ÜBERSICHT

Stand: 8.7.2011

Definitionen

- Teiler einer ganzen Zahl, Vielfaches
- Primzahl in $\mathbb{Z}$, unzerlegbare Zahlen in $\mathbb{Z}$
- triviale Teiler, echte Teiler
- vollkommene Zahlen
- Mersennesche Primzahlen
- Fermatsche Primzahlen
- größter gemeinsamer Teiler
- kleinstes gemeinsames Vielfaches
- ganzzahlige Linearkombination
- pythagoreisches Tripel
- Fundamentallösungen von $x^2 + y^2 = z^2$
- Ring (und additiv/multiplikativ neutrale Elemente, additiv inverse Elemente)
- nullteilerfreier Ring
- kommutativer Ring
- Polynomring
- quadratischer Zahlbereich $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$
- Grad eines Polynoms
- Teilbarkeit in allgemeinen Ringen
- Einheit
- Assoziiertheit
- echter Teiler
- Unzerlegbarkeit

Angela Holtmann

- Primelement
- Normfunktion/Normabbildung
- monotone Normfunktionen
- faktorieller Ring
- Ideal in einem Ring
- Hauptideal, Hauptidealring

Aussagen, Sätze, Beispiele, Rechnungen

- Rechenregeln für Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$ (incl. Beweisen)
- Teiler von 0 (ausrechnen können), alle Teiler jeder ganzen Zahl ausrechnen können
- Jede von Null verschiedene ganze Zahl hat nur endlich viele Teiler (auch nachrechnen können)
- Teiler kommen in „Paaren“ vor (positive und negative Teiler) (incl. Beweis)
- Charakterisierungen von Primzahlen (incl. Beweisen, insb.: Wie finde ich zu echten Teilern echte positive Teiler? – das benötigt man überall. . .)
- Es gibt zu jeder natürlichen Zahl $a > 1$ einen kleinsten positiven Teiler $t > 1$ (incl. Beweisidee)
- Satz von Euklid (incl. Beweis)
- Fundamentallemma für Primzahlen (ggf. Beweis)
- Hauptsatz der EZT und Umformulierung
- Teilbarkeitskriterium (incl. Beweis)
- Satz über die Anzahl aller positiven Teiler einer ganzen Zahl (incl. Beweis)
- Satz über das Produkt aller positiven Teiler einer ganzen Zahl (incl. Beweis)
- Satz über die Summe aller positiven Teiler einer ganzen Zahl
- Charakterisierung vollkommener Zahlen (und vom Beweis zumindest: nachrechnen können, dass solche Zahlen vollkommen sind; natürlich auch in Beispielen)
- geometrische Summenformel (incl. Beweis)

- notwendige Bedingungen für Mersennesche und Fermatsche Primzahlen (incl. Beweisidee: wie finde ich echte Teiler, wenn die Bedingungen nicht erfüllt sind?)
- Eindeutigkeit des ggT (incl. Beweis)
- Existenz des ggT und Darstellung des ggT (incl. Beweis – wobei natürlich in einer Aufgabe nicht alle drei Fälle abgefragt würden)
- dto. für kgV
- Euklidischer Algorithmus (und Erweiterung) – anwenden können zur Darstellung des ggT von (ggf. mehreren Zahlen) als Linearkombination der Zahlen
- Hauptsatz über den ggT, insbesondere: Was haben wir mit $I(a_1, \ldots, a_n)$ für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ bezeichnet? Abgeschlossenheit dieser Mengen unter Differenzenbildung und Multiplikation mit ganzen Zahlen; nachrechnen können, dass im Fall $I(a, b) = I(c)$ das c der ggT von a und b ist (bzw. allgemein nachrechnen können, dass etwas Vorgegebenes ein ggT von zwei Zahlen ist); Charakterisierung des ggT
- Lösungen linearer diophantischer Gleichungen (berechnen können)
- Lösungen der diophantischen Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$: Zusammenhang der Lösungen (Vorzeichentausch möglich, Fundamentallösungen und Zusammenhang zu allgemeinen Lösungen (auch nachrechnen können, genau eines von x_0 und y_0 ist gerade und z_0 ist ungerade (incl. Beweisen), Fundamentallösungen berechnen/angeben können)
- Rechenverfahren wie in Lemma 2.1.2
- Beispiele zu Ringen (ganze Zahlen, rationale Zahlen, Paare von ganzen Zahlen mit kompenentenweiser Addition und Multiplikation, Polynomringe, quadratische Zahlbereiche) – in all diesen Ringen „rechnen“ können
- nachrechnen können, dass etwas ein Ring ist
- Gradsatz (insb. für Polynomringe über nullteilerfreien Ringen) (incl. Beweis)
- Ist $m \in \mathbb{Z}$ eine Quadratzahl, so ist $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ nicht nullteilerfrei. (incl. Beweis)
- Rechenregeln für Teilbarkeit in allgemeinen Ringen (incl. Beweisen)
- Beispiele für Einheiten angeben können (und auch für Nichteinheiten) in den ganzen Zahlen und Polynomringen (incl. Begründungen)
- Einheiten bestimmen können, Teiler angeben können
- Konstruktion neuer Einheiten (Produkt von zwei Einheiten etc.) (incl. Beweisen)
- Einheiten sind Teiler von allen Ringelementen (incl. Beweis)

