Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 10

36. Sei (M^n, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und T eine $(r, 0)$-Tensor, $r \geq 1$. Sei ferner $(f_1, ..., f_n)$ eine lokale Basis von TM^n, $g_{ij} := g(f_i, f_j)$, $1 \leq i, j \leq n$, und $g^{pq} = (g_{ij})^{-1}_{pq}$, $1 \leq p, q \leq n$. Zeigen Sie, dass der Laplace Operator

$$(\Delta T)(X_1, ..., X_r) \quad := \quad \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} (\nabla(\nabla T))(f_i, f_j, X_1, ..., X_r)$$

von T wohldefiniert ist.

37. (*Zweite Bianchi-Identität*) Sei (M^n, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass für Vektorfelder X, Y, Z gilt

$$(\nabla_X R)_{YZ} + (\nabla_Y R)_{ZX} + (\nabla_Z R)_{XY} \quad = \quad 0\,.$$

38. Sei (M^n, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und X Vektorfeld. Für einen $(2, 0)$-Tensor T bezeiche

$$(\mathrm{div} T)(X) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} T)(e_i, X)$$

die Divergenz von T, $(e_1, ..., e_n)$ lokale Orthonormalbasis von TM^n.

Zeigen Sie die Identität

$$(\mathrm{div}\, \mathrm{ric}(g))(X) = \frac{1}{2} \cdot \partial_X\, \mathrm{sc}(g)\,.$$

Hinweis: Zweite Bianchi-Identität, Normalkoordinaten.

39. Sei (M^n, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 38:

(a) Der Einsteintensor

$$E(g) := \mathrm{ric(g)} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{sc}(g) \cdot g$$

ist divergenzfrei, d.h. $\mathrm{div} E(g) \equiv 0$.

(b) Ist $n \geq 3$, f differenzierbare Funktion und gilt

$$\mathrm{ric}(g) = f \cdot g,$$

so ist (M^n, g) schon Einsteinmannigfaltigkeit (d.h. f ist konstant).

Abgabe: Bis Mittwoch, den 20.6.2004, 12:15.