Übungsblatt 7

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Gegeben seien drei verschiedene Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$, die nicht auf einer Geraden liegen. Mit $\overrightarrow{QP}$ bezeichnen wir den Strahl, der in Q startet und durch P geht, also

$$\overrightarrow{QP} := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid X = Q, \quad X = P, \quad X \text{ zwischen } P \text{ und } Q \quad \text{oder} \quad P \text{ zwischen } Q \text{ und } X\}$$

Mit $\angle PQR$ bezeichnen die Vereinigung von $\overrightarrow{QP}$ und $\overrightarrow{QR}$.

Zeigen Sie, dass $\angle PQR = \angle RQP$ ist!

Mit $\sphericalangle PQR$ bezeichnen wir das Winkelmaß des Winkels $\angle PQR$, das wie folgt gegeben ist:

$$\sphericalangle PQR := \arccos \frac{\langle P - Q, R - Q \rangle}{\|P - Q\| \cdot \|R - Q\|}.$$

Zeigen Sie:

Ist $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so ist

$$\sphericalangle PQR = \sphericalangle(P, R),$$

wobei $\sphericalangle(P, R)$ wie in Definition 2.10 der Vorlesung gegeben ist.

Berechnen Sie folgende Winkelmaße:

$$\sphericalangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sphericalangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Für feste $a, b, c \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $L_{a,b,c}$ folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:

$$L_{a,b,c} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \right\}.$$

Zeichnen Sie die Punkte von $L_{2,0,6}$ in ein Koordinatensystem für $\mathbb{R}^2$ ein!

Zeigen Sie, dass $L_{2,0,6} = L_{1,0,3} = L_{-3,0,-9} \neq L_{3,0,1}$ ist!

Zeichnen Sie die Punkte von $L_{0,2,6}$ in ein Koordinatensystem für $\mathbb{R}^2$ ein!

Zeigen Sie, dass $L_{0,2,6} = L_{0,1,3}$ ist!

Berechnen Sie, was $L_{0,0,0}$ und $L_{0,0,4}$ ist!

(Bitte wenden!)

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Gegeben seien die drei Punkte

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } R := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie die drei eindeutig bestimmten Geraden, die durch je zwei der Punkte gehen!

Stellen Sie diese in der Form $L_{a,b,c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ (wie in Aufgabe 2 definiert) dar!

Ist die Wahl der a, b, c für jede der drei Geraden eindeutig?