Baldwins Pseudoebene Teil 1

L. Schiefelbein

WWU Münster

28.05.2020

Introduction

- Modifikation der "*ab inition*"definition
- Gegenbeispiel zu Zilbers Vermutung
- Grundbaustein für neues Feld überabzählbar kategorischer Gruppen, Felder und Geometrien

Introduction

- bilden streng minimale, projektive Ebene als Modifikation vom Fraïsse-Limes
- nicht alle Unterstrukturen sind zu betrachten, es genügt bereits Amalgamierung auf starken Unterstrukturen und starken Einbettung
- Dadruch behalten wir die Kontrolle über die algebraischen Abschlüsse von Mengen

projektive Ebene

Definition

Die projektive Ebene ist eine Punkt-Linien-Geometrie, sodass
(i) 2 beliebige Linien treffen sich in einem Punkt
(ii) 2 beliebige Punkte definieren eine eindeutige Linie
(iii) Es gibt 4 Punkte von denen keine 3 koliniar sind (liegen auf einer Linie)
Man könnte auch sagen: Die projektive Ebene ist eine Punkt Geraden umfassende Indizestruktur, wobei eine projektive Ebene über einem Körper K aus dem 1-dimensionalen Unterraum des Vektorraums K^3 als Punkte und dem 2-dimensionalen Unterraum des K^3 als Linien besteht.

Beispiel

projektive Ebene im $\mathbb{R}^3$
bezeichnet mit $\mathbb{R}P^2$
$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x = \lambda y$ ist Äquivalenzrelation
Quotientenraum $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$ ist die projektive Ebene

Sprache L und bipatite Graphen

Definition

Wir definieren die Sprache $L = \{P, E\}$ für bipartite Graphen. Wobei P ein Prädikat (welches die Färbung bestimmt) und E die Ecken beschreibt.

Definition

<u>bipatiter Graph</u>: Ein Graph, welcher sich in zwei Teilmengen A,B unterteilen lässt, sodass zwischen den Ecken einer einzelnen Teilmenge keine Kanten existieren.
sei $a_1, a_2 \in A, b \in B \Longrightarrow$ Es exisiert keine Kante zwischen a_1 und a_2 wobei a_1, a_2 eine Kante zu b haben <u>können</u>.

$e(\cdot), |\cdot|$

Definition

Für einen endlichen Graphen A bezeichne $e(A)$ die Anzahl der Kanten in A und $|A|$ die Anzahl der Ecken.

delta-Funktion

Notation

$$A \cup B := AB$$

Definition

Wir definieren eine Funktion δ durch

$$\delta(A) = 2|A| - e(A)$$

und setzten dabei

$$\delta(A/B) = \delta(AB) - \delta(B)$$

Definition

Dann erfüllt δ das submodulare Gesetz für Funktionen von Prägeometrien.
Dieses wiederum besagt

$$\delta(AB) + \delta(A \cap B) \leq \delta(A) + \delta(B)$$

oder äquivalent dazu

$$\delta(A/B) \leq \delta(A/A \cap B)$$

Wenn dies für eine Funktion gilt, nennen wir sie submodular.

stark

Definition

Wir nennen eine endliche Menge $B \subseteq M$ *stark* in M ($B \leq M$), falls $\delta(A/B) \geq 0 \; \forall A \subseteq_{endl} M$

$\mathcal{K}$

Definition

$\mathcal{K}$ ist die Klasse der Graphen M, welche im Bezug auf P bipartite ist und keine 4-Zyklen beinhaltet, und so dass $\delta(A) \geq 4$ für die Subgraphen von M mit $|A| \geq 3$.

Bemerkung

(i)Dies impliziert $\delta(A) \geq 2 \qquad \forall A \in \mathcal{K}$
(ii)Jede endliche Teilmenge $A \subseteq M$ liegt in einer endlichen, starken Teilmenge $F \subseteq M$, wobei F eine Erweiterung von A ist, beziehungsweise A ein Redukt von F ist, sodass $\delta(F)$ minimal ist.

triviale Amalgamierung

Sei Graph $A \subseteq M, N$

- $M \otimes_A N$ die triviale Amalgamierung/Zusammenschluss
- Menge der Ecken ist definiert durch disjunkte Vereinigung $(M \setminus A) \cup (N \setminus A) \cup A$

Lemma

Sei $A \leq N$, $\delta(F) \geq 4\ \forall F \leq_{endl.} M, N$ mit $|F| \geq 3 \Rightarrow$ Selbiges gilt für $M \otimes_A N$
und aus M endlich folgt M stark in $M \otimes_A N$

Beweis.

