Vorlesung „Ausgewählte Kapitel der Geometrie“

– Leitfaden –

1 Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen bilden die Grundlage für die Geometrie, so dass wir hier noch einmal kurz ihre Entstehungsweise und die wichtigsten Eigenschaften zusammenfassen.

- die *natürlichen Zahlen*:
$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$
- Nehmen wir die Null hinzu, so erhalten wir
$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$
- Nehmen wir die negativen Zahlen hinzu, so erhalten wir die *ganzen Zahlen*:
$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$
- Nehmen wir Brüche hinzu, so erhalten wir die *rationalen Zahlen*:
$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}.$$
- „Vervollständigen“ wir die rationalen Zahlen (s.u.), so erhalten wir die *reellen Zahlen*:
$$\mathbb{R}$$

Informell stellt man sich die reellen Zahlen als Zahl mit möglicherweise unendlich vielen Nachkommastellen vor.

Satz 1.1. *Die reellen Zahlen bilden zusammen mit der gewöhnlichen Addition* $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$ *und der gewöhnlichen Multiplikation* $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ *sowie der* 0 *als additiv neutralem Element und der* 1 *als multiplikativ neutralem Element einen Körper.*

Bemerkung 1.2.
- *Es gibt eine geometrische Anschauung für die reellen Zahlen: Die reellen Zahlen entsprechen Punkten auf einer Zahlengeraden. Das Element* $0 \in R$ *entspricht einem ausgezeichneten Punkt auf der Geraden und trennt die Seite mit den negativen Zahlen von der Seite mit den positiven Zahlen. Jeder Punkt auf der Geraden entspricht damit einer Zahl, die den gerichteten Abstand zum Nullpunkt angibt.*

- *Die algebraischen Operationen Addition und Multiplikation haben eine geometrische Bedeutung:*
  - *Die Addition einer Zahl r entspricht dem Verschieben um den gerichteten Abstand r.*
  - *Die Multiplikation mit einer Zahl r entspricht (in Abhängigkeit vom r) einer Stauchung oder Streckung oder einer Spiegelung am Nullpunkt oder einer Kombination davon.*

Die geometrische Anschauung finden wir in den folgenden Axiomen der reellen Zahlen wieder:

Anordnungsaxiome

- Für jedes Element $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Bedingungen: $x < 0$, $x = 0$ oder $x > 0$.
- Sind $x > 0$ und $y > 0$, so ist auch $x + y > 0$.
- Sind $x > 0$ und $y > 0$, so ist auch $x \cdot y > 0$.

Definition 1.3. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $x < y$, falls $y - x > 0$ ist, und $x \leq y$, falls $y - x > 0$ oder $y - x = 0$ ist.

Ein weiteres Axiom, das wir brauchen werden, ist das folgende:

Archimedisches Axiom

Für jede reelle Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n mit $x < n$.

Daraus folgt:

Folgerung 1.4. *Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Im Verlauf der Übungsaufgabe ist insbesondere zu zeigen:

Lemma 1.5.
- *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $x > 0$ genau dann, wenn $\frac{1}{x} > 0$ ist.*
- *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y > 0$. Dann ist $x < y$ genau dann, wenn $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ ist.*

Definition 1.6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann definieren wir:

- das *abgeschlossene Intervall* $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- das *offene Intervall* $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

- $]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Darüber hinaus lassen wir als Grenzen auch $-\infty$ und ∞ zu und definieren:

- $]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- $]-\infty,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $[a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- $]a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $]-\infty,\infty[:= \mathbb{R}$

Zwei wichtige Eigenschaften der reellen Zahlen werden wir im Folgenden benötigen:

Satz 1.7 (Vollständigkeit der reellen Zahlen)**.** *Ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$, … gegeben mit*

$$[a_1,b_1] \underset{\neq}{\supseteq} [a_2,b_2] \underset{\neq}{\supseteq} [a_3,b_3] \underset{\neq}{\supseteq} \ldots,$$

so gibt es eine reelle Zahl x mit $x \in [a_n,b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1.8.
- *Gegeben sei die Folge der Intervalle $[a_n,b_n] := \left[0,\frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $0 \in [a_n,b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $0 \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[0,\frac{1}{n}\right]$.*
- *Wichtig ist jedoch, dass die Intervalle abgeschlossen sein müssen. Nimmt man nämlich beispielsweise die Folge der offenen Intervalle $\left]0,\frac{1}{n}\right[$, so ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left]0,\frac{1}{n}\right[= \emptyset$.*

  Beweis. [1]

  Da alle Elemente in den Intervallen $\left]0,\frac{1}{n}\right[$ positiv sind, kann ein Element x, das in allen Intervallen liegt, auch nur positiv sein.

  Angenommen, wir hätten so ein $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]0,\frac{1}{n}\right[$. Dann wäre auch $\frac{1}{x} > 0$ (nach Lemma 1.5) und $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$, und daher gäbe es nach der Folgerung zum Archimedischen Axiom ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{x} < m$ ist. Dann wäre aber (wiederum nach Lemma 1.5) $\frac{1}{m} < x$, und somit $x \notin \left]0,\frac{1}{m}\right[$. **Widerspruch!** □

Satz 1.9 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Ist $x_1,x_2,x_3,\ldots$ eine Folge reeller Zahlen mit $x_n \in [a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gibt es eine Teilfolge $x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},\ldots$ (also Indizes $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$) und eine Zahl $x \in [a,b]$, so dass der Abstand der Folgenglieder x_{i_n} zu dem x „beliebig klein“ wird.*[2]

[1] Sofort sehen wir, dass $0 \notin \left]0,\frac{1}{n}\right[$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Unser Kandidat von oben (wie bei den abgeschlossenen Intervallen) kommt also schon mal nicht infrage.)

[2] Für diejenigen, die Analysis gehört haben: „Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen Häufungspunkt.“ Oder auch: „Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.“

Beispiel 1.10. *Wir betrachten die Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, die durch*

$$x_n := \begin{cases} 7, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

gegeben ist.

Beispielsweise können wir die Teilfolge betrachten, die aus den Folgengliedern mit ungeraden Indizes besteht, also $x_1 = 7$, $x_3 = 7$, $x_5 = 7$, ... In diesem Fall könnten wir $x := 7$ wählen, und der Abstand der Teilfolgenglieder zu $x = 7$ ist immer 0.

Oder die Teilfolge, die aus den Folgengliedern mit geraden Indizes besteht, also $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{4}$, $x_6 = \frac{1}{6}$, ... In diesem Fall könnten wir $x := 0$ wählen, und der Abstand der Teilfolgenglieder zu $x = 0$ würde beliebig klein (weil die Teilfolge nach unten durch 0 beschränkt ist und es nach der Folgerung aus dem Archimedischen Axiom zu jedem vorgegebenen Abstand $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ist).

Oder eine andere „schöne“ Teilfolge...

2 Die Euklidische Ebene: Punkte, Geraden und Abstände

Die zugrundeliegende Menge für die Euklidische Ebene bezeichnen wir mit $\mathcal{E}$. Elemente aus $\mathcal{E}$ nennen wir *Punkte*. Weiterhin sei eine Familie $\mathcal{L}$ von Teilmengen von $\mathcal{E}$ gegeben, deren Elemente wir *Geraden* nennen.

Wir fordern nun, dass dieses System folgende Eigenschaften hat:

Inzidenzaxiome

- Es gibt in $\mathcal{E}$ drei Punkte, die nicht alle auf ein- und derselben Geraden liegen.
- Sind $P, Q \in \mathcal{E}$ verschieden, so gibt es genau eine Gerade $L \in \mathcal{L}$ mit $P, Q \in L$. Diese eindeutig bestimmte Gerade bezeichnen wir mit $\overleftrightarrow{PQ}$.

Wir „kennen“ ein Beispiel für eine Euklidische Ebene:

Beispiel 2.1.

$$\mathcal{E} := \mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{L} := \{L_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 \neq 0\},$$

wobei $L_{a,b,c} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$.

Bemerkung 2.2.

- *Es kann vorkommen, dass unterschiedliche Parameter a, b, c dieselbe Gerade beschreiben. Beispielsweise ist $L_{1,1,0} = L_{2,2,0}$.*

- *Durch die Gleichung $ax + by + c = 0$ wird wirklich eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ beschrieben:*

  Falls $b \neq 0$ ist, so können wir nach y auflösen und erhalten:

  $$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

  also eine typische Geradengleichung. (Zwei Geraden $L_{a,b,c}$ und $L_{a',b',c'}$ mit $b \neq 0$ und $b' \neq 0$ stimmen also genau dann überein, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b}$ ist.[3])

  Falls $b = 0$ ist (in diesem Fall muss $a \neq 0$ sein), so ist y beliebig, aber

  $$x = -\frac{c}{a}.$$

  Hier wird also die Gerade beschrieben, die parallel zur y-Achse verläuft und Abstand $-\frac{c}{a}$ davon hat. (In diesem Fall stimmen zwei Geraden $L_{a,0,c}$ und $L_{a',0,c'}$ genau dann überein, wenn $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$ ist.)

  Ist $b = 0$ und $b' \neq 0$, so können die beiden Geraden $L_{a,b,c}$ und $L_{a',b',c'}$ nicht gleich sein, denn im ersten Fall ist der x-Wert fest und der y-Wert beliebig, und im zweiten Fall ist der x-Wert variabel, und wir können zu jedem x-Wert einen y-Wert bestimmen.

Satz 2.3. *Sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{L}$ wie im Beispiel 2.1, so sind die beiden Inzidenzaxiome erfüllt.*

Beweis. 1. Inzidenzaxiom: Wir betrachten die Punkte $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Diese liegen nicht auf einer Geraden.
Angenommen, es gibt $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, so dass $(0,0), (1,0), (0,1) \in L_{a,b,c}$ gilt. Dann gilt:

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0,$$

$$a \cdot 1 + b \cdot 0 + c = 0$$

und

$$a \cdot 0 + b \cdot 1 + c = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $c = 0$ sein muss, aus der zweiten Gleichung dann, dass $a = 0$ sein muss, und aus der dritten Gleichung, dass $b = 0$ sein muss. Damit wäre aber $a^2 + b^2 = 0^2 + 0^2 = 0$. **Widerspruch!**

2. Inzidenzaxiom:
Wir müssen zeigen, dass es zu zwei verschiedenen Punkten $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ genau eine Gerade $L_{a,b,c}$ gibt, die die beiden Punkte enthält.

Zunächst zeigen wir, dass es *mindestens* eine solche Gerade $L_{a,b,c}$ gibt:

Wir setzen $a := -(y_2 - y_1)$, $b := x_2 - x_1$ und $c := -(x_2 y_1 - x_1 y_2)$. (Insbesondere ist damit immer $a^2 + b^2 \neq 0$, denn es ist nicht gleichzeitig $y_1 = y_2$ und $x_1 = x_2$. Sonst wären ja die beiden Punkte P und Q gleich.)

