Vorlesung „Ausgewählte Kapitel der Geometrie“

– Leitfaden –

1 Grundlagen aus der Gruppentheorie

Definition 1.1. Eine *Verknüpfung auf einer Menge M* ist eine Abbildung

$$\bullet\colon M \times M \to M, (x, y) \mapsto x \bullet y.$$

Beispiel 1.2.

- *Sei $M := \mathbb{Z} := \{1, 2, \ldots\}$. Dann liefert die Addition*

  $$+\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y$$

  eine Verknüpfung.

- *Sei X irgendeine Menge und $M := \{h\colon X \to X\}$ die Menge aller Abbildungen von X in X. Dann liefert die Hintereinanderschaltung $\circ$ von Abbildungen $f, g \in M$ eine Verknüpfung:*

  $$(g \circ f)(x) := g\,(f\,(x))$$

  für $f, g \in M$ und $x \in X$.

Definition 1.3.
Eine Verknüpfung $\bullet\colon M \times M \to M, (x, y) \mapsto x \bullet y$ heißt *assoziativ*, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:

$$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z).$$

Definition 1.4. Eine *Gruppe* ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\bullet\colon G \times G \to G$, für die gilt:

(G1) $\bullet$ ist assoziativ

(G2) Es gibt ein Element $e \in G$, so dass für alle $g \in G$ gilt: $e \bullet g = g \bullet e = g$.

(G3) Zu jedem Element $g \in G$ gibt es ein Element $g^{-1} \in G$, so dass $g^{-1} \bullet g = g \bullet g^{-1} = e$ ist.

Beispiel 1.5. *Symmetriegruppe eines regelmäßigen Dreiecks*

Zeichnungen!

Gruppentafel! (Drehgruppe, Spiegelungsuntergruppen, gesamte Gruppentafel der Symmetriegruppe, aber nur exemplarisch explizit mit Bildchen berechnet, Rest: zu Hause hinsetzen und aufmalen)

Bezeichnungen: Ecken des Dreiecks gegen den Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3$ *beschriftet,* D_α*, Drehung um den Mittelpunkt des Dreiecks mit Drehwinkel* α*,* $\alpha \in \{x \cdot 120^\circ \mid x \in \mathbb{Z}\}$*,* $A_i :=$ *Spiegelung an der Geraden durch den Eckpunkt i und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite*

$D_\alpha \circ D_\beta = D_{\beta+\alpha} = D_{\alpha+\beta} = D_\beta \circ D_\alpha$*, da* $\beta + \alpha = \alpha + \beta$ *in* $\mathbb{R}$

Beispiel 1.6. *Symmetriegruppen endlicher Mengen,* S_n

$f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\},$
$\quad 1 \mapsto f(1)$
$\quad \ldots$
$\quad n \mapsto f(n)$
so dass gilt: $f(x) \neq f(y)$*, falls* $x \neq y$ $(*)$

Beispiel in der S_3

Kurzschreibweise: $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ f(1) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$

Beispiele in der S_3

Hintereinanderschaltungen von zwei Abbildungen in der S_n *mit Kurzschreibweise*

Haben f, g *die Eigenschaft* $(*)$*, so hat auch* $g \circ f$ *die Eigenschaft* $(*)$*.*
Beweis: Sind $x, y \in \{1, \ldots, n\}$ *mit* $x \neq y$*, so ist auch* $f(x) \neq f(y)$ *(nach Eigenschaft* $(*)$ *für* f*). Dann ist aber auch* $g \circ f(x) = g(f(x)) \neq g(f(y)) = g \circ f(y)$ *(nach Eigenschaft* $(*)$ *für* g*).*

Hintereinanderschaltung von zwei Abbildungen in der S_3 *(ausführlich und in Kurzschreibweise)*

Definition 1.7. Eine Gruppe $(G, \bullet)$ heißt *kommutativ* (oder *abelsch*[1]), falls für alle $g, h \in G$ gilt:

$$g \bullet h = h \bullet g.$$

Beispiel 1.8. *Die Gruppe* $(\mathbb{Z}, +)$ *ist kommutativ.*

Die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Dreiecks $= S_3$ *ist nicht kommutativ.*

Definition 1.9. Ist G eine Gruppe, so nennen wir die Anzahl der Elemente von G die *Ordnung von* G. Wir bezeichnen sie mit $|G|$.

Wir wollen Teilmengen von Gruppen haben, die wiederum Gruppen sind.

Definition 1.10. Eine Teilmenge H einer Gruppe $G = (G, \bullet, e)$ heißt *Untergruppe*, falls gilt:

(UG1) $e \in H$

[1] Niels Hendrik Abel, Hinweis/Abelpreis

(UG2) Für alle $h_1, h_2 \in H$ ist auch $h_1 \bullet h_2 \in H$.

(UG3) Für alle $h \in H$ ist auch $h^{-1} \in H$.

Einstieg: Wollen Gruppenstrukturen miteinander vergleichen, mit Abbildungen Verknüpfungen der linken Seite in Verknüpfungen der rechten Seite überführen. Beispiel: Drehgruppe eines regelmäßigen Dreiecks und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (nicht unter diesem Namen, nur als Menge $\{0, 1, 2\}$ mit der „entsprechenden Verknüpfung“)

Definition 1.11. Seien $(G, \bullet)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen. Eine Abbildung $f\colon G \to H$ heißt *Gruppenhomomorphismus*[23], falls für alle $x, y \in G$ gilt:

$$f(x \bullet y) = f(x) * f(y).$$

Ein Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to H$ heißt *Gruppenisomorphismus*[4], falls es zu f eine Umkehrabbildung f^{-1} gibt, also eine Abbildung $f^{-1}\colon H \to G$ existiert, für die gilt:

$$f^{-1} \circ f(x) = x$$

für alle $x \in G$ und

$$f \circ f^{-1}(y) = y$$

für alle $y \in H$.