Angela Holtmann

- nachrechnen können, warum gewisse Elemente assoziiert sind (oder auch nicht) und Definition von Assoziiertheit
- Aussage von Lemma 2.2.9 (zwei Teiler sind entweder beide echte Teiler oder beide keine echten Teiler)
- Jedes Primelement ist unzerlegbar (incl. Beweis)
- Normfunktionen in den ganzen Zahlen, Polynomringen und quadratischen Zahlbereichen (und nachrechnen können, dass diese wirklich Normfunktionen sind; ggf. bei anderen Ringen, wobei bei denen die entsprechende Normfunktion dann auf jeden Fall vorgegeben würde)
- Zusammenhang von Teilbarkeit in Ringen mit (monotonen) Normfunktionen und Teilbarkeit in den nicht-negativen ganzen Zahlen kennen/anwenden können
- Satz kennen: R nullteilerfreier Ring mit monotoner Normfunktion, dann ist jede Nicht-Einheit, die nicht das additiv neutrale Element ist, ein Produkt von unzerlegbaren Elementen. (Beispiel (Hauptsatz der EZT): ganze Zahlen)
- Nachrechnen können, dass in gewissen quadratischen Zahlbereichen Zerlegungen in unzerlegbare Elemente nicht eindeutig sind (insb. auch zeigen können, dass ein Element unzerlegbar ist (über dessen Normfunktion))
- Beispiel für einen faktoriellen Ring (ganze Zahlen, Hauptsatz der EZT)
- Charakterisierung faktorieller Ringe
- die Ideale $I(r_1, \ldots, r_n)$
- Zusammenhang der Teilbarkeit mit Inklusionen von Idealen (incl. Beweis), auch Zusammenhang zwischen Einheiten und Inklusion von Idealen (incl. Beweis)
- Satz kennen: R nullteilerfreier Hauptidealring. Dann ist jedes unzerlegbare Element in R auch ein Primelement.
- Beispiele und Gegenbeispiele im algebraischen Teil: ganze Zahlen, Polynomringe, quadratische Zahlbereiche (was geht?, was geht nicht?)
- nachrechnen können, dass eine vorgegebene Struktur ein ... ist und kein ... ist – in leichten Beispielen
- und natürlich: alles mögliche ausrechnen können: ggT, kgV, Anzahl, Summe, Produkt aller positiven Teiler einer ganzen Zahl, Lösungen linearer diophantischer Gleichungen, Summen und Produkte in verschiedenen Ringen (ganze Zahlen, Polynomringe, quadratische Zahlbereiche (oder auch andere Ringe, wobei dann die Summe und das Produkt zweier (beliebiger) Elemente explizit angegeben würde)), Normfunktionen in den drei Beispielringen (ggf. auch für fest vorgegebenes $m \in \mathbb{Z}$)

Angela Holtmann