[3] Einsetzen von 0 und 1 in die Gleichung liefert, dass die beiden Verhältnisse $\frac{c}{b}$ und $\frac{a}{b}$ eindeutig bestimmt sind.

Es gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c &= -(y_2 - y_1) \cdot x_1 + (x_2 - x_1) \cdot y_1 - (x_2 y_1 - x_1 y_2) \\ &= -y_2 x_1 + y_1 x_1 + x_2 y_1 - x_1 y_1 - x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0. \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c &= -(y_2 - y_1) \cdot x_2 + (x_2 - x_1) \cdot y_2 - (x_2 y_1 - x_1 y_2) \\ &= -y_2 x_2 + y_1 x_2 + x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0. \end{aligned}$$

Damit liegen die beiden Punkte P und Q auf der Geraden, die durch (a, b, c) bestimmt ist.

Nun zeigen wir, dass es *höchstens* eine Gerade gibt, die P und Q enthält:

Angenommen, wir haben irgendwelche $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $P \in L_{a,b,c}$ und $Q \in L_{a,b,c}$.
Dann gilt:

$$a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c = 0$$

und

$$a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c = 0.$$

Daraus folgt insbesondere:

$$ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2,$$

und damit:

$$a(x_1 - x_2) = b(y_2 - y_1).$$

Fall 1: $x_1 = x_2$.
Dann ist $0 = b(y_2 - y_2)$. Da aber hier, weil $x_1 = x_2$ ist, $y_1 \neq y_2$ sein muss, folgt: $b = 0$.
Dann ist a beliebig, aber $a \neq 0$, und c lässt sich daraus berechnen als $c = -a \cdot x_1$. Das Verhältnis $\frac{c}{a} = -x_1$ ist also eindeutig bestimmt und damit auch die Gerade.

Fall 2: $x_1 \neq x_2$.
Dann ist b beliebig und

$$a = b \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}.$$

Insbesondere muss $b \neq 0$ sein, da sonst gleichzeitig $a = 0$ wäre.
Wir erhalten, dass

$$\frac{a}{b} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

ist.
Weiterhin können wir damit c berechnen, denn es muss gelten:

$$0 = ax_1 + by_1 + c = b \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \cdot x_1 + by_1 + c$$

$$= b \cdot \frac{y_2 x_1 - y_1 x_1 + x_1 y_1 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} + c = b \cdot \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} + c.$$

Daraus folgt:
$$c = -b \cdot \frac{y_2x_1 - x_2y_1}{x_1 - x_2},$$
also:
$$\frac{c}{b} = \frac{y_2x_1 - x_2y_1}{x_2 - x_1}.$$
Die Verhältnisse $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{b}$ sind also hier eindeutig bestimmt und somit auch die Gerade. $\square$

Um Abstände berechnen zu können, müssen wir zunächst die Punkte auf Geraden genauer beschreiben.
Geraden kann man sich Vorstellen als einen Zahlenstrahl von reellen Zahlen. Wir benötigen also eine Art „Identifikation“ der Punkte auf einer Geraden mit Elementen der reellen Zahlen.

Erinnerung 2.4. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen zwei Mengen M und N heißt *bijektiv*, wenn es eine Abbildung $g\colon N \to M$ gibt mit
$$(g \circ f)(m) = m \text{ für alle } m \in M$$
und
$$(f \circ g)(n) = n \text{ für alle } n \in N.$$
Die Abbildung g ist dann eindeutig bestimmt und heißt *Umkehrabbildung* zu f.

Definition 2.5. Sei wieder eine Menge $\mathcal{E}$ mit einer Familie $\mathcal{L}$ von Geraden gegeben und $L \in \mathcal{L}$. Wir nennen eine bijektive Abbildung $f\colon L \to \mathbb{R}$ ein *Koordinatensystem* für L.

Wir führen folgendes Axiom ein:

Messlattenaxiom

Jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ hat (mindestens) ein Koordinatensystem.

Wir können den Abstand zwei reeller Zahlen über die Betragsfunktion definieren:

Definition 2.6. Die *Betragsfunktion* $|-|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch
$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Der *Abstand* zweier reeller Zahlen x und y ist gegeben durch den Betrag der Differenz: $|x - y|$.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Inzidenzaxiome und das Messlattenaxiom für $\mathcal{E}$ und die zugehörige Familie $\mathcal{L}$ gelten. Weiterhin wählen wir für jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ ein *festes* Koordinatensystem $f_L : L \to \mathbb{R}$.

Definition 2.7. Die *Abstandsfunktion* $d\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ ist für zwei beliebige Punkte $P, Q \in \mathcal{E}$ definiert durch

$$d(P, Q) := |f_{\overleftrightarrow{PQ}}(P) - f_{\overleftrightarrow{PQ}}(Q)|.$$

Satz 2.8. *Die so definierte Abstandsfunktion d hat folgende Eigenschaften:*

$$d(P, Q) \geq 0 \text{ für alle } P, Q \in \mathcal{E},$$

$$d(P, Q) = 0 \text{ genau dann, wenn } P = Q,$$

$$d(P, Q) = d(Q, P) \text{ für alle } P, Q \in \mathcal{E}$$

und

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q) \text{ für alle } P, Q, R \in \mathcal{E} \text{ mit } R \in L_{\overleftrightarrow{PQ}}.$$

Beweis. Das folgt aus den Eigenschaften der Betragsfunktion $|-|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und daraus, dass $f_{\overleftrightarrow{PQ}}$ bijektiv ist.[4] □

Der Zusammenhang der Abstandsfunktion d zum Abstandsbegriff, wie wir ihn im $\mathbb{R}^2$ haben, ist wie folgt:

Erinnerung 2.9. Sind $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ in $\mathbb{R}^2$ gegeben, so ist der euklidische Abstand $d_{\mathbb{R}^2}(P, Q)$ zwischen P und Q gegeben durch

$$d_{\mathbb{R}^2}(P, Q) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Satz 2.10. *Seien* $\mathcal{E} := \mathbb{R}^2$ *und* $\mathcal{L} := \{L_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0\}$, *wobei*

$$L_{a,b,c} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$$

ist.
Es gibt zu jeder Geraden $L \in \mathcal{L}$ *ein Koordinatensystem* $f_L\colon L \to \mathbb{R}$, *so dass für den durch* f_L *definierten Abstand d gilt:*

$$d(P, Q) = d_{\mathbb{R}^2}(P, Q).$$

Beweis. Ist $L := L_{a,b,c}$ gegeben, so definieren wir das Koordinatensystem durch

$$f_L\colon L \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto y,$$

falls $b = 0$ ist, und

$$f_L\colon L \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2},$$

falls $b \neq 0$ ist.[5] □

[4] Die genauen Ausführungen dazu sind eine Übungsaufgabe.
[5] Das genaue Durchrechnen ist eine Übungsaufgabe.

3 Isometrien in der euklidischen Ebene

Wir betrachten wieder unser Modell $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ mit $\mathcal{E} := \mathbb{R}^2$ und

$$\mathcal{L} := \{L_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0\},$$

wobei $L_{a,b,c} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ ist.

Definition 3.1. Eine *Isometrie* in $\mathcal{E}$ ist eine Abbildung $g\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, für die gilt:

$$d(P, Q) = d(g(P), g(Q)).$$

Das heißt, die Abbildung g ist abstandserhaltend.

Bemerkung 3.2. *Da wir in Satz 2.10 gesehen haben, dass wir die Abstände auf den Geraden bei vorgegebenem Koordinatensystem durch den euklidischen Abstand berechnen können, ist es egal, ob wir hier die beiden Abstandsfunktionen betrachten, die auf den beiden Geraden* $\overleftrightarrow{PQ}$ *und* $\overleftrightarrow{g(P)g(Q)}$ *gegeben sind, oder den euklidischen Abstand.*

Um Isometrien im $\mathbb{R}^2$ beschreiben zu können, müssen wir zunächst „schöne“ Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ beschreiben können.

folgenWir definieren zunächst die *Addition* von Punkten im $\mathbb{R}^2$:

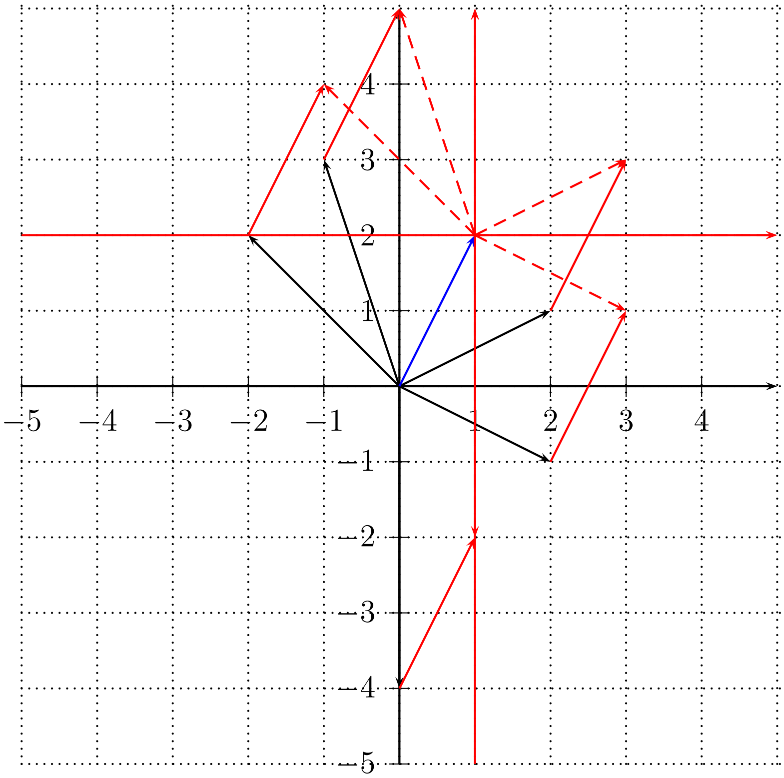
Definition 3.3. Sind zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ gegeben mit $P = \binom{x_1}{y_1}$ und $Q = \binom{x_2}{y_2}$, so definieren wir die *Summe der beiden Punkte P und Q* als den Punkt

$$P + Q := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert uns eine Abbildung $+\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \mapsto P + Q$.

Die Addition eines festen $Q \in \mathbb{R}^2$ zu jedem einzelnen Punkt aus $\mathbb{R}^2$ liefert eine Verschiebung der euklidischen Ebene.