Beispiel 1.12. *Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Sei $n \in \mathbb{Z}$ fest. Dann ist die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto n \cdot x$ ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Dann ist $f(x + y) = n \cdot (x + y) = n \cdot x + n \cdot y = f(x) + f(y)$. Das mittlere Gleichheitszeichen ist gerade das Distributivitätsgesetz für $\mathbb{Z}$. □

Beispiel 1.13. *Wir betrachten die Drehgruppe C_3 eines regelmäßigen Dreiecks und die Drehgruppe C_6 eines regelmäßigen Sechsecks. Drehungen mit Drehwinkel α gegen den Uhrzeigersinn um die Mittelpunkte des Drei- bzw. Sechsecks bezeichnen wir mit D_α.*
Alle Drehungen aus C_3 lassen sich schreiben als $D_{x \cdot 120^\circ}$ mit $x \in \mathbb{Z}$, alle Drehungen aus C_6 als $D_{x \cdot 60^\circ}$ mit $x \in \mathbb{Z}$.
Dann ist die Abbildung $f\colon C_3 \to C_6$, $D_\alpha \mapsto D_\alpha$ ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. $f(D_\alpha \circ D_\beta) = f(D_{\beta+\alpha}) = D_{\beta+\alpha} = D_\alpha \circ D_\beta$, da die Winkel bei Hintereinanderschaltung von Drehungen addiert werden müssen (1. und 3. Gleichheitszeichen) und f gerade so definiert ist (2. Gleichheitszeichen).
Zeichnungen! □

Beispiel 1.14. $(G, \bullet)$ *Gruppe, H Untergruppe.*
Dann ist $f\colon H \to G$, $h \mapsto h$, ein Gruppenhomomorphismus. (Ob man die Elemente aus H als spezielle Elemente von G ansieht, macht für die Verknüpfung keinen Unterschied.)

[2]homos (altgriechisch) – gleichseiend
[3]morphé (altgriechisch) – Gestalt
[4]íso (altgriechisch) – gleich

Lemma 1.15. *(Eigenschaften von Gruppenhomomorphismen) Seien $(G, \bullet)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen, e das neutrale Element in G, e' das neutrale Element in H, y^{-1} das zu $y \in G$ bzw. $y \in H$ inverse Element in G bzw. H und $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:*

$$f(e) = e',$$
$$(f(x))^{-1} = f(x^{-1})$$

für alle $x \in G$.

Ist $f\colon G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist auch die Umkehrabbildung ein Gruppenisomorphismus.

Beweis.

$$\begin{aligned} e' &= (f(e))^{-1} * f(e) = (f(e))^{-1} * f(e \bullet e) = (f(e))^{-1} * (f(e) * f(e)) \\ &= ((f(e))^{-1} * f(e)) * f(e) = e' * f(e) = f(e). \end{aligned}$$

Die Gleichheitszeichen gelten, denn:

- $(f(e))^{-1}$ ist gerade das (Links-)Inverse zu $f(e)$,
- e ist neutral zu sich selbst,
- f ist ein Gruppenhomomorphismus,
- die Verknüpfung $*\colon H \times H \to H$ ist assoziativ,
- $(f(e))^{-1}$ ist das (Links-)Inverse zu $f(e)$ und
- e' ist (links-)neutral.

Für den zweiten Teil nutzen wir die in den Übungen zu zeigende/gezeigte Information aus, dass inverse Elemente zu vorgegebenen Elementen eindeutig bestimmt sind.
Es reicht also, für fest gewähltes $x \in G$ zu zeigen, dass $f(x^{-1})$ ein Element ist, was links und rechts verknüpft mit $f(x)$ das neutrale Element e' aus H ergibt. Denn dann muss schon $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, das inverse Element zu $f(x)$, sein.
[Wir rechnen das durch:]

$$f(x^{-1}) * f(x) = f(x^{-1} \bullet x) = f(e) = e',$$

denn: f ist Gruppenhomomorphismus, x^{-1} ist invers zu x in G, und nach Teil 1 wissen wir, dass $f(e) = e'$ gilt.
Auf der anderen Seite geht das analog.
Also ist $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Wir bezeichnen die Umkehrabbildung zu f mit f^{-1}. (Dann ist natürlich auch f die Umkehrabbildung zu f^{-1}.)

Wir müssen für den letzten Teil zeigen, dass gilt:

$$f^{-1}(y * z) = f^{-1}(y) \bullet f^{-1}(z)$$

für alle $y, z \in H$.
[Da wir nur Informationen über f, nicht jedoch über f^{-1} haben,] betrachten wir zunächst, was passiert, wenn wir auf der rechten Seite $f(-)$ anwenden:
Es gilt:

$$f(f^{-1}(y) \bullet f^{-1}(z)) = f(f^{-1}(y)) * f(f^{-1}(z)) = y * z$$

für alle $y, z \in H$, denn f ist Gruppenhomomorphismus und f Umkehrabbildung zu f^{-1}.
Wenden wir nun noch einmal $f^{-1}(-)$ auf die Gleichung (in umgekehrte Reihenfolge) an, so erhalten wir:

$$f^{-1}(y * z) = f^{-1}(f(f^{-1}(y) \bullet f^{-1}(z))) = f^{-1}(y) \bullet f^{-1}(z)$$

für alle $y, z \in H$.
Damit ist also auch f^{-1} ein Gruppenhomomorphismus (und sogar ein Gruppen*iso*morphismus, weil f ja die Umkehrabbildung zu f^{-1} ist, also f^{-1} zusätzlich auch eine Umkehrabbildung besitzt.) □

Einstieg: Wir wollen nun Gruppenhomomorphismen betrachten und schauen, ob es natürliche Untergruppen der beiden am Gruppenhomomorphismus beteiligten Gruppen gibt.

