

## ÜBUNGSBLATT 6

### Aufgabe 1. (4 Punkte)

Gegeben sei die Drehgruppe  $C_4$  eines Quadrates.

Zeigen Sie, dass die beiden Drehungen des Quadrates um seinen Mittelpunkt mit Drehwinkeln  $0^\circ$  und  $180^\circ$  eine Untergruppe  $C_2$  der Drehgruppe  $C_4$  bilden!

Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift für die „zugehörige“ Gruppenoperation<sup>1</sup> der Gruppe  $C_2$  auf der Menge  $C_4$ .

Bestimmen Sie die Bahnen und Stabilisatoren der Gruppenoperation!

### Aufgabe 2. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der euklidische Abstand

$$\| - \| : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

eine *Norm* liefert, dass also gilt:

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\|a \bullet \mathbf{x}\| = |a| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

für alle  $a \in \mathbb{R}$  und alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  und

$$\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ .

### Aufgabe 3. (4 Punkte)

Berechnen Sie (**ohne** Taschenrechner!):

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|, \quad \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|, \quad \left\langle \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \right\rangle$$

$$\left\langle \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \right\rangle, \quad \triangleleft \left( \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \right), \quad \triangleleft \left( \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \right).$$

<sup>1</sup>s. Beweis des Satzes von Lagrange