Im folgenden Bild ist $Q = \binom{1}{2}$ fest vorgegeben: Das ist der Punkt, zu dem der blaue Pfeil führt. Die Addition von Q zu beliebigen Punkten aus dem $\mathbb{R}^2$ – hier wurde eine Auswahl durch schwarze Pfeile angedeutet – führt zu einer Verschiebung des $\mathbb{R}^2$ in der Richtung des blauen Pfeils. Wo die neuen, um Q verschobenen Punkte liegen, zeigen die Spitzen der jeweiligen roten Pfeile, die an die schwarzen Pfeile angehängt sind.



Zur besseren Orientierung sind in der Zeichnung auch noch die jeweiligen Lagen der Punkte im durch Q verschobenen $\mathbb{R}^2$ durch gestrichelte rote Pfeile angedeutet.

Weiterhin definieren wir eine *Skalarmultiplikation* im $\mathbb{R}^2$:

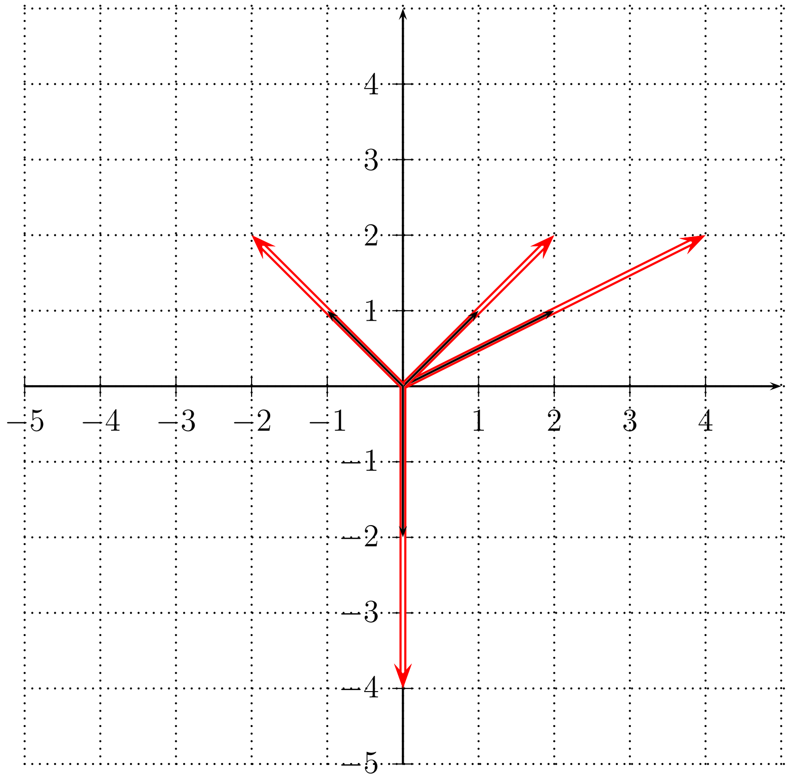
Definition 3.4. Ist ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ gegeben mit $P = \binom{x}{y}$ und ein $r \in \mathbb{R}$, so definieren wir den Punkt $r \cdot P$ durch

$$r \cdot P := \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}.$$

Dies liefert uns eine Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r, P) \mapsto r \cdot P$.

Die Multiplikation eines festen $r \in \mathbb{R}$ mit jedem einzelnen Punkt aus $\mathbb{R}^2$ liefert eine Streckung oder Stauchung (bzw. eine Drehstreckung oder -stauchung) der euklidischen Ebene.

Im folgenden Bild ist $r = 2$ fest vorgegeben. Die Skalarmultiplikation von beliebigen Punkten aus dem $\mathbb{R}^2$ – hier wurde eine Auswahl durch schwarze Pfeile angedeutet – führt zu einer Verlängerung der entsprechenden Pfeile um den Faktor $r = 2$. Die mit 2 multiplizierten Punkte liegen an den Spitzen der roten Doppelpfeile. Der gesamte $\mathbb{R}^2$ wird also um den Faktor 2 gestreckt.



Entsprechend liefert die Multiplikation mit $0 < r < 1$ eine Stauchung des $\mathbb{R}^2$. Ist $r < 0$, so wird der $\mathbb{R}^2$ ebenfalls gestreckt, falls $r < -1$, oder gestaucht, falls $-1 < r < 0$, aber zusätzlich um 180° um den Nullpunkt $\binom{0}{0}$ gedreht. Die Skalarmulitiplikation mit -1 liefert eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um 180° um den Nullpunkt $\binom{0}{0}$.

Definition 3.5. Eine 2×2-Matrix A ist durch vier reelle Zahlen a, b, c, d gegeben, die wir wie folgt notieren:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Durch die Matrix A können wir eine Abbildung $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beschreiben, die wie folgt gegeben ist:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Satz 3.6. *Sei A eine 2×2-Matrix, f_A die dadurch beschriebene Abbildung und $P, Q \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$f_A(P + Q) = f_A(P) + f_A(Q).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiel 3.7. *Ist etwa* $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ *gegeben und* $P = \binom{1}{3}$ *und* $Q = \binom{0}{1}$, *so ist*

$$P + Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$f_A(P+Q) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 8 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + (-7) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -27 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} f_A(P) + f_A(Q) &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 8 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-7) \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + (-7) \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 \\ -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -27 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definition 3.8. Das Produkt zweier 2×2-Matrizen $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ist wie folgt gegeben:

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Satz 3.9. *Seien A und B zwei 2×2-Matrizen, f_A und f_B die dadurch beschriebene Abbildungen und sei $P \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:*

$$f_A \circ f_B(P) = f_{A \cdot B}(P).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiel 3.10. *Sind etwa* $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ *und* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *gegeben, so ist*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0, & 3 \cdot 2 + 8 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-7) \cdot 0, & 1 \cdot 2 + (-7) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, & 30 \\ 1, & -19 \end{pmatrix},$$

$$f_{A \cdot B}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x + 30y \\ 1x - 19y \end{pmatrix},$$

$$f_B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1x + 2y \\ 3y \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} f_A\left(f_B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) &= \begin{pmatrix} 3 \cdot (1x + 2y) + 8 \cdot 3y \\ 1 \cdot (1x + 2y) + (-7) \cdot 3y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x + 30y \\ 1x - 19y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Einige Beispiele (und Gegenbeispiele) von Isometrien kennen wir bereits:

Definition 3.11. Die Addition eines festen Elements $Q \in \mathbb{R}^2$ zu den Elementen aus $\mathbb{R}^2$ liefert uns eine Abbildung $f_Q \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die Vorschrift $f_Q(P) := P+Q$. Diese nennen wir *Translation um* Q.

Satz 3.12. *Die für festes $Q \in \mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $f_Q \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto P+Q$, ist eine Isometrie.*

Beweis. Wir berechnen den euklidischen Abstand $d := d_{\mathbb{R}^2}$:
Sei $Q = \binom{x}{y}$.
Sind $P, R \in \mathbb{R}^2$ gegeben, etwa $P = \binom{x_1}{y_1}$ und $R = \binom{x_2}{y_2}$, so ist nach Definition

$$d(P,R) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

Und der Abstand der Punkte $P+Q = \binom{x_1+x}{y_1+y}$ und $R+Q = \binom{x_2+x}{y_2+y}$ beträgt ebenfalls:

$$d(P+Q, R+Q) = \sqrt{(x_1+x-(x_2+x))^2 + (y_1+y-(y_2+y))^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

□

Bemerkung 3.13. *Die Skalarmultiplikation der Elemente aus $\mathbb{R}^2$ mit einem festen $r \in R$ liefert uns eine Abbildung $f_r \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die Vorschrift $f_r(P) := r \cdot P$.*

Satz 3.14. *Die für festes $r \in \mathbb{R}$ definierte Abbildung $f_r \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto r \cdot P$, ist genau dann eine Isometrie, wenn $|r| = 1$ ist.*

Beweis. Wir berechnen den euklidischen Abstand $d := d_{\mathbb{R}^2}$:
Sind $P, R \in \mathbb{R}^2$ gegeben, etwa $P = \binom{x_1}{y_1}$ und $R = \binom{x_2}{y_2}$, so ist nach Definition

$$d(P,R) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

Und der Abstand der Punkte $r \cdot P = \binom{rx_1}{ry_1}$ und $r \cdot R = \binom{rx_2}{ry_2}$ beträgt:

$$d(r\cdot P, r \cdot R) = \sqrt{(rx_1 - rx_2)^2 + (ry_1 - ry_2)^2}$$

$$= \sqrt{(r(x_1-x_2))^2 + (r(y_1-y_2))^2} = \sqrt{r^2(x_1-x_2)^2 + r^2(y_1-y_2)^2}$$
$$= \sqrt{r^2((x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2)} = |r|\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

Die beiden Abstände sind genau dann gleich, wenn $|r| = 1$ ist oder gleichzeitig $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$, also $P = R$ war.
Da wir aber mehr als einen Punkt im $\mathbb{R}^2$ haben, ist die Abbildung genau dann eine Isometrie, wenn $|r| = 1$ ist. □

Definition 3.15. Für eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren wir die *Determinante* $\det A$ *von* A durch

$$\det A := a \cdot d - b \cdot c.$$

Man kann zeigen:

Satz 3.16. *Die zu* $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *gehörige Abbildung* $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *die wie in Definition 3.5 definiert ist, ist genau dann eine Isometrie, wenn*

- $a^2 + c^2 = 1$,
- $b^2 + d^2 = 1$ *und*
- $ab + cd = 0$

ist.

In diesem Fall folgt: $|\det A| = 1$.

Beweis. Wir berechnen die Abstände zweier Punkte $P = \binom{x_1}{y_1}$ und $Q = \binom{x_2}{y_2}$ vor und nach Anwendung der zur Matrix A gehörigen Abbildung f_A:

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

und

$$\begin{aligned} d\left(f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right), f_A\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right) &= d\left(\begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \sqrt{(ax1 + by_1 - (ax_2 + by_2))^2 + (cx_1 + dy_1 - (cx_2 + dy_2))^2} \\ &= \sqrt{(a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2))^2 + (c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2))^2} \\ &= \big(a^2(x_1 - x_2)^2 + 2ab(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + b^2(y_1 - y_2)^2 \\ &\quad + c^2(x_1 - x_2)^2 + 2cd(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + d^2(y_1 - y_2)^2\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(a^2 + c^2)(x_1 - x_2)^2 + 2(ab + cd)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (b^2 + d^2)(y_1 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

Nun ist $d\left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}\right) = d\left(f_A\left(\binom{x_1}{y_1}\right), f_A\left(\binom{x_2}{y_2}\right)\right)$ genau dann, wenn

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (a^2 + c^2)(x_1 - x_2)^2 + 2(ab + cd)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (b^2 + d^2)(y_1 - y_2)^2,$$

also

$$(a^2 + c^2 - 1)(x_1 - x_2)^2 + 2(ab + cd)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (b^2 + d^2 - 1)(y_1 - y_2)^2 = 0$$

ist. Diese Gleichung muss für *alle* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt sein.

