Baldwins Pseudoebene Teil 2

Christoph Kesting

WWU Münster

Juni 2020

Wiederholung I

- Wir betrachten bipartite Graphen in der Sprache $\{P, E\}$.
- Für einen endliche Graphen A, B ist
  $\delta(A) = 2 \cdot |\text{Punkte von A}| - |\text{Kanten von A}|$ und
  $\delta(A/B) = \delta(AB) - \delta(B)$
- $B \subseteq M$ ist stark in M (kurz $B \leq M$), falls für alle endlichen $A \subseteq M$ gilt, dass $\delta(A/B) \geq 0$.
- Eine echte starke Erweiterung endlicher Graphen $A \leq F$ ist minimal, wenn man sie in keine zwei echten starken Erweiterungen aufteilen kann.
- $A \leq F$ ist i-minimal, falls $A \leq F$ minimal mit $\delta(F/A) = i$ ist.
- (A, B) ist einfach, falls B über A, aber keiner echten Teilmenge von A, 0-minimal ist.

Wiederholung II

- $\mathcal{K}$ ist die Klasse der bipartiten Graphen ohne 4-Zykel, wo für jeden endlichen Untergraphen A von $M \in \mathcal{K}$ mit $|A| \geq 3$ $\delta(A) \geq 4$ gilt.
- Die Funktion $\mu : \{\text{Isomorphietypen einfacher Paare}\} \to \mathbb{N}$ erfüllt $\mu(A, B) \geq \delta(A)$.
- $\chi^N(A, B) =$ maximale Anzahl paarweise disjunkter Kopien von B über A, für (A, B) einfaches Paar in N.
- $\mathcal{K}_\mu$ ist die Menge der $N \in \mathcal{K}$, sodass $\chi^N(A, B) \leq \mu(A, B)$ für alle einfachen Paare (A, B) in N gilt.

Wiederholung III

- Minimale Erweiterungen $F \geq A$ sind i-minimal mit $i = 0, 1, 2$ und für $i = 1, 2$ von der Form $A \cup \{b\}$.
  Bei $i = 1$ ist b mit einem $a \in A$ verbunden, bei $i = 2$ nicht.
- Sei $N \in \mathcal{K}_\mu$ und $A \leq F \subseteq_{fin} N$ mit $\delta(F/A) = 0$. Dann enthält N nur endlich viele Kopien von F über A.
- Sei $M \in \mathcal{K}_\mu$, (A, B) ein einfaches Paar. Ist $N = M \otimes_A AB \notin \mathcal{K}_\mu$ wegen $\chi^N(A', B') > \mu(A', B')$, dann ist (A', B') entweder isomorph zu (A, B) oder eine isomorphe Kopie von (A', B') ist enthalten in $A \cup B$.
- Es gibt eine abzählbare $\mathcal{K}_\mu$-saturierte/$\mathcal{K}_\mu$-reichhaltige Struktur M_μ die eindeutig bis auf Isomorphie ist.

Wiederholung IV

- Ist ψ eine streng minimale Formel mit Parametern aus B und sind a, b algebraisch pber $\psi(M) \cup B$. Dann ist der Morleyrang additiv, d.h. $MR(ab/B) = MR(a/B) + MR(b/aB)$.
- Ist b algebraisch über aA, so ist $MR(b/A) \leq MR(a/A)$. Insbesondere haben interalgebraische Elemente den gleichen Morleyrang.

Axiomatisierung

Definition

Sei T_μ die Theorie in der Sprache der bipartiten Graphen, sodass für Modelle $M \models T_\mu$ gilt, dass:

1. *Jeder Punkt in M hat unendlich viele Nachbarn*
2. $M \in \mathcal{K}_\mu$
3. $M \otimes_A AB \notin \mathcal{K}_\mu$ *für jedes einfache Paar* (A, B) *mit* $A \subseteq M$

Behauptung

Dies ist in Logik erster Stufe ausdrückbar.