Die Aussagen folgen aus
Alle $F \subseteq M \otimes_A N$ sind von der Form $M' \otimes_{A'} N'$, mit $M' = F \cap M$, $N' = F \cap N$ und $A' = F \cap A$
Es folgt die Formel: $\delta(F) = \delta(M') + \delta(N'/A')$ □

Minimalität

Definition

Wir nennen eine echte, starke Erweiterung F von A minimal, falls sie nicht in zwei echte Erweiterungen unterteilt werden kann $A \leq C \leq F$

Definition

Wir nennen eine minimale Erweiterung i-minimal, falls $\delta(F/A) = i$
Selbige Bezeichnung (oder B ist i-minimal über A) nutzen wir für Paare (A, B) von disjunkten Mengen, falls AB eine i-minimale Erweiterung von A ist

einfache Paare

Definition

Ein 0-minimales Paar (A, B) nennen wir einfaches Paar, falls B über keine echte Teilmenge von A 0-minimal ist.

Bemerkung

Sei B 0-minimal über A und A_0 Menge der Elemente von A, welche mit Elementen aus B verbunden sind. Dann ist (A_0, B) einfach und $A \cup B = A \otimes_{A_0} A_0 B$

Lemma

Eine echte starke Erweiterung $A \leq F$ ist minimal genau dann, wenn gilt

$$\delta(C/A) > \delta(F/A)$$

für alle C die echt zwischen A und F liegen.

Beweis.

Sei C eine Menge die echt zwischen A und F liegt ist, mit $x = \delta(C/A) \leq \delta(F/A)$, sodass x minimal ist. Dann folgt unmittelbar, dass F eine starke Erweiterung von C ist. $\square$

Korollar

Eine minimale Erweiterung F von A ist $i - minimal$ für $i = 0, 1$ or 2.
$1 - minimale$ und $2 - minimale$ Erweiterung haben Form $F = A \cup \{b\}$ wobei b zu maximal einem Element aus A verbunden ist.

Beweis.

Sei F eine $i - minimale$ Erweiterung von A.
Angenommen $B = F \setminus A$ hat mehr als ein Element und $i > 0$.
Es gilt $\delta(b/A) \leq 2 \quad \forall b \in B$. Somit folgt mittels Lemma, dass
(i)$i = 1$
(ii)b ist nicht verbunden mit a $\forall b \in B, a \in A$
Somit folgt $1 = \delta(B)$ ↯ für $B \in \mathcal{K}$ □

mu-Funktion

Definition

Definiere $\mu : (A, B) \to \mathbb{N}$ für (A,B) einfaches Paar, sodass gilt
1. $\mu(A, B)$ soll nur vom Isomorphismus typ von (A,B) abhängen
2. $\mu(A, B) \geq \delta(A)$.
Dabei interessieren wir uns nur für einfache Paare (A,B) für die $AB \in \mathcal{K}$ gilt.

<u>Merke</u>: Dies impliziert bereits $A \neq \emptyset$ und somit folgt $\mu(A, B) \geq 1$.

chi-Funktion und $\mathcal{K}_\mu$

Definition

N Graph, (A,B) einfaches Paar mit $A \subseteq N$. Wir definieren $\chi^N(A,B)$ als die maximale Anzahl paarweise disjunkter Graphen $B' \subseteq N$, sodass B und B' isomorph über A sind.

$\mathcal{K}_\mu$ ist die Unterklasse von $\mathcal{K}$ welche alle $N \in \mathcal{K}$ beinhaltet, sodass $\chi^N(A,B) \leq \mu(A,B)$ für jedes einfache Paar (A,B) mit $A \subseteq N$.
Merke: Somit ist $\mathcal{K}_\mu$ nur von den Werten von $\mu(A,B)$ abhängig, sodass $AB \in \mathcal{K}$ gilt.

Lemma

Sei $N \in \mathcal{K}_\mu$, sodass N zwei endliche Untergraphen $A \leq F$ beinhaltet. Falls $\delta(F/A) = 0 \Rightarrow$ es liegen nur endlich viele Kopien von F über A in N.

Beweis.

Es genügt $F = A \cup B$ für B einfach über A zu betrachten. $(*)$

Ann: Es liegen unendlich viele Kopien von B über A in N.

Sei C endlich Erweiterung von A, welche stark in N liegt.

$\Rightarrow \exists B'$ Kopie von B, die nicht in C liegt.