Definition 1.16. Seien $(G, \bullet)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen, e' das neutrale Element in H und $f \colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.
Dann betrachten wir die folgenden beiden Teilmengen von G bzw. H:

$$\text{Kern } f := \{x \in G \mid f(x) = e'\} \subseteq G$$

– das sind also alle Elemente, die unter f auf das neutrale Element aus H abgebildet werden –
und

$$\text{Bild } f := \{y \in H \mid \text{ es gibt ein } x \in G \text{ mit } f(x) = y\} \subseteq H$$

– das sind also alle Elemente, die mit Hilfe von f von Elementen aus G getroffen werden.

Beispiel 1.17. *Wir betrachten die Abbildung $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto n \cdot x$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ fest gewählt ist. Das neutrale Element aus $(\mathbb{Z}, +)$ ist 0.*
Falls $n \neq 0$ ist, so ist Kern $f = \{x \in \mathbb{Z} \mid n \cdot x = 0\} = \{0\}$, denn ist in den ganzen Zahlen ein Produkt 0, so ist mindestens einer der Faktoren 0. („Alternativ“ kann man natürlich beide Seiten der Gleichung durch $n (\neq 0)$ teilen und erhält die Gleichung $x = 0$.)
Falls $n = 0$ ist, so ist Kern $f = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \cdot x = 0\} = \mathbb{Z}$, denn $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. (Die definierende Gleichung liefert also keine Einschränkung.)
Falls $n \neq 0$ ist, so ist Bild $f = \{y \in \mathbb{Z} \mid \text{ es gibt ein } x \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \cdot x = y\} = n\mathbb{Z}$, also die Menge der ganzzahligen Vielfachen von n.
Falls $n = 0$ ist, so ist Bild $f = \{y \in \mathbb{Z} \mid \text{ es gibt ein } x \in \mathbb{Z} \text{ mit } 0 \cdot x = y\} = \{0\}$, denn $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$, also kann nur $y = 0$ diese Gleichung erfüllen.

Satz 1.18. *Seien Gruppen $(G, \bullet)$ und $(H, *)$ und ein Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ gegeben. Dann ist Kern f eine Untergruppe von G und Bild f eine Untergruppe von H.*

Beweis. Wir zeigen hier in der Vorlesung nur, dass Kern f eine Untergruppe von G ist; der zweite Teil ist Übungsaufgabe 1 auf Übungsblatt 3.
Wir müssen also nachprüfen, ob die Untergruppenbedingungen für Kern f gelten.
Sei e das neutrale Element von G und e' das neutrale Element von H.

(UG1) Wir haben bereits in Lemma 1.15 gesehen, dass $f(e) = e'$ ist. Also ist $e \in$Kern f.

(UG2) Seien $x, y \in$Kern f. Dann gilt also $f(x) = e'$ und $f(y) = e'$. Daraus folgt:

$$f(x \bullet y) = f(x) * f(y) = e' * e' = e'.$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt, weil f ein Gruppenhomomorphismus ist, das zweite, weil x und y im Kern liegen, und das letzte, weil e' neutrales Element von H ist.

Damit ist also auch $x \bullet y \in$Kern f.

(UG3) Sei $x \in$Kern f, also $f(x) = e'$. Dann ist:

$$f(x^{-1}) = f(x^{-1}) * e' = f(x^{-1}) * f(x) = f(x^{-1} \bullet x) = f(e) = e'.$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt, weil e' neutrales Element aus H ist, das zweite, weil x im Kern liegt, das dritte, weil f ein Gruppenhomomorphismus ist, das vierte, weil x^{-1} invers zu x ist, und das letzte haben wir schon in Lemma 1.15 gesehen.

Damit ist also mit jedem x, das im Kern von f liegt, auch das dazu Inverse $x^{-1} \in$Kern f.

$\square$

Definition 1.19. Wir nennen eine Abbildung $f : X \to Y$ *injektiv*, falls für alle $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ auch $f(x) \neq f(x')$ gilt. (Verschiedene Elemente sind als nach Anwendung der Abbildung immer noch verschieden.)

Lemma 1.20. *Sind $f : X \to Y$ und $g : y \to Z$ injektiv, so ist auch $g \circ f : X \to Z$ injektiv.*

Der Beweis geht genauso wie der aus Beispiel 1.6. (Wir haben dort gar nicht die genaue Form der Abbildungen, sondern nur deren Injektivität benutzt, auch wenn wir das damals noch nicht so genannt hatten.)

Injektive Gruppenhomomorphismen kann man wie folgt charakterisieren:

Satz 1.21. *Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen Gruppen $(G, \bullet)$ und $(H, *)$. Sei e das neutrale Element aus G. Dann ist f genau dann injektiv, wenn Kern $f = \{e\}$ ist.*

(Wir können also herausfinden, ob ein Gruppenhomomorphismus injektiv ist, indem wir einfach die Elemente im Kern zählen. Gibt es genau ein Element im Kern, so ist der Gruppenhomomorphismus injektiv, gibt es mehr als ein Element im Kern, so ist er es nicht.)