Ist $x_1 \neq x_2$, aber $y_1 = y_2$, so folgt: $(a^2 + c^2 - 1)(x_1 - x_2)^2 = 0$, und damit $a^2 + c^2 = 1$.

Ist $y_1 \neq y_2$, aber $x_1 = x_2$, so folgt: $(b^2 + d^2 - 1)(y_1 - y_2)^2 = 0$, und damit $b^2 + d^2 = 1$.

Also ist immer $2(ab + cd)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) = 0$. Ist nun $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$, so muss $ab + cd = 0$ sein.

Ist umgekehrt $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ und $ab + cd = 0$, so sind die beiden Abstände $d\left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}\right)$ und $d\left(f_A\left(\binom{x_1}{y_1}\right), f_A\left(\binom{x_2}{y_2}\right)\right)$ natürlich gleich.

Dass der Betrag der Determinante von A in diesem Fall nur 1 sein kann, werden wir später zeigen. $\square$

Aus diesem Satz erhalten wir nun einige Beispiele.

Beispiel 3.17.
- *Die Identität, also die Abbildung auf $\mathbb{R}^2$, die durch $P \mapsto P$ gegeben ist, ist eine Isometrie.*

  Denn: Die 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ liefert gerade als zugehörige Abbildung die Identität, und $1^2 + 0^2 = 0^2 + 1^2 = 1$ und $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

- *Die Spiegelung an der x-Achse, also die Abbildung auf $\mathbb{R}^2$, die durch $\binom{x}{y} \mapsto \binom{x}{-y}$ gegeben ist, ist eine Isometrie.*

  Denn: Die 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ liefert gerade als zugehörige Abbildung die Spiegelung an der x-Achse, und $1^2 + 0^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1$ und $1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$.

- *Entsprechend gilt das natürlich auch für die Spiegelung an der y-Achse.*

- *Die Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^2$ mit einem festen Element $r \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Isometrie, wenn $|r| = 1$ ist.*[6]

  Denn: Die 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ liefert gerade als zugehörige Abbildung die Skalarmultiplikation mit r, und $r^2 + 0^2 = 0^2 + r^2 = r^2 = 1$ und genau dann, wenn $|r| = 1$ ist, und $r \cdot 0 + 0 \cdot r = 0$.

Bemerkung 3.18. *Die Eigenschaft, dass die Determinante einer 2×2-Matrix betragsmäßig gleich 1 ist, reicht nicht aus, um eine Isometrie zu erhalten. Beispielsweise gilt*

$$\det A = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 9 - 8 = 1,$$

wenn

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

[6] Das hatten wir zwar oben schon direkt nachgerechnet, aber wenn man den Satz 3.16 kennt, kann man es auch sofort zeigen.

ist. Aber die zugehörige Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$$

ist keine Isometrie, denn für den euklidischen Abstand d gilt:

$$d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1,$$

aber

$$d\left(f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = d\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \neq 1.$$

Für weitere Abbildungen können wir leicht nachrechnen, dass sie Isometrien sind:

Satz 3.19. *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest und $A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Dann ist die zugehörige Abbildung*

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y \\ (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y \end{pmatrix}$$

eine Isometrie.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung 3.20. *Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ fest gewählt, so beschreibt die zur Matrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ gehörige Abbildung eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt $\binom{0}{0}$ mit Drehwinkel α.*

Folgender Satz zeigt uns nun, dass die Hintereinanderausführung zweier Drehungen um den Nullpunkt gerade wiederum eine Drehung liefert und zwar um die Summe der Winkel der einzelnen Drehungen.

Satz 3.21. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Dann gilt:*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 3.22. Für $r \in \mathbb{R}$ und eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren wir

$$r \cdot A := \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}.$$

Bislang haben wir kein richtiges Verfahren kennengelernt, um Matrizen zu berechnen, die Umkehrabbildungen zu Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die durch 2×2-Matrizen gegeben sind, beschreiben. Im Prinzip ist die Berechnung aber ganz einfach, denn es gilt:

Satz 3.23. *Sei* $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *gegeben, so dass* $\det A \neq 0$ *ist, und die zugehörige Abbildung*

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Dann wird die Umkehrabbildung zu f_A *durch die Matrix*

$$\frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gegeben.

Beweis. Wir zeigen, dass die Matrizenmultiplikation in beiden Richtungen die „Einheitsmatrix“ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt, die, wie wir bereits gesehen haben, als zugehörige Abbildung die Identität auf $\mathbb{R}^2$ liefert.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\det A} \cdot (ad - bc) & \frac{1}{\det A} \cdot (-ab + ba) \\ \frac{1}{\det A} \cdot (cd - dc) & \frac{1}{\det A} \cdot (-bc + da) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\det A}{\det A} & 0 \\ 0 & \frac{\det A}{\det A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\det A}{\det A} & 0 \\ 0 & \frac{\det A}{\det A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel 3.24.

- *Ist die Matrix* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *gegeben (also die Matrix, die die Spiegelung an der y-Achse beschreibt), so ist eine zur Umkehrabbildung gehörige Matrix die folgende:*

$$\frac{1}{-1 \cdot 1 - 0 \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung ist also ihre eigene Umkehrabbildung.

- *Ist die Matrix* $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *gegeben, so ist eine zur Umkehrabbildung gehörige Matrix die folgende:*

$$\frac{1}{7 \cdot 1 - 4 \cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass die Abbildungen im $\mathbb{R}^2$, die durch 2×2-Matrizen gegeben werden, verträglich mit der Addition auf dem $\mathbb{R}^2$ sind. Sie sind aber auch verträglich mit der Skalarmultiplikation:

Satz 3.25. *Sind $r \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}^2$ und eine 2×2-Matrix A gegeben, so gilt für die zugehörige Abbildung f_A Folgendes:*

$$f_A(r \cdot P) = r \cdot f_A(P).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung 3.26. *Abbildungen im $\mathbb{R}^2$, die durch 2×2-Matrizen gegeben sind, sind schon dann eindeutig festgelegt, wenn man nur weiß, wohin die Punkte $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ abgebildet werden. Die Spalten der Matrix beschreiben gerade die Bilder von $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$.*

Denn: Ist eine 2×2-Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit der zugehörigen Abbildung f_A gegeben, so ist

$$f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

und

$$f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Ist ein beliebiger Punkt $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ gegeben, so lässt dieser sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da wir nach Satz 3.6 und Satz 3.25 wissen, dass

$$\begin{aligned} f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f_A\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= x \cdot f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y \cdot f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

ist die Abbildung f_A bereits durch die Bilder von $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ eindeutig festgelegt.

Da wir in Satz 3.23 gesehen haben, wie man eine Matrix zu einer Umkehrabbildung einer durch eine Matrix gegebenen Abbildung ausrechnen kann, können wir nun ganz einfach sehen, dass Matrizen zu Isometrien eine Determinante vom Betrag 1 haben müssen.

Satz 3.27. *Sei eine 2×2-Matrix A gegeben, so dass die zugehörige Abbildung f_A eine Isometrie ist. Dann gilt:*

$$|\det A| = 1.$$

Beweis. Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so dass die zugehörige Abbildung f_A eine Isometrie ist, dann ist

$$B := \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

nach Satz 3.23 eine Matrix, die die Umkehrabbildung $f_B = (f_A)^{-1}$ zu f_A liefert.

Als Umkehrabbildung einer Isometrie muss f_B *auch* eine Isometrie sein: Wäre f_B keine Isometrie, so gäbe es zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$, so dass sich der euklidische Abstand d nach Anwendung von f_B auf P und Q ändern würde, also

$$d(P,Q) \neq d\left(f_B(P), f_B(Q)\right)$$

wäre. Dann wäre aber, da f_A eine Isometrie ist, auch

$$d(P,Q) \neq d\left(f_B(P), f_B(Q)\right) = d\left(f_A \circ f_B(P), f_A \circ f_B(Q)\right) = d(P,Q).$$

Widerspruch!

Nach Satz 3.16 ist die zur Matrix A gehörige Abbildung genau dann eine Isometrie, wenn gilt:

$$a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1 \text{ und } ab + cd = 0,$$

und die zur Matrix B gehörige Abbildung ist genau dann eine Isometrie, wenn gilt:

$$\frac{d^2 + (-c)^2}{(\det A)^2} = 1,\ \frac{(-b)^2 + a^2}{(\det A)^2} = 1 \text{ und } \frac{d \cdot (-b) + (-c) \cdot a}{(\det A)^2} = 0.$$

Insbesondere muss

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$$

und

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{(\det A)^2} = 2$$

sein. Daraus folgt:

$$(\det A)^2 = 1$$

und daher:

$$|\det A| = 1.$$

□

4 Strecken, Strahlen, Ebenentrennungsaxiom

In diesem Abschnitt betrachten wir wieder ganz allgemein eine Menge $\mathcal{E}$ und eine Familie $\mathcal{L}$ von Teilmengen von $\mathcal{E}$ (=Geraden), für die die beiden Inzidenzaxiome und das Messlattenaxiom gelten. Weiterhin sei für jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ ein festes Koordinatensystem f_L gewählt.

Im vorletzten Kapitel haben wir die so genannte Dreiecksungleichung gesehen (s. a. Aufgabe 1 auf Übungsblatt 2). Dabei war es wichtig zu unterscheiden, wie die zu den drei Punkten gehörigen reellen Zahlen zueinander lagen, welche Zahlen also größer oder kleiner waren. Ähnliches machen wir nun auch für eine beliebige euklidische Ebene $\mathcal{E}$.

Definition 4.1. Gegeben seien drei verschiedene Punkte P, Q, R auf einer Geraden L. Wir sagen: R liegt *zwischen* P und Q, falls gilt:

$$d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q).$$

Hierbei bezeichnet d den Abstand der Punkte, wie er durch das Koordinatensystem f_L für die Gerade $L \in \mathcal{L}$ gegeben ist.

Es gilt:

Satz 4.2.

- *Für je drei verschiedene Punkte auf einer Geraden liegt genau einer zwischen den beiden anderen.*
- *Für zwei verschiedene Punkte P, Q gibt es einen Punkt R auf der Geraden $L_{\overleftrightarrow{PQ}}$, der zwischen P und Q liegt.*
- *Für zwei verschiedene Punkte P, Q gibt es einen Punkt R auf der Geraden $L_{\overleftrightarrow{PQ}}$, so dass Q zwischen P und R liegt.*

Beweisidee.

- Das folgt aus den Eigenschaften der reellen Betragsfunktion und der Definition des Abstandes zweier Punkte mit Hilfe des vorgegebenen Koordinatensystems.
- Hier benutzt man die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.
- Hier benutzt man das Archimedische Axiom.