$\overset{Minimalität}{\Rightarrow} B \cap C = \emptyset$.

$\Rightarrow \exists$ unendliche Folge disjunkter Kopien, die Widerspruch zu $\chi^N(A, B) \leq \mu(A, B)$ darstellt.

$\Rightarrow \nexists B$ mit unendlich vielen Kopien über A in N. □

ad $(*)$: Warum genügt es $F = A \cup B$ für B einfach über A zu betrachten? Sollte $F \geq A$ nicht 0-minimal sein, so gibt es eine echte starke Inklusion $F > B > A$ mit $\delta(B/A) = 0$, da A stark über F ist, folgt auch $\delta(F/B) = 0$ sollte dies keine 0-minimalität haben verfeinern wir durch Iteration weiter bis wir 0-minimalität erreichen. F ist endlich und wir haben echte Inklusion, somit ist die Kette also endlich. Wir können nun einfach für $(A, B \setminus A)$ annehmen, denn: Gibt es nur endlich vielen Kopien von B über A in N, so ist die Aussage für $(A, B \setminus A)$ einfach äquivalent zur Aussage $(A, B \setminus A)$ 0-minimal.

Lemma

Seien $M \in \mathcal{K}_\mu$, A endlicher Untergraph von M, (A, B) einfaches Paar. Falls $N = M \otimes_A AB \notin \mathcal{K}_\mu$ von $\chi^N(A', B') > \mu(A', B')$ geglaubt wird, so gibt es zwei Möglichkeiten für (A', B'):
1. $A' = A$ und B' ist eine isomorphe Kopie von B über A
2. A' liegt in $A \cup B$, aber $A' \not\subset A$ und B beinhaltet eine isomorphe Kopie von B' über A'

Bemerkung: "von (...) geglaubt" $\Leftrightarrow$ "(...)ïst Grund der Aussage

Beweis

Fall 1: $A' \subseteq M$:

$M \in K_\mu \Rightarrow \exists$ Kopie B'' von B' über A', sodass $B'' \cap B \neq \emptyset$

Fall 1.1: $B'' \not\subseteq B \Rightarrow A' \leq A' \cup (M \cap B'') \leq A' \cup B''$

$\lightning$ Widerspruch zur Minimalität von B'' über A'.

$\Rightarrow B'' \subseteq B$

Merke: (A', B'') einfach$\Rightarrow \forall a \in A' \exists b \in B''$, sodass a,b verbunden. $\Rightarrow$ $A' \subseteq A$

Fall 1.2: $B'' \subset B$.

$\stackrel{0-min.von(A,B)}{\Rightarrow} 0 < \delta(B''/A) \leq \delta(B''/A')$

$\lightning$ Widerspruch zur Voraussetzung.

$\Rightarrow B = B'' \stackrel{(A,B) einfach}{\Rightarrow} A = A'$

Fall 2: $A' \not\subseteq M$, somit auch $A' \cap B = \emptyset$
B' einfach über $A' \Rightarrow \nexists$ Kopie von B' über A' in $M \setminus A$.
$\mathbb{A}$: $\exists$ disj. Kopien $B'_1, ..., B'_k$ über A' in M und disj. Kopien $B'_{k+1}, ..., B'_{k+l}$, die M sowie B schneiden.
Merke: (i) $M \cup A'$ stark in $A' \Rightarrow \delta(M \cup A') \leq \delta(A')$
(ii) $\forall B'_i \exists b \in B'_i$ für das $\exists a \in A' \cap B$, sodass a,b verbunden.
Es folgt:

$$\delta(A'/M) \leq \delta(A'/M \cap A') - k \leq \delta(A') - k$$

Weiter: B'_i 0-minimal über A'. Es folgt:

$$\delta(B'_i/M \cup A' \cup B'_{k+1} \cup ... \cup B'_{i-1}) < 0 \quad \forall i \in \{k+1, ..., k+l\}$$

$$\Longrightarrow \delta(\bigcup_{i=k+1}^{k+l} B'_i/M \cup A') \leq -l$$

$$\Longrightarrow 0 \overset{M \ stark \ in \ N}{\leq} \delta(\bigcup_{i=k+1}^{k+l} B'_i \cup A'/M) \leq \delta(A'/M) - l \leq \delta(A') - (k+l)$$

$\Longrightarrow$ maximal $\delta(A')$ viele disj. Kopien B'' von B' über A' <u>nicht</u> in B

$\exists$ B' über A' in B.