Beweis. Sei e' das neutrale Element von H. Wir wissen bereits nach Lemma 1.15, dass $f(e) = e'$ gilt, also $e \in$Kern f ist.

Ist Kern $f \neq \{e\}$. Dann gibt es also noch ein weiteres Element $x \in$Kern f mit $x \neq e$. Für das gilt (nach Definition des Kerns) auch $f(x) = e'$. Dann ist aber f nicht injektiv.[5]

Sei nun umgekehrt Kern $f = \{e\}$. Zu zeigen ist nun, dass f injektiv ist. Gegeben seien also Elemente $x, x' \in G$ mit der Eigenschaft $f(x) = f(x')$. (Wir müssen nun zeigen, dass dann auch $x = x'$ gilt.)
Da $f(x) = f(x')$ ist, gilt $e' = f(x) * (f(x))^{-1} = f(x') * (f(x))^{-1} = f(x' \bullet x^{-1})$.
Das erste Gleichheitszeichen gilt, weil $(f(x))^{-1}$ invers zu $f(x)$ ist, das zweite, weil wir vorausgesetzt hatten, dass $f(x) = f(x')$ sein sollte, und das dritte, weil f ein Gruppenhomomorphismus ist.
Damit ist aber $x' \bullet x^{-1} \in$Kern f. Da aber der Kern nur aus e besteht, muss $x' \bullet x^{-1} = e$ sein. $(*)$
Dann ist aber $x' = x' \bullet e = x' \bullet (x^{-1} \bullet x) = (x' \bullet x^{-1}) \bullet x = e \bullet x = x$.
Das erste Gleichheitszeichen gilt, da e neutrales Element aus G ist, das zweite, da x^{-1} invers zu x ist, das dritte, weil die Verknüpfung $\bullet$ von G als Gruppe assoziativ ist, das vierte nach $(*)$ und das fünfte wiederum, weil e neutral in G ist. □

Einstieg: Um solche Dinge zu beschreiben, wie die Lage eines Körpers im Raum, benötigen wir jedoch nicht nur Informationen über Abbildungen, die ihn in sich überführen, sondern auch über den Körper selbst. Um das mathematisch genauer zu fassen, betrachten wir so genannte Gruppenoperationen. (Gruppenoperationen kommen aber auch in anderen Zusammenhängen vor.)

Definition 1.22. Gegeben seien eine Gruppe $(G, \bullet)$ mit neutralem Element e und eine Menge M. Wir nennen eine Abbildung $\diamond\colon G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto g \diamond m$ eine *Gruppenoperation*, falls gilt:

(GO1) $(g \bullet h) \diamond m = g \diamond (h \diamond m)$ für alle $g, h \in G$ und alle $m \in M$, und

(GO2) $e \diamond m = m$ für alle $m \in M$.

Beispiel 1.23. *$G :=$ Drehgruppe des Würfels und $M :=$ Menge der Ecken des Würfels. [Zeichnungen!]*

Definition 1.24. Gegeben seien eine Gruppe $(G, \bullet)$ und eine Menge M sowie eine Gruppenoperation $\diamond\colon G \times M \to M$.

[5] Wir haben nun (mit Kontraposition) gezeigt: Ist f injektiv, so besteht der Kern f nur aus dem neutralen Element e von G.

- Wir nennen $m \in M$ einen *Fixpunkt von* $g \in G$, falls gilt: $g \diamond m = m$.
- Sei $m \in M$ fest. Der *Stabilisator von* m ist gegeben durch

  $$G_m := \{g \in G \mid g \diamond m = m\} \quad (\subseteq G).$$

  (Das sind also alle Elemente aus G, die das gegebene m festlassen.)

  Der Stabilisator ist eine Untergruppe von G.[6]
- Sei $m \in M$ fest. Wir nennen die Menge

  $$G \diamond m := \{g \diamond m \mid g \in G\} \quad (\subseteq M)$$

  die *Bahn von* m unter G (bzw. der Gruppenoperation $\diamond$).

  (Die Bahn von m enthält also alle Elemente aus M, die man mit Hilfe von Elementen aus G aus dem vorgegebenen m „erreichen" kann.)

Beispiel 1.25. *$G :=$ Drehungen der euklidischen Ebene um einen festen Punkt O, $M :=$ $euklidischeEbene$.*
Mit D_α bezeichnen wir die Drehung um O mit Drehwinkel α.
[Zeichnungen!]

- *Ist $m \in M$, so ist m Fixpunkt der Drehung D_{0°. Ist $m \in M$ mit $m \neq O$, so ist m kein Fixpunkt der Drehungen D_α, falls α kein ganzzahliges Vielfaches von 360° ist. $m = O$ ist ein Fixpunkt jeder Drehung.*
- *Ist $m = O$, so ist der Stabilisator von m die gesamte Drehgruppe. Ist $m \neq O$, so besteht der Stabilisator G_m genau aus den Drehungen D_α, für die α ein ganzzahliges Vielfaches von 360° ist.*
- *Ist $m = O$, so besteht die Bahn $G \diamond m$ nur aus dem Element O. Ist $m \neq O$, so besteht die Bahn genau aus denjenigen Elementen der euklidischen Ebene, die denselben eukidischen Abstand zum Punkt O haben wie der Punkt m.*

Einstieg (zum Fundamentallemma): Wir möchten die Anzahl der Elemente einer endlichen Gruppe bestimmen, aber das kann oft sehr kompliziert sein. Der folgende Satz hilft uns dabei, uns mit Hilfe von Gruppenoperationen auf den Stabilisator eines Elementes und seine Bahn zu beschränken, die evtl. einfacher zu bestimmen sind.