$\square$

Definition 4.3. Seien P und Q zwei verschiedene Punkte in $\mathcal{E}$.

- Die *Strecke* $\overline{PQ}$ zwischen P und Q wird definiert durch

$$\overline{PQ} := \{R \in \overleftrightarrow{PQ} \mid R = P,\ R = Q \text{ oder } R \text{ liegt zwischen } P \text{ und } Q\}.$$

Die beiden Punkte P und Q nennen wir *Endpunkte* der Strecke.

- Der *Strahl* $\overrightarrow{PQ}$ von P durch Q wird definiert durch

$$\overrightarrow{PQ} := \{R \in \overleftrightarrow{PQ} \mid P \text{ ist nicht zwischen } Q \text{ und } R\}.$$

[7]

- Der zu $\overrightarrow{PQ}$ *entgegengesetzte Strahl* ist $\overrightarrow{PQ'}$, wobei Q' ein beliebiger Punkt auf $\overleftrightarrow{PQ}$ ist, für den P zwischen Q und Q' liegt.

Definition 4.4. Zwei Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ heißen *kongruent*, falls $d(P,Q) = d(R,S)$ ist, wobei d den jeweiligen Abstand der Punkte auf den Geraden bezeichnet. Wir schreiben dann: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$.

Beispiel 4.5. *Gegeben seien $P := (0,0)$, $Q := (1,1)$, $R := (1,2)$, $S := (2,1)$ und $T := (3,0)$. Als Koordinatensysteme wählen wir diejenigen aus Satz 2.10. Damit können wir die Abstände zwischen den Punkten als euklidische Abstände berechnen.*
Es gilt:

$$\overline{PQ} \cong \overline{RS} \text{ und } \overline{PQ} \ncong \overline{RT},$$

denn es ist (mit d als euklidischem Abstand):

$$d(P,Q) = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2} = d(R,S)$$

und

$$d(R,T) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} \neq \sqrt{2} = d(P,Q).$$

Es gilt folgender Satz:

Satz 4.6. *Sind eine Strecke $\overline{PQ}$ und ein Strahl $\overrightarrow{RS}$ gegeben, so gibt es genau eine Strecke $\overline{RS'}$ mit $\overline{RS'} \cong \overline{PQ}$ und $\overline{RS'} \subseteq \overrightarrow{RS}$.*

Definition 4.7. Eine Teilmenge A der Ebene $\mathcal{E}$ heißt *konvex*, falls für beliebige Punkte $P, Q \in A$ auch $\overline{PQ} \subseteq A$ ist.

Ebenentrennungsaxiom
Für jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ besteht das Komplement $\mathcal{E} \backslash L$ aus zwei nicht-leeren konvexen Mengen H_L^1 und H_L^2, so dass für beliebige Punkte $P \in H_L^1$ und $Q \in H_L^2$ gilt: $\overline{PQ} \cap L \neq \emptyset$. (Die Strecken $\overline{PQ}$ haben also jeweils (mindestens) einen Schnittpunkt mit der Gerade L.)

Definition 4.8. Die beiden Mengen H_L^1 und H_L^2 (wie oben) nennen wir *Halbebenen* und die Gerade L den *Rand* von H_L^1 bzw. H_L^2.

Lemma 4.9. *Sind L und L' zwei verschiedene Geraden in $\mathcal{E}$, so haben sie höchstens einen Schnittpunkt.*

[7] Insbesondere liegt (nach der Definition von „zwischen“) der Punkt P auf dem Strahl $\overrightarrow{PQ}$, da P nicht zwischen P und Q liegt, da es sich nicht um drei verschiedene(!) Punkte handelt.

Beweis. Angenommen, es gibt zwei Schnittpunkte von L und L', sagen wir P und Q. Dann gibt es nach dem zweiten Inzidenzaxiom genau eine Gerade $\overleftrightarrow{PQ}$ auf der P und Q liegen. Da aber $P, Q \in L$ und $P, Q \in L'$ sind, also L und L' beides Geraden sind, auf denen sowohl P als auch Q liegt, muss $L = \overleftrightarrow{PQ} = L'$ sein. Also sind L und L' nicht verschieden. □

Mit Hilfe des Lemmas können wir nun folgenden Satz beweisen:

Satz 4.10. *Sei P ein Punkt auf einer Geraden L und $Q \notin L$. Dann liegt $\overrightarrow{PQ} \setminus \{P\}$ in der einen Hälfte der Halbebene bzgl. der Geraden L und $\overrightarrow{PQ'} \setminus \{P\}$ in der anderen, wobei $\overrightarrow{PQ'}$ den zu $\overrightarrow{PQ}$ entgegengesetzten Strahl bezeichnet.*

Beweis. Angenommen, es gibt einen Punkt $R \in \overrightarrow{PQ} \setminus \{P\}$, der nicht in derselben Halbebene wie Q liegt.

Ist $R \in L$, so gilt: $R \in \overleftrightarrow{QR} \cap L$. Da $P \in \overleftrightarrow{QR}$, ist aber auch $P \in \overleftrightarrow{QR} \cap L$, und mit obigem Lemma erhalten wir $R = P$. **Widerspruch!**

Ist dagegen $R \notin L$, so folgt aus dem Ebenentrennungsaxiom, dass $\overline{QR}$ einen Schnittpunkt mit L hat. Da $\overline{QR} \subseteq \overleftrightarrow{QR}$, folgt aus dem obigen Lemma, dass der Schnittpunkt P sein muss. Damit liegt aber P zwischen R und Q, so dass $R \notin \overrightarrow{PQ}$ ist. **Widerspruch!**

Da der Punkt P gerade zwischen Q und Q' liegt, muss sich Q' gerade in der Halbebene bzgl. L befinden, in der das Q nicht liegt. Dann kann man genauso zeigen, dass sich der andere Strahl $\overrightarrow{PQ'}$ ohne den Punkt P komplett in der anderen Halbebene befindet. □

5 Winkel und das Winkelmaßaxiom

Auch in diesem Abschnitt betrachten wir wieder eine euklidische Ebene $\mathcal{E}$ mit einer Familie $\mathcal{L}$ von Geraden, für die das Ebenentrennungsaxiom gilt.

Definition 5.1. Ein *Winkel* an einem Punkt $P \in \mathcal{E}$ besteht aus der Vereinigung zweier Strahlen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$. Wir bezeichnen diesen Winkel mit

$$\sphericalangle PQR.$$

Definition 5.2. Zwei Winkel $\sphericalangle PQR$ und $\sphericalangle PQS$ heißen *sich ergänzend*, wenn die Strahlen $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{PS}$ zueinander entgegengesetzt sind.

Definition 5.3. Sind $P, Q, R \in \mathcal{E}$ drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so bezeichnen wir die Halbebene bzgl. der Geraden $\overleftrightarrow{PQ}$, in der R liegt mit H_R.

Definition 5.4. Sind $P, Q, R \in \mathcal{E}$ drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so definieren wir das *Innere des Winkels* $\sphericalangle PQR$ durch

$$\operatorname{int} \sphericalangle PQR := H_Q \cap H_R.$$

Wir führen nun weitere Axiome ein, de

Winkelmaßaxiome:
Sei $\mathcal{W}$ die Menge aller Winkel in $\mathcal{E}$. Dann gibt es ein *Winkelmaß* $m\colon \mathcal{W} \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

- Für jeden Winkel $\sphericalangle PQR \in \mathcal{W}$ ist
$$0 \leq m(\sphericalangle PQR) \leq 180.$$
- Für jeden Strahl $\overrightarrow{PQ}$ in einer Geraden L und jede Wahl einer Halbebene H bzgl. L gibt es zu jedem $0 \leq r \leq 180$ genau einen Strahl $\overrightarrow{PR}$ mit $R \in H$ oder $R \in L$, so dass $m(\sphericalangle PQR) = r$ ist.
- Für jeden Punkt $S \in \operatorname{int} \sphericalangle PQR$ gilt:
$$m(\sphericalangle PQR) = m(\sphericalangle PQS) + m(\sphericalangle PSR).$$
- Für jedes sich ergänzende Winkelpaar $\sphericalangle PQR$ und $\sphericalangle PRS$ gilt:
$$m(\sphericalangle PQR) + m(\sphericalangle PRS) = 180.$$

Definition 5.5. Wir nennen zwei Winkel $\sphericalangle PQR$ und $\sphericalangle STU$ *kongruent*, wenn sie dasselbe Winkelmaß haben. Ist das der Fall, so schreiben wir $\sphericalangle PQR \cong \sphericalangle STU$.

Wir setzen nun weiter voraus, dass für $\mathcal{E}$ und $\mathcal{L}$ die Inzidenzaxiome gelten.

Definition 5.6. Einen Winkel mit dem Winkelmaß 90 nennen wir einen *rechten Winkel*. Wir sagen, dass zwei verschiedene Geraden L und L' *senkrecht aufeinander stehen*, wenn es für den (nach Lemma 4.9 eindeutig bestimmten) Punkt $P \in L \cap L'$ zwei weitere Punkte $Q \in L \backslash \{P\}$ und $R \in L' \backslash \{P\}$ gibt, so dass der Winkel $\sphericalangle PQR$ ein rechter Winkel ist.

Damit können wir folgenden Satz beweisen:

Satz 5.7. *Durch jeden Punkt $P \in \mathcal{E}$ in einer Geraden L gibt es genau eine Gerade L', die senkrecht auf L steht.*

Beweisidee. Wir wählen einen Punkt $Q \in L \backslash \{P\}$. Damit ist nach dem zweiten Inzidenzaxiom die Gerade L durch P und Q eindeutig bestimmt. Zu den Punkten P und Q gibt es nach dem zweiten Winkelmaßaxiom nach der Wahl einer Halbebene H zu L einen weiteren Punkt $R \in H$, so dass für das Winkelmaß m und den entstehenden Winkel $\sphericalangle PQR$ gilt:

$$m(\sphericalangle PQR) = 90.$$

Der Strahl $\overrightarrow{PR}$ ist nach dem zweiten Winkelmaßaxiom eindeutig bestimmt. Weiterhin ist nach dem zweiten Inzidenzaxiom die Gerade durch P und R eindeutig bestimmt. Da die Strahlen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ in den eindeutig bestimmten Geraden $\overleftrightarrow{PQ}$ und $\overleftrightarrow{PR}$ liegen, erhalten wir bei der Wahl einer festen Halbebene genau eine auf der Geraden $L = \overleftrightarrow{PQ}$ senkrecht stehende Gerade, nämlich $\overleftrightarrow{PR}$.
Nun müssen wir noch zeigen, dass bei Wahl eines Punktes R' in der anderen Halbebene $H' \neq H$ bezüglich L mit $m(\sphericalangle PQR') = 90$ dieselbe Gerade entsteht.
Das folgt mit dem vierten und dem dritten Winkelmaßaxiom, denn wenn die beiden Strahlen $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{PR'}$ sich nicht ergänzen würden, könnte man einen Punkt R'' finden, so dass sich die Winkel $\sphericalangle PQR$ und $\sphericalangle PQR''$ ergänzen würden. Dann wäre aber $R' \in \operatorname{int} \sphericalangle PRR''$.
Damit wäre nach dem vierten und dritten Winkelmaßaxiom

$$m(\sphericalangle PQR) + m(\sphericalangle PQR'') = 180 = m(\sphericalangle PQR) + m(\sphericalangle PQR').$$

Und damit $m(\sphericalangle PQR'') = m(\sphericalangle PQR')$. Nach dem dritten Winkelmaßaxiom wäre dann aber $R' \notin \operatorname{int} \sphericalangle PRR''$. **Widerspruch!** □

Im Folgenden werden wir ein Winkelmaß auf dem $\mathbb{R}^2$, der ja ein Beispiel einer euklidischen Ebene bildet, einführen.

