PD Dr. C. Böhm SS 2007

Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 1

1. Sei M eine n-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe von Diffeomorphismen von M. Zeigen Sie: Operiert G frei und eigentlich diskontinuierlich auf M, so ist der Bahnenraum M/G ein differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

2. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Auf M operiere eine Gruppe G von Diffeomorphismen frei und eigentlich diskontinuierlich. Es bezeichne M/G den Bahnenraum und $\pi : M \to M/G$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

   (a) Ist $f : M \to N$ differenzierbar und *G-invariant* (d. h. für alle $\gamma \in G$ und $p \in M$ gilt $f(\gamma.p) = f(p)$), dann gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\bar{f} : M/G \to N$ mit $f = \bar{f} \circ \pi$.

   (b) Ist f Immersion [bzw. lokaler Diffeomorphismus], so auch $\bar{f}$.

3. (*Oberes Halbebenenmodel der Hyperbolischen Ebene*) Es bezeichne $\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{C} : y > 0\}$ die obere Halbebene der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$. Die Identität

$$g_{(x,y)}(v, w) := \frac{1}{y^2} \cdot \langle v, w\rangle_0$$

   definiert die sogenannte *hyperbolische Metrik* g auf $\mathbb{H}$; die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathbb{H}, g)$ nennt man die *hyperbolische Ebene*. Zeigen Sie:

   (a) Für α, $\beta > 0$ ist die Kurve $c : [0, 1] \to \mathbb{H}\,;\ t \mapsto t\beta i + (1 - t)\alpha i$ kürzeste Kurve zwischen den Punkten αi und βi. Können Sie auch Kürzeste zwischen zwei beliebigen Punkten in der hyperbolischen Ebene angeben?

   (b) Die Schnittkrümmung der hyperbolischen Ebene ist konstant.

   (c) Für $A = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ ist die Abbildung

$$h_A : \mathbb{H} \to \mathbb{C}\ ;\ \ z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

   eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{H}$ in sich (ein „Automorphismus").

   (d) Die Diffeomorphismen $h_A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $A \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ sind Isometrien der hyperbolischen Ebene.

   (e) Die Abbildung $\rho : (\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})\,, \cdot) \to (\mathrm{Aut}(\mathbb{H}), \circ)\,;\ A \mapsto h_A$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

   (f) Die Gruppe $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$.

   (g) Die Abbildung h_A, $A \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})\backslash\{\pm I\}$, hat genau dann einen Fixpunkt in $\mathbb{H}$, wenn $|\mathrm{Spur}(A)| < 2$ gilt.

   (h) Für $m \geq 3$ ist

$$\Gamma_m := \left\{ \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z}) \mid \alpha \equiv \delta \equiv 1,\ \beta \equiv \gamma \equiv 0 \mod m \right\}$$

   eine Untergruppe von $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$, welche frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$ operiert.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 11.4.2004, 12:15.