Beweis der Ausdrückbarkeit in Logik erster Stufe

1. Jeder Punkt in M hat unendlich viele Nachbarn: offensichtlich ausdrückbar.
2. $M \in \mathcal{K}_\mu$:
   $M \in \mathcal{K}$ ist offensichtlich ausdrückbar.
   Für jeden Isomorphietyp von einfachen Paaren (A, B) können wir $\chi^M(A, B) \leq \mu(A, B)$ ausdrücken, weil A, B endlich sind und ihr Isomorphietyp mit einer Formel beschrieben werden kann.
3. $M \otimes_A AB \notin \mathcal{K}_\mu$ für jedes einfache Paar (A, B) mit $A \subseteq M$:
   Sei $D = M \otimes_A AB \notin \mathcal{K}_\mu$. Dann ist nach letztem Vortrag bereits ein einfaches Paar (A', B') in $A \cup B$ mit $\chi^D(A', B') > \mu(A', B')$. Diesen Fakt können wir ausdrücken, denn $A \cup B$ ist endlich.

Theorem

Es gilt $T_\mu = Th(M_\mu)$.

Beweis

$T_\mu \subseteq Th(M_\mu)$:

1. Jeder Punkt in M_μ hat unendlich viele Nachbarn: ist klar, nach letztem Vortrag.
2. $M_\mu \in \mathcal{K}_\mu$: klar, nach Konstruktion von M_μ.
3. Angenommen $D = M_\mu \otimes_A AB \in \mathcal{K}_\mu$, obwohl (A, B) ein einfaches Paar ist. Dann ist für für alle endl. $C \leq M_\mu$ mit $A \subseteq C$ auch $C \otimes_A AB \in \mathcal{K}_\mu$. Konstruiere damit eine Kette von disjunkten Kopien von B über A in M_μ. Widerspruch.

Beweis Fortsetzung: $T_\mu \supseteq Th(M_\mu)$:

Behauptung

$M \models T_\mu$ ist ω-saturiert $\Leftrightarrow M$ ist $\mathcal{K}_\mu$-saturiert/$\mathcal{K}_\mu$-reichhaltig.

Beweis

$\Rightarrow$: Sei $A \leq M$ und $A \leq F \in \mathcal{K}_\mu^{fin}$. Per Induktion sei F minimale Erweiterung von A.

- 0-minimal: So gilt nach 3., dass $M \otimes_A F \notin \mathcal{K}_\mu$. Nach Beweis des letzten Satzes aus dem letzten Vortrag gilt, dass M eine Kopie von F über A enthält.
- 1-minimal: Dann ist $F = A \cup \{b\}$ und b ist mit genau einem $a \in A$ verbunden. Dies a ist mit unendlich vielen $b' \in M$ verbunden. Insbesondere mit einem, dass nicht algebraisch über A ist. Dann ist $F' = A \cup \{b'\}$ isomorph zu F und stark in M, da F' nicht in einem $C \subseteq M$ mit $\delta(C/A) = 0$ enthalten sein kann.

- 2-minimal: Dann ist $F = A \cup \{b\}$ und es existieren b' und b'' in M sodass $A \leq A \cup \{b'\} \leq A \cup \{b', b''\} \leq M$ mit einem $a \in A$ verbunden mit b' verbunden mit b''. Dann ist $F' = A \cup \{b''\}$ isomorph zu F und $F' \leq A \cup \{b', b''\}$ liefert $F' \leq M$.

$\Leftarrow$: Angenommen M ist $\mathcal{K}_\mu$-saturiert. Dann ist M partiell isomorph zu M_μ, also $M \models T_\mu$. Wähle $M' \equiv M$ ω-saturiert. Dann ist M' $\mathcal{K}_\mu$-saturiert. Weiter sind M und M' partiell isomorph. Dann ist auch schon M ω-saturiert.

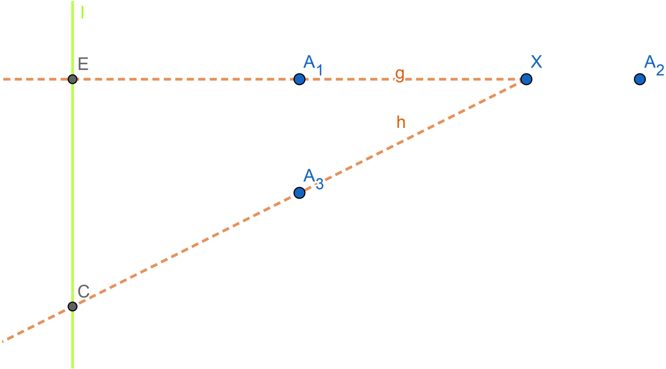
Coordinatisation

Definition

Sei $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *eine projektive Ebene,* $l \in \mathcal{L}$ *eine Linie und seien* $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{P}$ *nicht kollineare Punkte, die nicht auf* l *liegen. Sei* D_l *die Menge der Punkte auf* l*.*

Dann: $\Pi = dcl(D_l, a_1, a_2, a_3)$

Für $x \in \mathcal{P}$ *betrachte:*



Geraden funktionieren ähnlich.