Definition 5.8. Sind $P = \binom{x_1}{y_1}$ und $Q = \binom{x_2}{y_2}$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$, so definieren wir ihr *Skalarprodukt* durch

$$\langle P, Q \rangle := x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

Bemerkung 5.9. *Insbesondere gilt:*

$$\sqrt{\langle P, P \rangle} = d(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P),$$

wobei d den euklidischen Abstand bezeichnet.

Wir bezeichnen den Punkt $\binom{0}{0} \in \mathbb{R}^2$ mit O. Nun können wir für den $\mathbb{R}^2$ ein Winkelmaß eines Winkels am Punkt O definieren:

Definition 5.10. Sind $P = \binom{x_1}{y_1}$ und $Q = \binom{x_2}{y_2}$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$ (mit $P \neq O \neq Q$), so ist das Winkelmaß α für den Winkel $\sphericalangle OPQ$ definiert durch

$$\alpha := \arccos \frac{\langle P, Q\rangle}{d(O,P) \cdot d(O,Q)},$$

wobei d den euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Es gilt also

$$\alpha = \arccos \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Zu zeigen ist hier, damit die Definition sinnvoll ist, dass $\frac{\langle P,Q\rangle}{d(O,P)\cdot d(O,Q)} \in [-1, 1]$ ist (und wir überhaupt den Arkuskosinus davon berechnen können).

Zunächst aber Folgendes:
Sind drei beliebige Punkte P, Q, R im $\mathbb{R}^2$ (mit $P \neq Q$ und $P \neq R$) gegeben und wollen wir das Winkelmaß des Winkels $\sphericalangle PQR$ festlegen, so verschieben wir den $\mathbb{R}^2$ in der Richtung, dass der Punkt P auf den Nullpunkt O fällt. Wir führen also vor Berechnung des Winkelmaßes eine Translation des $\mathbb{R}^2$ in der Richtung $-P$ aus. Dann definieren wir:

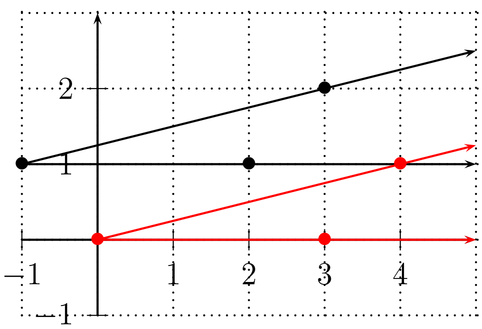
Definition 5.11. Sind $P = \binom{x_0}{y_0}$, $Q = \binom{x_1}{y_1}$ und $R = \binom{x_2}{y_2}$ drei Punkte im $\mathbb{R}^2$ mit $P \neq Q$ und $P \neq R$, so ist das Winkelmaß β für den Winkel $\sphericalangle PQR$ definiert durch

$$\beta := \arccos \frac{(x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0) + (y_1 - y_0) \cdot (y_2 - y_0)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}}.$$

Beispiel 5.12. *Es seien $P := \binom{-1}{1}$, $Q := \binom{2}{1}$, $R := \binom{3}{2}$. Dann ist das Winkelmaß für den Winkel $\sphericalangle PQR$ definiert als*

$$\arccos \frac{(2-(-1)) \cdot (3-(-1)) + (1-1) \cdot (2-1)}{\sqrt{(2-(-1))^2 + (1-1)^2} \cdot \sqrt{(3-(-1))^2 + (2-1)^2}} = \arccos \frac{3 \cdot 4 + 0 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2}}$$

$$= \arccos \frac{12}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{17}} = \arccos \frac{12}{3 \cdot \sqrt{17}} = \arccos \frac{4}{\sqrt{17}} \approx \arccos 0{,}9701425 \approx 14{,}03624347.$$



Nun zeigen wir, dass die Definition überhaupt sinnvoll ist, also wir wirklich den Arkuskosinus von dem oben angegebenen Bruch berechnen können.

Satz 5.13 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Sind $P, Q \in \mathbb{R}^2$, so ist*

$$|\langle P, Q\rangle| \leq d(O, P) \cdot d(O, Q),$$

wobei d den euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Beweis. Wir schreiben $P = \binom{x_1}{y_1}$, $Q = \binom{x_2}{y_2}$.
Falls $Q = O$ ist, so ist

$$\langle P, Q\rangle = x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 = 0,$$

also insbesondere nach dem 3. Anordnungsaxiom (und der Definition des euklidischen Abstands)

$$0 = \langle P, Q\rangle \leq d(O, P) \cdot d(O, Q).$$

Sonst berechnen wir:

$$\langle r \cdot P + s \cdot Q, r \cdot P + s \cdot Q\rangle = (d(O, r \cdot P + s \cdot Q))^2 \geq 0$$

für alle $r, s \in \mathbb{R}$.

$$\langle r \cdot P + s \cdot Q, r \cdot P + s \cdot Q\rangle = r^2\langle P, P\rangle + 2rs\langle P, Q\rangle + s^2\langle Q, Q\rangle$$

Nun setzen wir $r := \langle Q, Q\rangle$ und $s := -\langle P, Q\rangle$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle r \cdot P + s \cdot Q, r \cdot P + s \cdot Q\rangle &= (\langle Q, Q\rangle)^2\langle P, P\rangle - 2\langle Q, Q\rangle(\langle P, Q\rangle)^2 + (\langle P, Q\rangle)^2\langle Q, Q\rangle \\ &= (\langle Q, Q\rangle)^2\langle P, P\rangle - \langle Q, Q\rangle(\langle P, Q\rangle)^2 \end{aligned}$$

Wenn $Q \neq O$ ist, ist auch $\langle Q, Q\rangle = x_2^2 + y_2^2 \neq 0$, sogar $\langle Q, Q\rangle > 0$, und wir können die Ungleichung mit $\frac{1}{\langle Q,Q\rangle} > 0$ multiplizieren, ohne dass sich die Ordnung umkehrt[8].
Wir haben also

$$0 \leq \langle Q, Q\rangle\langle P, P\rangle - (\langle P, Q\rangle)^2,$$

und daher

$$(\langle P, Q\rangle)^2 \leq \langle Q, Q\rangle\langle P, P\rangle.$$

Daraus ergibt sich:

$$|\langle P, Q\rangle| \leq \sqrt{\langle P, P\rangle} \cdot \sqrt{\langle Q, Q\rangle} = d(O, P) \cdot d(O, Q),$$

also die behauptete Ungleichung. □

Folgerung 5.14. *Sind $P, Q \in \mathbb{R}^2$ mit $P \neq O \neq Q$, so ist*

$$\frac{\langle P, Q\rangle}{d(O, P) \cdot d(O, Q)} \in [-1, 1].$$

[8] Hier benötigen wir das 3. Anordnungsaxiom, dass Kehrwerte positiver Zahlen wieder positiv sind, und im Spezialfall der Gleichheit bleibt die Gleichheit durch Multiplikation beider Seiten mit $\frac{1}{\langle Q,Q\rangle}$ natürlich erhalten

6 Dreiecke und das SWS-Axiom

In diesem Abschnitt geben wir uns wieder eine euklidische Ebene $\mathcal{E}$ mit einer ausgezeichneten Familie $\mathcal{L}$ von Geraden sowie Koordinatensystemen f_L für alle $L \in \mathcal{L}$ vor, so dass dafür alle bislang eingeführten Axiome gelten.

Definition 6.1. Sind $P, Q, R \in \mathcal{E}$ drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so bezeichnen wir mit $\triangle PQR$ die Vereinigung der Strecken $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ und $\overline{RP}$ und nennen $\triangle PQR$ ein *Dreieck*.
Dabei merken wir uns die Reihenfolge der *Eckpunkte* P, Q, R des Dreiecks, es soll also $\triangle PQR \neq \triangle QRP$ sein.
Die Strecken $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ und $\overline{RP}$ nennen wir die *Seiten* des Dreiecks.

Definition 6.2. Wir nennen zwei Dreiecke $\triangle PQR$ und $\triangle STU$ *reihenfolgen-kongruent*, falls gilt:

$$d(P,Q) = d(S,T),\ d(Q,R) = d(T,U),\ d(R,P) = d(U,S),$$

$$m(\sphericalangle PQR) = m(\sphericalangle STU),\ m(\sphericalangle QRP) = m(\sphericalangle TUS) \text{ und } m(\sphericalangle RPQ) = m(\sphericalangle UST),$$

wobei d den Abstand der Punkte auf den entsprechenden Geraden bezeichnet, der durch das für jede Gerade vorgegebene Koordinatensystem bestimmt ist, und m eine Winkelmaßfunktion für die Ebene $\mathcal{E}$.
Wir schreiben dann: $\triangle PQR \equiv \triangle STU$.

Definition 6.3. Wir nennen zwei Dreiecke $\triangle PQR$ und $\triangle STU$ *kongruent*, falls wir für eine geeignete Wahl der Reihenfolge der Eckpunkte S, T, U eine Reihenfolgen-Kongruenz haben.
Wir schreiben dann: $\triangle PQR \cong \triangle STU$.