Satz 1.26 (Fundamentallemma)**.** *Sei G eine endliche Gruppe und $\diamond\colon G \times M \to M$ eine Gruppenoperation von G auf einer Menge M und $m \in M$. Dann gilt:*

$$|G| = |G \diamond m| \cdot |G_m|.$$

[6] Beweis: Übungsaufgabe!

(*Mit anderen Worten:* Die Gruppenordnung lässt sich als Produkt von „Bahnenlänge“ und der Stabilisatorordnung berechnen.)

Zunächst aber noch ein paar Eigenschaften von Stabilisatoren und Bahnen:

Lemma 1.27. *Sei $\diamond\colon G \times M \to M$ eine Gruppenoperation einer Gruppe $(G, \bullet)$ auf einer Menge M.*

- *Ist $g \in G$ und $m \in M$, so gilt:*

$$G_{g\diamond m} = \{g \bullet h \bullet g^{-1} \mid h \in G_m\}.$$

  (Man kann den Stabilisator eines Elementes, was in derselben Bahn wie m liegt, also ganz leicht aus dem Stabilisator von m berechnen, indem man das entsprechende g und sein Inverses g^{-1} den Elementen des ursprünglichen Stabilisators vor- und nachschaltet.)

- *Sind $m, m' \in M$, so gilt entweder $G \diamond m \cap G \diamond m' = \emptyset$ oder $G \diamond m = G \diamond m'$.*

  (Zwei Bahnen sind also entweder disjunkt oder gleich. Es kann nicht vorkommen, dass eine nicht-leere Bahn eine echte Teilmenge einer anderen Bahn ist.)

[Zeichnungen!]

Beweis. Übungsaufgabe 1 auf Übungsblatt 4. □

Nun zum Beweis des Fundamentallemmas:

Beweis von Satz 1.26 (Fundamentallemma).
[Die Idee dabei ist, zu einem vorgegebenen Element m den Stabilisator anders zu beschreiben und andere (disjunkte) Teilmengen von G zu finden, die die gleiche Anzahl von Elementen haben. Wenn wir von diesen Teilmengen nur endlich viele haben, die ganz G abdecken, und es insgesamt genau $|G \diamond m|$ Stück sind, dann sind wir fertig.]

Wir betrachten die Abbildung

$$F\colon G \to G \diamond m, \quad g \mapsto g \diamond m.$$

Natürlich werden alle Elemente auf der rechten Seite getroffen, denn jedes Element rechts lässt sich ja schreiben als ein $g \diamond m$ mit $g \in G$, damit ist dann aber natürlich g ein Element, das unter F auf $g \diamond m$ abgebildet wird, also $F(g) = g \diamond m$.

Wir betrachten nun für jedes Element $y \in G \diamond m$ sein *Urbild*

$$F^{-1}(y) := \{g \in G \mid F(g) = y\} = \{g \in G \mid g \diamond m = y\},$$

also diejenigen Elemente aus G, die unter F auf y abgebildet werden.

Eines der Urbilder kennen wir bereits:

$$F^{-1}(m) = \{g \in G \mid F(g) = m\} = \{g \in G \mid g \diamond m = m\} = G_m,$$

der Stabilisator von m.[7] Die Menge $F^{-1}(m) = G_m$ hat also $|G_m|$ Elemente.

Es gilt:

$$G = \dot{\bigcup_{y \in G \diamond m}} F^{-1}(y),$$

und jedes $F^{-1}(y)$ ist nicht leer, da – wie oben gezeigt – jedes $y \in G \diamond m$ von einem Element aus G getroffen wird. Alle Mengen $F^{-1}(y)$ sind für verschiedene y disjunkt, da sonst F keine Abbildung wäre. (Mindestens eines der Elemente $x \in G$ würde sonst auf zwei verschiedene(!) Elemente $y \neq z$ abgebildet.) Auch ist G in der Vereinigung aller $F^{-1}(y)$ enthalten, denn irgendwohin wird ja unter F jedes $g \in G$ abgebildet.

Wenn wir jetzt noch zeigen können, dass alle $F^{-1}(y)$ gleich viele Elemente haben, dann sind wir fertig, denn dann ist:

$$|G| = \sum_{y \in G \diamond m} |F^{-1}(y)| = \sum_{y \in G \diamond m} |F^{-1}(m)| = |G \diamond m| \cdot |F^{-1}(m)| = |G \diamond m| \cdot |G_m|.$$

Wir zeigen, dass jedes $F^{-1}(y)$ mit $y \in G \diamond m$ genauso viele Elemente hat wie $F^{-1}(m) = G_m$. Dazu geben wir für jedes Element $y \in G \diamond y$ eine Abbildung $f\colon F^{-1}(m) \to F^{-1}(y)$ an, die eine Umkehrabbildung besitzt. (Dann haben die beiden (endlichen) Mengen $F^{-1}(m)$ und $F^{-1}(y)$ gleich viele Elemente.)

Sei $y = g \diamond m$. Wir definieren:

$$f\colon F^{-1}(m) \to F^{-1}(y)$$

durch

$$h \mapsto g \bullet h.$$

Wir müssen zunächst zeigen, dass wir so überhaupt eine Abbildung erhalten, denn a priori ist nicht klar, dass wir mit dieser Vorschrift in der Menge $F^{-1}(y)$ landen:
Sei also $h \in G_m = F^{-1}(m)$. Dann gilt:

$$F(g \bullet h) = (g \bullet h) \diamond m = g \diamond (h \diamond m) = g \diamond m = y,$$

wobei das erste Gleichheitszeichen die Definition von F ist, das zweite folgt, weil $\diamond$ eine Gruppenoperation ist, das dritte, weil $h \in G_m$ ist, also m festlässt, und das letzte die Darstellung von y als Element in $G \diamond m$ ist. Es ist also $g \bullet h \in F^{-1}(y)$.