Definition

Sei $cl(B) = cl^M(B)$ der kleinste starke Untergraph von M der B enthält. Wir definieren weiterhin

$$d(A) = \min\{\delta(B) | A \subseteq B \subseteq M\} = \delta(cl(A))$$

und wir setzen $d(A/B) = d(AB) - d(B)$.

Ziel

Unser Ziel wird es sein zu zeigen, dass für $a \in M$ die Menge der Nachbarn D_a streng minimal ist.

Lemma

Seien $M, M' \models T_\mu$,$a \in M$,$b \in M'$ dann gilt $tp(a) = tp(b)$ gdw. sich $a \mapsto b$ zu einem Isomorphismus $cl(a) \to cl(b)$ fortsetzen lässt. Insbesondere hängt $d(a)$ nur von $tp(a)$ ab.

Beweis.

Klar. $\square$

Lemma

Sei $M \models T_\mu$, $A \subseteq M$ endlich und $a \in M$.
Dann ist a algebraisch über A gdw. $d(a/A) = 0$.

Beweis

$\Leftarrow$: $cl(A)$ ist algebraisch über A. Ist $d(a/A) = 0$, so existiert eine Erweiterung $B \supseteq cl(A)$ mit $\delta(B/cl(A)) = 0$. Dann ist B bereits algebraisch über $cl(A)$.

Fortsetzung des Beweises.

$\Rightarrow$: o.B.d.A. ist M ω-saturiert. Ist $d(a/A) > 0$ so zerlege $cl(A) \leq cl(Aa)$ in eine Kette minimaler Erweiterungen $cl(A) = F_0 \leq \cdots \leq F_n = cl(Aa)$. Eine der Erweiterungen $F_k \leq F_{k+1}$ muss i-minimal für $i = 1, 2$ sein. Dann hat F_{k+1} bereits unendlich viele Konjugate über F_k. Damit kann $cl(Aa)$ und somit a nicht mehr algebraisch über A sein. $\square$

Proposition

Für $M \models T_\mu$ und $a \in M$ ist D_a streng minimal.

Beweis.

Sei A endlich und stark in M mit $a \in A$ und sei $b \in D_a$. Dann ist $d(b/A) = 0$ oder 1. Ist $d(b/A) = 0$ so ist b bereits algebraisch. Ist $d(b/A) = 1$ so ist a das einzige Element aus A mit dem b verbunden ist. Also ist Ab stark in M, somit ist $tp(b/A)$ der eindeutige nicht algebraische Typ in D_a. Damit ist D_a streng minimal. $\square$

Theorem

- *T_μ ist fast streng minimal und von Morleyrang 2.*
- *T_μ ist nicht 1-basiert.*
- *Für endliche Mengen F, A gilt $MR(F/A) = d(F/A)$.*

Beweis

Sei a eine Gerade. Dann ist D_a streng minimal, und es existiert eine endliche Menge A, sodass $dcl(AD_a) = M$. Dann ist T_μ fast streng minimal und von MR 2.
Sei $l \in M$ eine Gerade und $\{l, p\}$ stark in M. Dann ist $tp(l, p)$ eindeutig bestimmt. Es folgt p ist nicht algebraisch über l, somit $l \in Cb(p/l)$. Genauso ist l nicht algebraisch über p, was impliziert, dass T_μ nicht 1-basiert ist.
(benutze hier: ψ 1-basiert gdw. $Cb(a/B) \subseteq acl^{eq}(a)$ für alle B und endliche Tupel $a \in \psi(M)$)

Fortsetzung.