Nun führen wir ein weiteres Axiom ein:

Das SWS-Axiom
Sind zwei Dreiecke $\triangle PQR$ und $\triangle STU$ gegeben, so dass zwei Seiten und der von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkel des einen Dreieck kongruent zu den entsprechenden zwei Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel des anderen Dreiecks sind, so gilt: $\triangle PQR \equiv \triangle STU$.
Mit anderen Worten:

- $d(P,Q) = d(S,T)$, $d(Q,R) = d(T,U)$, $m(\sphericalangle QRP) = m(\sphericalangle TUS) \Rightarrow \triangle PQR \equiv \triangle STU$
- $d(Q,R) = d(T,U)$, $d(R,P) = d(U,S)$, $m(\sphericalangle RPQ) = m(\sphericalangle UST) \Rightarrow \triangle PQR \equiv \triangle STU$
- $d(R,P) = d(U,S)$, $d(P,Q) = d(S,T)$, $m(\sphericalangle PQR) = m(\sphericalangle STU) \Rightarrow \triangle PQR \equiv \triangle STU$

Hierbei bezeichnet d wieder den entsprechenden Abstand der Punkte, der durch das Koordinatensystem der zugehörigen Geraden gegeben ist, und m das vorgegebene Winkelmaß.

Definition 6.4. Wir nennen ein Dreieck *gleichseitig*, wenn alle drei Seiten kongruent sind. Wir nennen ein Dreieck *gleichschenklig*, wenn mindestens zwei Seiten kongruent sind.

Definition 6.5. Der *gegenüberliegende Winkel zu einer vorgegebenen Seite eines Dreiecks* ist derjenige Winkel, der die beiden anderen Seiten enthält.

Wir können nun folgenden Satz zeigen:

Satz 6.6 (Basiswinkelsatz). *Sind zwei Seiten eines Dreiecks kongruent, so sind die beiden jeweils gegenüberliegenden Winkel auch kongruent.*

Beweis. Wir nehmen an, dass wir ein Dreieck $\triangle PQR$ haben mit $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$. (Das können wir durch Umnummerierung der Punkte immer erreichen.) Nun vertauschen wir die Rollen von Q und R, setzen also

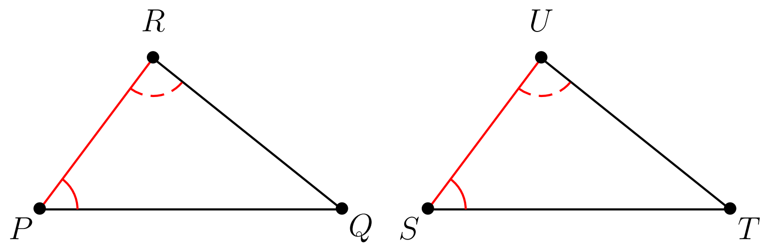
$$Q' := R \text{ und } R' := Q.$$

Dann erhalten wir mit dem SWS-Axiom (da ja nun auch $\overline{PQ'} = \overline{PR} \cong \overline{PQ} = \overline{PR'}$ ist), dass $\triangle PQR \equiv \triangle PQ'R'$ ist. Daraus folgt nach Definition der Reihenfolgen-Kongruenz, dass insbesondere $m(\sphericalangle QRP) = m(\sphericalangle Q'R'P) = m(\sphericalangle RQP)$ ist, wobei m das vorgegebene Winkelmaß bezeichnet. □

Wir können nun auch Folgendes zeigen:

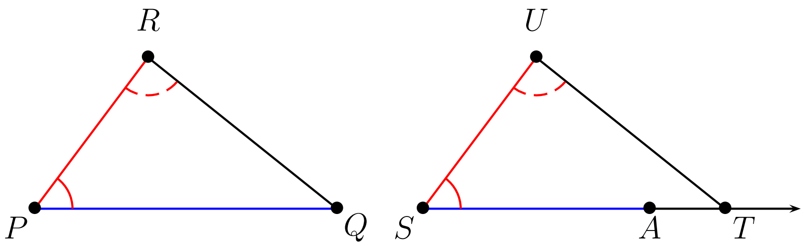
Satz 6.7 (WSW-Kongruenzsatz). *Sind zwei Dreiecke $\triangle PQR$ und $\triangle STU$ gegeben, so dass zwei Winkel und die Seite des Dreiecks, die im Durchschnitt beider Winkel liegt kongruent sind zu den entsprechenden zwei Winkeln und der Seite des anderen Dreieck, so gilt: $\triangle PQR \equiv \triangle STU$.*

Beweis. Wieder bezeichne d den jeweiligen Abstand bzgl. des entsprechenden Koordinatensystems.
Wir können davon ausgehen, dass $d(P,R) = d(S,U)$ ist und die Winkel in den beiden Punkten P und S sowie den beiden Punkten R und U übereinstimmen.

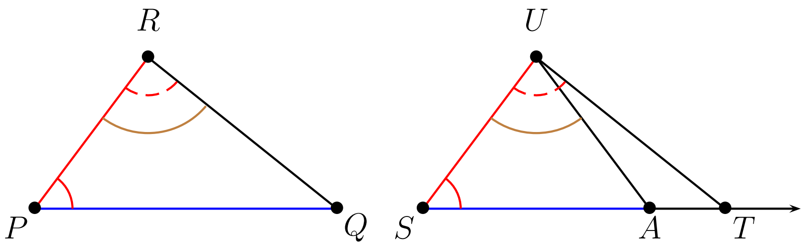


Mit Hilfe von Satz 4.6 erhalten wir einen Punkt $A \in \overrightarrow{ST}$, so dass $d(S,A) = d(P,Q)$ ist. [9]

[9] Wir können auf dem Strahl $\overrightarrow{ST}$ eine Strecke abtragen, die dieselbe Länge wie $\overline{PQ}$ hat und S als einen Endpunkt hat. Den anderen Endpunkt nennen wir A.



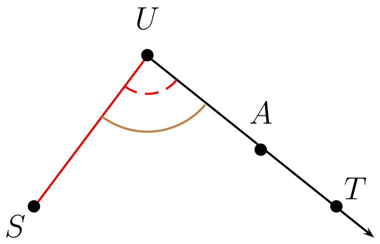
Durch das SWS-Axiom erhalten wir nun, dass $\triangle PQR \equiv \triangle SAU$ ist.



Daraus folgt nach Definition der Reihenfolgen-Kongruenz, dass insbesondere

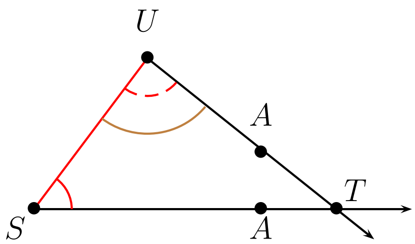
$$\sphericalangle UST \cong \sphericalangle RPQ \cong \sphericalangle USA$$

ist.
Damit ist nach dem zweiten Winkelmaßaxiom $\overrightarrow{UT}=\overrightarrow{UA}$, und dann aufgrund des zweiten Inzidenzaxioms auch $\overleftrightarrow{UT}=\overleftrightarrow{UA}$.



Wir betrachten nun den Durchschnitt der beiden Geraden $\overleftrightarrow{ST}$ und $\overleftrightarrow{UT}$: Es ist

$$T, A \in \overleftrightarrow{ST} \cap \overleftrightarrow{UT}\ .$$



Da die beiden Geraden $\overleftrightarrow{ST}$ und $\overleftrightarrow{UT}$ aber verschieden sind, können sie nach Lemma 4.9 höchstens einen Schnittpunkt haben, woraus $A = T$ folgt.
Und damit ist $\triangle PQR \equiv \triangle SAU = \triangle STU$. $\square$

Satz 6.8 (SSS-Kongruenzsatz)**.** *Sind zwei Dreiecke $\triangle PQR$ und $\triangle STU$ gegeben mit $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$, $\overline{QR} \cong \overline{TU}$ und $\overline{RP} \cong \overline{US}$, so gilt:*

$$\triangle PQR \equiv \triangle STU.$$

(ohne Beweis)
Wir können nun folgenden Satz zeigen:

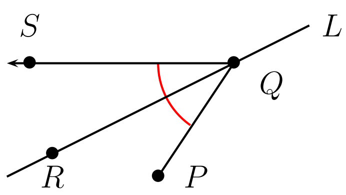
Satz 6.9. *Sei L eine Gerade in $\mathcal{E}$ und $P \in \mathcal{E}$ ein Punkt. Dann gibt es genau eine Gerade M mit $P \in M$, die senkrecht auf der Geraden L steht.*

Beweis. Ist $P \in L$, so ist dies gerade die Aussage von Satz 5.7.

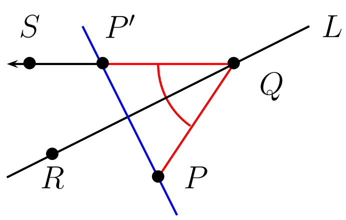
Wir können also annehmen, dass $P \notin L$ gilt.

Zunächst konstruieren wir eine Gerade, die P enthält und senkrecht auf L steht.

Wir wählen zwei verschiedene Punkte $Q, R \in L$. Mit dem zweiten Winkelmaßaxiom und dem Ebenentrennungsaxiom können wir $S \in \mathcal{E}$ wählen, so dass S nicht in derselben Halbebene bzgl. L liegt, in der schon P liegt, aber $m(\sphericalangle QRP) = m(\sphericalangle QRS)$ gilt. (m bezeichnet hier das Winkelmaß.)

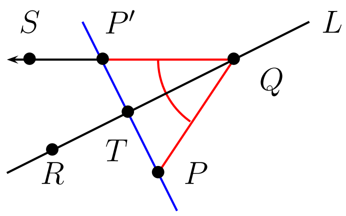


Auf dem Strahl $\overrightarrow{QS}$ können wir nun mit Hilfe von Satz 4.6 einen Punkt P' wählen, so dass $d(Q, P) = d(Q, P')$ ist. (d bezeichnet hier den Abstand, der bzgl. der Koordinatensysteme der Geraden in $\mathcal{L}$ gegeben ist.)



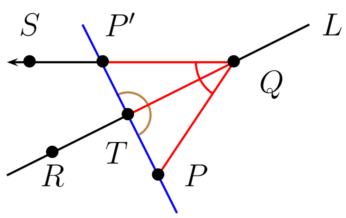
Behauptung: Die Gerade $\overleftrightarrow{PP'}$ steht senkrecht auf L.

P und P' liegen nach dem Ebenentrennungsaxiom in den beiden verschiedenen Halbebenen bzgl. L, und daher hat $\overleftrightarrow{PP'}$ genau einen Schnittpunkt mit L, den wir T nennen.



Fall 1: $T \neq Q$.

Dann ist $\overline{QP} \cong \overline{QP'}$, $\overline{QT} = \overline{QT}$ und $m(\sphericalangle QPT) = m(\sphericalangle QP'T)$, so dass nach dem SWS-Axiom $\triangle QTP \equiv \triangle QTP'$ ist.
Insbesondere ist dann aber auch $m(\sphericalangle TQP) = m(\sphericalangle TQP')$.