Die Umkehrabbildung f^{-1} zu f ist dann gegeben durch

$$f^{-1}\colon F^{-1}(y) \to F^{-1}(m), \quad h' \mapsto g^{-1} \bullet h'.$$

Wir müssen uns zunächst wieder davon überzeugen, dass das wirklich eine Abbildung liefert, wir also durch die Vorschrift überhaupt in $F^{-1}(m)$ landen:

[7] **Achtung!** Im Allgemeinen ist $F^{-1}(y)$ *nicht* der Stabilisator von y, denn hierfür müsste die Bedingung ja $g \diamond y = y$ (und nicht $g \diamond m = y$) lauten.

Sei also $h' \in F^{-1}(y)$. Dann gilt:

$$F(g^{-1} \bullet h') = (g^{-1} \bullet h') \diamond m = g^{-1} \diamond (h' \diamond m) = g^{-1} \diamond F(h') = g^{-1} \diamond y = g^{-1} \diamond (g \diamond m)$$

$$= (g^{-1} \bullet g) \diamond m = e \diamond m = m,$$

wobei e das neutrale Element aus G bezeichnet.
Die erste Gleichheit gilt nach Definition von F, die zweite, weil $\diamond$ eine Gruppenoperation ist, die dritte nach Definition von F, die vierte, da $h' \in F^{-1}(y)$ ist, die fünfte nach der Darstellung von y, die sechste, da $\diamond$ eine Gruppenoperation ist, die siebte, da g^{-1} invers ist zu g, und die achte, da e das neutrale Element von G ist und $\diamond$ eine Gruppenoperation.
Also ist $g^{-1} \bullet h' \in F^{-1}(m)$.

Dass das f^{-1} wirklich die Umkehrabbildung zu f liefert, sieht man ganz leicht, [denn wenn man zunächst g vorschaltet und dann g^{-1}, so hat man nichts getan, und wenn man zunächst g^{-1} vorschaltet und dann g, so hat man ebenfalls nichts getan]:

Ist $h \in F^{-1}(m)$, so ist

$$f^{-1} \circ f(h) = f^{-1}(f(h)) = g^{-1} \bullet (g \bullet h) = (g^{-1} \bullet g) \bullet h = e \bullet h = h,$$

und ist $h' \in F^{-1}(y)$, so ist

$$f \circ f^{-1}(h') = f(f^{-1}(h')) = g \bullet (g^{-1} \bullet h') = (g \bullet g^{-1}) \bullet h' = e \bullet h' = h',$$

wobei e das neutrale Element von G bezeichnet.
Die zweiten Gleichheitszeichen gelten aufgrund der Definition von f und f^{-1}, die dritten wegen der Assoziativität der Gruppenverknüpfung, die vierten, weil g^{-1} invers ist zu g, und die fünften, weil e das neutrale Element in G ist. $\square$

Beispiel 1.28. *Wir betrachten die Drehgruppe G eines Würfels und dessen Eckenmenge M als Menge. Die Drehgruppe D operiert auf der Eckenmenge M durch Anwendung der Drehungen, wir haben also eine Gruppenoperation $\diamond\colon G \times M \to M$, $(D, m) \mapsto D(m)$.*

Wir halten nun eine der Ecken fest, sagen wir die Ecke $m \in M$. Die Bahn $G \diamond m$ besteht dann aus allen Ecken in M, also $G \diamond m = M$, da es für jede Ecke $m' \in M$ eine Drehung des Würfels gibt, die die ursprünglich gewählte Ecke m auf m' abbildet.

Der Stabilisator G_m der Ecke m besteht aus allen Drehungen, die die Ecke m und die gegenüberliegende Ecke festlassen, also aus allen Drehungen um die Achse durch m und die gegenüberliegende Ecke, die den Würfel in sich überführen. Davon gibt es genau drei Stück: Die drei Nachbarecken von m können gedreht werden, aber mehr nicht.

Also erhalten wir $|G| = |G \diamond m| \cdot |G_m| = |M| \cdot |G_m| = 8 \cdot 3 = 24$. Es gibt also 24 Drehungen, die den Würfel in sich überführen.

Entsprechend geht das auch mit den Seitenflächen des Würfels:

Wir betrachten nun die Seitenmenge S als Menge. Die Drehgruppe D operiert auf der Seitenmenge S durch Anwendung der Drehungen, wir haben also eine Gruppenoperation $*\colon G \times S \to S$, $(D, s) \mapsto D(s)$.

Wir halten nun eine der Seiten fest, sagen wir die Seite $s \in S$. Die Bahn $G * s$ besteht dann aus allen Seiten in S, also $G * s = S$, da es für jede Seite $s' \in S$ eine Drehung des Würfels gibt, die die ursprünglich gewählte Seite s auf s' abbildet.

Der Stabilisator G_s der Seite s besteht aus allen Drehungen, die die Seite s und die gegenüberliegende Seite festlassen, also aus allen Drehungen um die Achse durch den Mittelpunkt von s und den Mittelpunkt der gegenüberliegende Seite, die den Würfel in sich überführen. Davon gibt es genau vier Stück: Die vier Ecken der Seite s können gedreht werden, aber mehr nicht.

