen Krümmungsoperator R nennt man 2-nichtnegative, falls die Summe der beiden kleinsten Eigenwerte von R nichtnegativ ist. Zeigen Sie, dass der Raum der Riemannschen Metriken auf M^n mit 2-nichtnegativem Krümmungsoperator invariant unter dem Ricci-Fluss ist.

Hinweis: Sei R ein 2-nichtnegativer algebraischer Krümmungsoperator und seien b_1, b_2 Eigenvektoren von R bzgl. Eigenwerten λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Zeigen Sie

$$\langle (R^2 + R^\#) \cdot b_1, b_1 \rangle + \langle (R^2 + R^\#) \cdot b_2, b_2 \rangle \geq 0.$$

48. Seien $L, N, M : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ \mathbb{C} -lineare Abbildungen, so dass

$$P := \begin{pmatrix} L & M \\ \bar{M}^t & N \end{pmatrix}$$

hermitesch und nichtnegative ist, d.h. $\bar{P}^t = P$ und $(x^t, y^t) \cdot P \cdot (\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$, für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie

$$\text{Spur}(L \cdot \bar{N} - M \cdot \bar{M}) \geq 0.$$

Hinweis: Konjugieren Sie die Matrix P mit der Matrix $J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ und berechnen Sie $\text{Spur}(\overline{JPJ^t} \cdot P)$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 4.7.2007, 12:15.