Seien ohne Einschränkung $A \leq F \leq M_\mu$ und F minimal über A. Dies können wir annehmen, da sowohl d als auch MR additiv sind.
Ist $\delta(F/A) = 0$, so ist F algebraisch über A.
Ist $\delta(F/A) = 1$, so ist $F = A \cup \{b\}$, wobei b mit einem $a \in A$ verbunden ist. Dann ist bereits $MR(F/A) = 1$.
Ist $\delta(F/A) = 2$, so konstruiere eine 0-minimale Erweiterung $F' \geq F$, die sich in zwei 1-minimale Erweiterungen aufspaltet. Dann ist $F = A \cup \{b\}$ und es existieren $b', b'' \in M_\mu$ mit $A \leq A \cup \{b'\} \leq A \cup \{b', b''\} = F'$, wo wieder ein $a \in A$ mit b' und b' mit b'' verbunden ist. Dann ist $F \cong A \cup \{b''\} \leq F'$ Dann ist $MR(F/A) = MR(F'/A) = 2$. $\square$

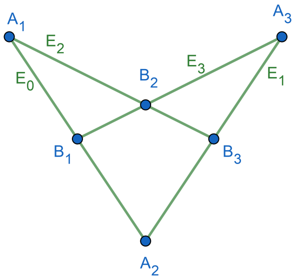
Theorem
Es ist keine unendliche Gruppe definierbar in T_μ^{eq}.

Korollar
Sei T_a die Theorie der induzierten Struktur auf D_a in $\mathcal{L} \cup \{a\}$. Dann ist T_a streng minimal, nicht lokal modular und interpretiert keinen unendlichen Körper.

Beweis des Korollars.
Da T_μ fast streng minimal über dem streng minimalen D_a und nicht 1-basiert ist, kann D_a nicht lokal modular sein.
(benutze hier: Ist T total transzendent und ψ streng minimal, so ist ψ 1-basiert gdw. ψ lokal modular) Interpretiert T_a einen unendlichen Körper, so interpretiert T_μ diesen auch. $\square$

Beweis

Angenommen eine Gruppe G von $MR\ n$ ist definierbar in T_μ^{eq}. Ohne Einschränkung sei G definierbar ohne Parameter.
Wie im vorletzten Vortrag erhalten wir eine Gruppenkonfiguration mit a_i und b_i von Rang n, jeweils zwei Elemente die auf einer Linie sind, sind algebraisch über dem Dritten und drei Elemente, die nicht auf einer Linie sind, sind unabhängig von einander. Wir wollen zeigen, dass eine solche Konfiguration nicht existieren kann.



(Bemerkung: die A_i im Bild sind a_i)

Seien A_i,B_i endliche abgeschlossene Mengen in M_μ, sodass $a_i \in dcl^{eq}(A_i)$ und $b_i \in dcl^{eq}(B_i)$. Ohne Einschränkung sind die A_i und B_i unabhängig vom Rest des Diagramms über den entsprechenden a_i bzw. b_i. Ohne Einschränkung ist $MR(A_i/a_i) = MR(B_i/b_i) = k$ für ein k. Nach Additivität von MR ist der MR aller 6 Punkte zusammen $3n + 6k$.

Betrachte die Linien E_i im Bild als Abschluss der A_i und B_i auf ihnen, also:

$E_0 = cl(A_1, B_1, A_2)$

$E_1 = cl(A_2, B_3, A_3)$

$E_2 = cl(A_1, B_2, B_3)$

$E_3 = cl(B_1, B_2, A_3)$

Setze $E = \bigcup_{i=0}^{3} E_i$.

Es gilt $\delta(E) \geq 3n + 6k$, weil sie alle Punkte enthalten. Andererseits kann man zeigen, dass

$$\delta(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) \leq \sum_{\emptyset \neq \Delta \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|\Delta|} \delta(\cap_{i \in \Delta} C_i)$$

für allgemeine C_i gilt.

Dann folgt mit $\delta(E_i) = 2n + 3k$, für $i \neq j \neq k \neq i$ $\delta(E_i \cap E_j) = n + k$ und $E_i \cap E_j \cap E_k = \emptyset$, dass

$$\delta(E) \leq 4(2n + 3k) - 6(n + k) = 2n + 6k,$$

was nur funktioniert, wenn n=0, also G endlich, ist.