Da $\forall a \in A' \exists b \in B''$, sodass a,b verbunden $\Rightarrow A' \in A \cup B$ $\square$

Saturiertheit

Definition

$M \in \mathcal{K}_\mu$ heißt $\mathcal{K}_\mu - Saturiert$, wenn $\forall A \leq_{endl.} M$, $C \in \mathcal{K}_\mu$ starke Erweiterungen von A $\exists$ starke Einbettung von C in M, bezüglich A.
Also $f_0 : A \hookrightarrow M,\ f_1 : A \hookrightarrow C \Rightarrow \exists f_2 : C \hookrightarrow M$, sodass $f_0 = f_2 \circ f_1$.

Merke: Der leere Graph liegt in $\mathcal{K}_\mu$ und ist starke Einbettung
$\forall A \in \mathcal{K}_\mu \Rightarrow \forall A \in_{endl.} \mathcal{K}_\mu \exists$ starke Einbettung in M.

Joint Embedding Property und Amalgamation Property

Definition

Joint Embedding Property: Wenn $B_1, B_2 \in \mathcal{K}$, gibt es $C \in \mathcal{K}$ und Eibettungen $f_i : B_i \hookrightarrow C$

Definition

Amalgamation Property: Wenn $A, B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ und $g_i : A \hookrightarrow B_i$ Einbettungen sind, gibt es $C \in \mathcal{K}$ und Einbettungen $f_i : B_i \hookrightarrow C$, sodass $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$

Merke: Für unsere Zwecke benötigen wir es, dass (JEP) und (AP) nicht bezüglich beliebiger sondern bezüglich starker Einbettungen gelten.

Haupttheorem

Satz

$\mathcal{K}_\mu^{fin}$ Klasse der endlichen Elemente von $\mathcal{K}_\mu$.
Bzgl. Unterstrukturen abgeschlossen und erfüllt (JEP) und (AP) bzgl. starker Einbettungen.
$\exists$ abz. $\mathcal{K}_\mu - saturierte$ Struktur M_μ (eind. bis auf Isomorphie)
M_μ ist proj. Ebene mit unendl. vielen Punkten pro Linie und unendl. vielen Linien pro Punkt.

$Beweis - Struktur$

- abgeschlossen Bezüglich Unterstrukturen   Defintion $\mathcal{K}_\mu^{fin}$
- (JEP),(AP) für starke Einbettungen
- Wir erhalten: bis auf isom. eind. $\mathcal{K}_\mu$-saturierte Struktur M_μ

- Insb.: part. Isom. $f : A \to A'$ mit $A, A' \leq M_\mu$ lässt sich zu Autom. auf M_μ erweitern. $(*)$

Beweis

Beweis
Da der leere Graph in $\mathcal{K}_\mu$ liegt und stark in $A \in \mathcal{K}_\mu$ ist genügt es bereits (AP) zu zeigen.
Seien $C, D_1, D_2 \in \mathcal{K}_\mu^{fin}$ mit $C \leq D_1, D_2$.
ZZ: $\exists\ E \in \mathcal{K}_\mu^{fin}$, welches D_1, D_2 als starke Untergraphen enthält. Mittels Induktion.

<u>Fall 1</u>: D_2 nicht minimale Erweiterung von C.
$\Rightarrow \exists D_2' \leq D_2$ welche echt zwischen C, D_2 liegt ($\neq$).
Nach IA. können wir D_1 mit D_2' über C zu E' amalgamieren und dann E' mit D_2 über D_2' zu E amalgamieren. Dabei haben wir hier nicht zwingend die triviale Amalgamierung, aber wissen dass wir eine finden, die wir nutzen können.
Dies ist bereits das gewünschte E.

Fall 2: D_2 minimale Erweiterung von C.
$\cancel{Z}$: Entweder $E = D_1 \otimes_C D_2$ liegt in $\mathcal{K}_\mu$ oder D_1 enthält stark eine Kopie von D_2 über C.
Nach Korollar, genügt es 0-,1- und 2-Minimalität zu betrachten

Fall 2.1: D_2 0-minimale Erweiterung von C.
Angenommen $E = D_1 \otimes_C D_2 \notin \mathcal{K}_\mu$.
Wir zeigen D_1 eine Kopie D_2' von D_2 enthält. stark folgt dann aus $\delta(D_2'/C) = 0$.
$E \notin \mathcal{K}_\mu$ hat einen von zwei Gründen:
(i) $\exists$ 4-Zykel in E. Dann gibt es Zykel $c_1, c_2 \in C$,$d_1 \in D_1 \setminus C$, $d_2 \in D_2 \setminus C$ mit d_1, d_2 sind verbunden zu c_i mit $i \in \{1, 2\}$.
$\overset{Minimalität}{\Rightarrow}$ $D_2 = C \cup \{d_2\}$, $C \cup \{d_1\}$ sind Kopie von D_2 über C.