Also erhalten wir $|G| = |G * s| \cdot |G_s| = |S| \cdot |G_s| = 6 \cdot 4 = 24$.

Entsprechend geht das auch mit den Kanten des Würfels:

Wir betrachten nun die Kantenmenge K als Menge. Die Drehgruppe D operiert auf der Kantenmenge K durch Anwendung der Drehungen, wir haben also eine Gruppenoperation $\star\colon G \times K \to K$, $(D, k) \mapsto D(k)$.

Wir halten nun eine der Kanten fest, sagen wir die Kante $k \in K$. Die Bahn $G \star k$ besteht dann aus allen Kanten in K, also $G \star k = K$, da es für jede Kante $k' \in K$ eine Drehung des Würfels gibt, die die ursprünglich gewählte Kante k auf k' abbildet.

Der Stabilisator G_k der Kante k besteht aus allen Drehungen, die die Kante k und die gegenüberliegende Kante festlassen, also aus allen Drehungen um die Achse durch den Mittelpunkt von k und den Mittelpunkt der gegenüberliegende Kante, die den Würfel in sich überführen. Davon gibt es genau zwei Stück: einmal die Identität und einmal die Drehung um $180°$, die die Orientierung der beiden Kanten umdreht.

Also erhalten wir $|G| = |G \star k| \cdot |G_k| = |K| \cdot |G_k| = 12 \cdot 2 = 24$.

Eine Folgerung aus dem Fundamentallemma ist der folgende Satz:

Satz 1.29 (Satz von Lagrange)**.** *Sei $(G, \bullet)$ eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$.*

Beweis. Mit e bezeichnen wir das neutrale Element von G.

Wir betrachten folgende Abbildung:

$$\bullet\colon H \times G \to G, \quad (h, g) \mapsto h \bullet g.$$

Diese liefert eine Gruppenoperation, denn:

$$(h \bullet h') \bullet g = h \bullet (h' \bullet g)$$

für alle $h, h' \in H \subseteq G$ und alle $g \in G$, da die Verknüpfung von G assoziativ ist, und

$$e \bullet g = g$$

für alle $g \in G$, da e das neutrale Element von G ist.

Mit dem Fundamentallemma für die Gruppe H und die Menge G erhalten wir:

$$|H| = |H \bullet g| \cdot |H_g|.$$

Nun ist aber $H_g = \{e\}$ für alle $g \in G$, denn ist $h \in H_g$, so ist

$$h = h \bullet e = h \bullet (g \bullet g^{-1}) = (h \bullet g) \bullet g^{-1} = g \bullet g^{-1} = e.$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt, da e das neutrale Element in G ist, das zweite und das letzte, da g^{-1} invers zu g ist, das dritte, weil die Verknüpfung $\bullet$ assoziativ ist, und das vierte, weil $h \in H_g$ ist.

Damit erhalten wir also

$$|H| = |H \bullet g|$$

für alle $g \in G$.

Da aber

$$G = \bigcup_{g \in G} H \bullet g = \dot{\bigcup_{g \in I}} H \bullet g$$

mit einer Teilmenge $I \subseteq G$ ist[8], folgt:

$$|G| = \sum_{g \in I} |H \bullet g| = \sum_{g \in I} |H| = |I| \cdot |H|.$$

Damit ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$. □

Beispiel 1.30. *Die Drehgruppe C_3 eines regelmäßigen Dreiecks ist Untergruppe der Drehgruppe C_6 eines regelmäßigen Sechsecks, und es gilt:*

$$|C_6| = 6 = 2 \cdot 3 = 2 \cdot |C_3|.$$

Beispiel 1.31 (Warnung!!). ***Die Umkehrung gilt nicht!***

Ein einfaches Beispiel dafür ist etwa Folgendes:

Die Menge, die aus der Drehung um 120° gegen den Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt eines regelmäßigen Dreiecks besteht, ist eine einelementige Teilmenge der (dreielementigen) Drehgruppe des Dreiecks, aber keine *Untergruppe, obwohl 1 ein Teiler von 3 ist.)*

[8] Wir wählen hier für jede Bahn nur einen Repräsentanten aus, da wir bereits aus Übungsaufgabe 1 auf dem Übungsblatt 4 wissen, dass Bahnen entweder gleich oder disjunkt sind

2 (Erinnerung:) Grundlagen der euklidischen Geometrie

Einstieg: Wir wollen uns Dingen im dreidimensional Raum beschäftigen, brauchen dazu aber zunächst eine Beschreibung der Punkte dieses Raumes. Wir formulieren die ersten Definitionen und Sätze ganz allgemein, die Spezialfälle der euklidischen Ebene und des dreidimensionalen euklidischen Raumes kann man mit $n = 2$ bzw. $n = 3$ sofort daraus ableiten.

Definition 2.1. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir definieren

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir eine Addition $\oplus$ durch

$$\begin{aligned} \oplus\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Wir bilden also einfach die komponentenweise Addition in den reellen Zahlen.)

[Zeichnung zur Anschauung für den Fall $n = 2$:
Die Summe zweier Elemente aus $\mathbb{R}^2$ ergibt sich durch „Parallelogrammbildung".]

Wir definieren weiterhin eine Skalarmultiplikation $\bullet$ auf Paaren von Elementen aus $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} \bullet\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \left(a, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) &\mapsto \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ \vdots \\ a \cdot x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Wir multiplizieren also einfach jeden Eintrag x_i, $i = 1, \ldots, n$, mit dem festen a in den reellen Zahlen.)

[Zeichnung zur Anschauung für den Fall $n = 2$:
Die skalare Multiplikation von einer reellen Zahl a mit Elementen aus $\mathbb{R}^2$ macht Folgendes:
$0 \leq a < 1$: Beibehaltung der Pfeilrichtung, Stauchung der Pfeillänge;
$1 < a$: Beibehaltung der Pfeilrichtung, Streckung der Pfeillänge;
$-1 < a < 0$: Umkehrung der Pfeilrichtung, Stauchung der Pfeillänge;
$a < -1$: Umkehrung der Pfeilrichtung, Streckung der Pfeillänge;
$a = 1$: Beibehaltung der Richtung, Beibehaltung der Pfeillänge;
$a = -1$: Umkehrung der Richtung, Beibehaltung der Pfeillänge]

Definition 2.2 (Euklidischer Abstand)**.** Der *euklidische Abstand* für $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Bemerkung 2.3. *Dieses liefert wirklich einen* Abstand*, d. h., es gilt:*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*,*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

(das beides nennt man auch „Definitheit")

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d((\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *(„Symmetrie") und*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *(„Dreiecksungleichung").*

Definition 2.4 (Euklidische Norm)**.** Die *euklidische Norm* für $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\| - \| \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Bemerkung 2.5. *Dieses liefert wirklich eine* Norm*, d. h., es gilt:*

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\|a \bullet \mathbf{x}\| = |a| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ *und alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *und*

$$\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*.*

(siehe Aufgabe 2, Übungsblatt 6).

Bemerkung 2.6 (Zusammenhang zwischen Abstand und Norm)**.** *Der euklidische Abstand zwischen zwei Punkten im* $\mathbb{R}^n$ *ist die Norm der Differenz der beiden Punkte:*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*.*

Die euklidische Norm eines Punktes im $\mathbb{R}^n$ *ist der euklidische Abstand zwischen dem Punkt und dem Nullpunkt* $\mathbf{0}$*:*

$$\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*.*

Definition 2.7 (Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$)**.** Das *Skalarprodukt* für den $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\langle -, - \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_1 + \ldots x_n y_n.$$

Bemerkung 2.8 (Zusammenhang zwischen Norm und Skalarprodukt)**.** *Die Norm eines Punktes im* $\mathbb{R}^n$ *ist die Wurzel des Skalarproduktes des Punktes mit sich selbst:*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*.*

Folgende Ungleichung ist nützlich, um die Dreiecksungleichung zu beweisen, und liefert auch die Grundlage für die Definition von (euklidischen) Winkeln.

Lemma 2.9 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Sind* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*, so ist*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Beweis. Wir schreiben $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Falls $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ist[9], so ist

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 \cdot 0 + \ldots x_n \cdot 0 = 0,$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \leq 0 = \|\mathbf{x}\| \cdot 0 = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

aufgrund der Definitheit der Norm.
Es folgt:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = |0| \leq |0| = |\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|| = |\|\mathbf{x}\|| \cdot |\|\mathbf{y}\|| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|,$$

[9] Das ist genau dann der Fall, wenn $\|\mathbf{y}\| = 0$ ist.

da $\|\mathbf{z}\| \geq 0$ für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, und damit $|\|\mathbf{z}\|| = \|\mathbf{z}\|$ für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.
(Ist $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, so ist $\|\mathbf{z}\| = z_1^2 + \ldots + z_n^2 \geq 0$ – als Summe von Quadraten, also als Summe nicht-negativer Zahlen.)
Sonst[10] berechnen wir:

$$\langle r \cdot \mathbf{x} + s \cdot \mathbf{y}, r \cdot \mathbf{x} + s \cdot \mathbf{y} \rangle \geq 0$$

für $r, s \in \mathbb{R}$.
Eine kleine Rechnung ergibt:

$$\langle r \cdot \mathbf{x} + s \cdot \mathbf{y}, r \cdot \mathbf{x} + s \cdot \mathbf{y} \rangle = r^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2rs \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + s^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle.$$

Nun setzen wir $r := \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ und $s := -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ und erhalten

$$0 \leq \langle r \cdot \mathbf{x} + s \cdot \mathbf{y}, r \cdot \mathbf{x} + s \cdot \mathbf{y} \rangle = r^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2rs \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + s^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

$$= (\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle)^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2 + (-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = (\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle)^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2$$
$$= \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \cdot \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2 \right).$$

Wenn $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ist, ist auch $r = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = y_1^2 + \ldots + y_n^2 \neq 0$, sogar $r = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle > 0$, und wir können die Ungleichung mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} > 0$ multiplizieren, ohne dass sich die Ordnung ($\leq$) umkehrt.
Wir haben also

$$0 \leq \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2,$$

und daher

$$(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2 \leq \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Daraus ergibt sich:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \sqrt{(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2} \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|,$$

also die behauptete Ungleichung. □

Definition 2.10 (Winkel im $\mathbb{R}^n$)**.** Der *(euklidische) Winkel* zwischen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{y}$ ist gegeben durch

$$\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \arccos \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

Bemerkung 2.11. *Die Definition ist sinnvoll, weil nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung der Quotient* $\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$ *nur Werte im Intervall* $[-1, 1]$ *annimmt, man also den Arkuskosinus davon bilden kann, und der Nenner* $\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ *aufgrund der Definitheit der Norm nur dann Null wird, wenn schon* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *oder* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *ist.*

[10] falls also $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ist, was genau dann der Fall ist, wenn $\|\mathbf{y}\| > 0$ ist