(ii) $\chi^E(A', B') > \mu(A', B')$ für (A',B') einfach.
Sei A Menge der zu $B = D_2 \setminus C$ verbundenen Elemente aus C
$\Rightarrow (A, B)$ einfach und $E := D_1 \otimes_A AB(**)$.
$\overset{Lemma}{\Rightarrow}$ Einer der 2 Fälle tritt ein.
Angenommen Fall 2 tritt ein:
$\Rightarrow A \supseteq A' \subseteq D_2 = AB$, $a' \in A'$, B" Kopie von B' über A' in E.
$\overset{(A',B') einfach}{\Rightarrow} \exists b'' \in B''$ verbunden mit a'.
$\overset{(**)}{\Rightarrow} b'' \in AB$, also $B'' \cap D_2 \neq \emptyset$.
$\Rightarrow B'' \subseteq D_2$. Wenn nicht $\overset{(A',B'')0-min}{\Rightarrow} \delta(A'B''/A'B'' \cap D_2) < 0$
$\overset{Submodular}{\Rightarrow} \delta(C_2B''/D_2) \leq \delta(A'B''/A'B'' \cap D_2) < 0 \lightning$ zu D_2 stark in E.
Es gilt Fall 1, $A' = A$, B' ist Kopie von B über A. Alle weiteren Kopien B'' von B über A liegen in D_1, da (A', B') einfach.
B'' minimal über $A \overset{submod., wie eben}{\Rightarrow} B \subseteq C$ oder $B \subset D_1 \setminus C$.
$D_2 \in \mathcal{K}_\mu \Rightarrow \exists B'' \subseteq D_1 \setminus C$.
$\Rightarrow C \cup B''$ ist über C isomorph zu $D_2 = C \otimes_A AB$.
$\Rightarrow \exists$stark Kopie $D_2 \subseteq D_1$

Fall 2.2: D_2 1-minimale Erweiterung von C.
$\Rightarrow D_2 = C \cup \{b\}$ für b verbunden zu genau einem $a \in C$ $(***)$.
Z: $E = D_1 \otimes_C D_2 \in \mathcal{K}_\mu$.
Nach Konstruktion: E enthält nicht mehr Zyklen als D_1.
Sei (A, B) in E einfach.
aus $A \leq AB$ und $\delta(B/A) = 0$ folgt $b \notin B$ also $b \in A$.
$\overset{(***)}{\Rightarrow} 1 = \chi^E(A, B) \leq \mu(A, B)$, somit $E \in \mathcal{K}_\mu$

Fall 2.3: D_2 2-minimale Erweiterung von C.
$\Rightarrow D_2 = C \cup \{c\}$ für c nicht verbunden mit C.
Analog zu Fall 2.2 folgt $E = D_1 \otimes_C D_2 \in \mathcal{K}_\mu$

$\not{Z}$: M_μ ist projektive Ebene.
Zwei Eckpunkte selber Farbe bilden eine starke Unterstruktur von $M_\mu \Rightarrow$ für $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ solche Paare mit Farbe $a_i =$ Farbe b_i $\exists$ Autom. $f : A \to B$. $(*)$
Weil $\exists a_1, a_2 \in M_\mu$ Paar derselben Partition mit $dist(a_1, a_2) = 2 \Rightarrow$ Selbiges gilt für zwei beliebige solcher Paare.
$\Rightarrow$ zwei Punkte liegen auf einer Linie und zwei Linien schneiden sich in einem eindeutigen Punkt.
Eindeutigkeit, da 4-Zykel ausgeschlossen.
Analoger Beweis:
Sei $n \in \omega$, X Graph bestehend aus Eckpunkt x_0, sowie Nachbarn $x_1, ..., x_n$.
X liegt in $\mathcal{K}_\mu$ und ist starke Erweiterung von x_0.
$\Rightarrow$ Eckpunkte aus M_μ haben unendlich viele Nachbarn. Für projektive Ebenen heißt das: durch jeden Punkt verlaufen unendlich viele Linien und auf jeder Linie liegen unendlich viele Punkte.
$\Rightarrow$ Es gibt 4 Punkte in M_μ von denen keine 3 kolliniear sind.