Da aber $\sphericalangle TQP$ und $\sphericalangle TQP'$ zwei sich ergänzende Winkel sind, muss gelten

$$2 \cdot m(\sphericalangle TQP) = m(\sphericalangle TQP) + m(\sphericalangle TQP') = 180$$

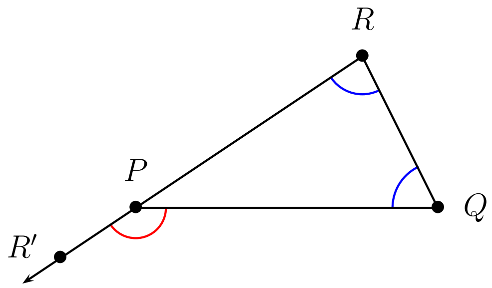
(viertes Winkelmaßaxiom), woraus folgt, dass $m(\sphericalangle TQP) = 90$ ist.
Die Gerade $\overleftrightarrow{PT} = \overleftrightarrow{PP'}$ steht also senkrecht auf L.

Fall 2: $T = Q \Rightarrow T \neq R$

Durch Vertauschen der Rollen von R und Q erhalten wir, dass $m(\sphericalangle TRP) = 90$ ist.
Die Gerade $\overleftrightarrow{PT} = \overleftrightarrow{PP'}$ steht also auch hier senkrecht auf L.

Noch zu zeigen ist, dass es nur eine solche Gerade geben kann. Das geht ähnlich wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 5.7. □

Definition 6.10. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle PQR$. Wir nennen einen Winkel $\sphericalangle PQR'$ den *äußeren Winkel zum Strahl* $\overrightarrow{PR}$, wenn $\overrightarrow{PR'}$ der zu $\overrightarrow{PR}$ entgegengesetzte Strahl ist.
Die Winkel $\sphericalangle QRP$ und $\sphericalangle RPQ$ nennen wir dann die *zum äußeren Winkel* $\sphericalangle PQR'$ *entfernten Innenwinkel* des Dreiecks.



Folgende Sätze geben wir hier ohne Beweis wieder:

Satz 6.11. *In jedem Dreieck ist der äußere Winkel zu einem Strahl immer größer als jeder der beiden zugehörigen entfernten Innenwinkel.*

Satz 6.12. *In jedem Dreieck ist die Länge einer Seite genau dann größer als die Länge einer zweiten Seite, wenn der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel größer ist als der der zweiten Seite gegenüberliegende Winkel.*

Satz 6.13 (Dreiecksungleichung). *Die Summe der Längen zweier Seiten in einem Dreieck ist größer als die Länge der dritten Seite.*

Folgerung 6.14. *Für drei beliebige Punkte $P, Q, R \in \mathcal{E}$ gilt: $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$, wobei d den jeweiligen Abstand der Punkte auf der eindeutig bestimmten Gerade bezeichnet, die durch die Punkte geht, der durch das entsprechende Koordinatensystem gegeben ist. (Im Spezialfall, dass alle drei Punkte auf einer Geraden liegen, folgt das aus dem Messlattenaxiom und den Eigenschaften des Betrages für die reellen Zahlen.)*

Nun können wir noch den letzten Kongruenzssatz für Dreiecke beweisen:

Satz 6.15 (SsW-Kongruenzsatz). *Sind zwei Dreiecke $\triangle PQR$ und $\triangle STU$ gegeben, so dass $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$, $\overline{PR} \cong \overline{SU}$ und $m(\sphericalangle RPQ) = m(\sphericalangle UST)$ sowie $d(P,Q) > d(P,R)$ gilt, so ist $\triangle PQR \equiv \triangle STU$. (Hierbei bezeichnet wieder m das Winkelmaß und d den Abstand der Punkte, der durch die Koordinatensysteme der entsprechenden Geraden gegeben wird.)*

Beweis. Ist zusätzlich noch $\overline{QR} \cong \overline{TU}$, so folgt die Kongruenz der beiden Dreiecke aufgrund des SSS-Kongruenzsatzes.

Wir können sonst also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\overline{QR} \ncong \overline{TU}$ ist, sogar, dass $d(Q,R) > d(T,U)$ gilt. (Andernfalls vertauschen wir die Rollen von P, Q, R mit denen von S, T, U.)

Nach Satz 4.6 können wir $A \in \overrightarrow{RQ}$ finden, so dass $\overline{RA} \cong \overline{UT}$ ist. Dann folgt mit dem SWS-Kongruenzsatz, dass $\triangle PAR \equiv \triangle STU$ ist. Insbesondere ist damit $\overline{PA} \cong \overline{ST} (\cong \overline{PQ})$.

Damit ist $\triangle PAQ$ ein gleichschenkliges Dreieck, und mit dem Basiswinkelsatz folgt $m(\sphericalangle APQ) = m(\sphericalangle QPA)$. Betrachten wir nun den äußeren Winkel $\sphericalangle APQ$ in dem Dreieck

$\triangle PAR$ zu dem Strahl $\overrightarrow{AR}$, so folgt nach dem Satz über die äußeren Winkel, dass das Winkelmaß $m(\sphericalangle APQ) > m(\sphericalangle RPA)$ sein muss.

Wir erhalten damit:

$$m(\sphericalangle QPR) \overset{A\in\overrightarrow{RQ}}{=} m(\sphericalangle QPA) \overset{(*)}{=} m(\sphericalangle APQ) > m(\sphericalangle RPA) \overset{A\in\overrightarrow{RQ}}{=} m(\sphericalangle RPQ).$$

$(*)$: Das Dreieck $\triangle PQA$ ist gleichschenklig mit $\overline{PQ} = \overline{PA}$.

Das Größenverhältnis der Winkelmaße überträgt sich nun nach Satz 6.12 auf die Länge der jeweils gegenüberliegenden Seiten, so dass gilt:

$$d(P,R) > d(P,Q).$$

Widerspruch!
Also muss also unter den genannten Voraussetzungen immer auch gelten:

$$\overline{QR} \cong \overline{TU}.$$

$\square$

7 Das Parallelenaxiom

Auch in diesem Kapitel sei eine euklidische Ebene $\mathcal{E}$ mit einer Familie $\mathcal{L}$ von Geraden gegeben, die alle bisher eingeführten Axiome erfüllen.

Definition 7.1. Zwei Geraden $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ heißen *parallel*, falls entweder $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ oder $L_1 = L_2$ ist. Sind zwei Geraden L_1 und L_2 parallel, so schreiben wir $L_1 \| L_2$.

Wir können ein hinreichendes Kriterium dafür angeben, dass zwei Geraden parallel sind:

Satz 7.2. *Sind $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ zwei Geraden, so dass es eine weitere Gerade $M \in \mathcal{L}$ gibt, auf der sowohl L_1 als auch L_2 senkrecht stehen, so ist $L_1 \| L_2$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Wir können nun zeigen:

Satz 7.3. *Ist $L \in \mathcal{L}$ und $P \in \mathcal{E}$. Dann gibt es mindestens eine Gerade $L' \in \mathcal{L}$, so dass $P \in L'$ und $L \| L'$ ist.*

Beweis. Sei M die (nach Satz 6.9 eindeutig bestimmte) Gerade durch P, die senkrecht auf L steht. Es gibt dann wiederum eine Gerade L' mit $P \in L'$, die senkrecht auf M steht.

Dann ist $P \in L'$, und nach dem vorangegangenen Satz ist $L \| L'$. □

Definition 7.4. Seien L_1 und L_2 zwei verschiedene Geraden und M eine weitere Gerade, die L_1 und L_2 in zwei verschiedenen Punkten $P_1 \in L_1$ und $P_2 \in L_2$ schneidet. Seien $Q_1 \in L_1$ und $Q_2 \in L_2$ Punkte in derselben Halbebene bzgl. M und $R_1 \in L_1$ und $R_2 \in L_2$ Punkte in der anderen Halbebene. Dann definieren wir zwei *Paare von Wechselwinkeln* durch:

- $\sphericalangle P_1 Q_1 P_2$ und $\sphericalangle P_2 R_2 P_1$
- $\sphericalangle P_1 R_1 P_2$ und $\sphericalangle P_2 Q_2 P_1$

Anhand der Winkelmaße eines Paares von Wechselwinkeln können wir feststellen, ob zwei Geraden parallel sind.

Satz 7.5. *(Mit den Bezeichnungen wie in der vorangegangenen Definition gilt:)*
Haben in einem Paar von Wechselwinkeln die Winkel dasselbe Winkelmaß, so ist $L_1 \| L_2$.

Beweis. Wir zeigen: Gilt nicht $L_1 \| L_2$, so können die Winkelmaße in beiden Paaren von Wechselwinkeln nicht gleich sein.

Falls L_1 und L_2 nicht parallel sind, so haben sie genau einen Schnittpunkt, den wir P_3 nennen. (Mehr als einen Schnittpunkt können L_1 und L_2 nicht haben, da sie sonst nach dem zweiten Inzidenzaxiom gleich wären, und keinen Schnittpunkt k'̈onnen sie auch nicht haben, da sie sonst nach Definition parallel wären.)

Wir betrachten nun das Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$.

Liegt der Schnittpunkt P_3 von L_1 und L_2 in derselben Halbebene bzgl. M wie Q_1 und Q_2, so gilt: $\overleftrightarrow{P_1Q_1} = \overleftrightarrow{P_1P_3}$ und $\overleftrightarrow{P_2Q_2} = \overleftrightarrow{P_2P_3}$.

Wir haben also:

$\sphericalangle P_1Q_1P_2 = \sphericalangle P_1P_3P_2$. Dieses ist der entfernte Innenwinkel im Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ zu dem äußeren Winkel bzgl. des Strahls $\overrightarrow{P_2P_3}$. (Der äußere Winkel ist $\sphericalangle P_2R_2P_1$.)

Damit ist nach Satz 6.11: $m(\sphericalangle P_2R_2P_1) > m(\sphericalangle P_1Q_1P_2)$, wobei m das vorgegebene Winkelmaß bezeichnet. Also sind die Winkelmaße in dem Paar von Wechselwinkeln nicht gleich.

Entsprechend erhalten wir (durch Vertauschen der Rollen der Indizes 1 und 2):
$m(\sphericalangle P_1R_1P_2) > m(\sphericalangle P_2Q_2P_1)$.

Liegt der Schnittpunkt P_3 von L_1 und L_2 in derselben Halbebene bzgl. M wie R_1 und R_2, so erhalten wir (durch Vertauschen der Rollen von R_1 mit Q_1 und R_2 mit Q_2):

- $m(\sphericalangle P_2Q_2P_1) > m(\sphericalangle P_1R_1P_2)$ und
- $m(\sphericalangle P_1Q_1P_2) > m(\sphericalangle P_2R_2P_1)$

Auch in diesem Fall sind die Winkelmaße in beiden Paaren von Wechselwinkeln nicht gleich. □

Wir führen nun ein weiteres Axiom ein, durch das wir sogar eine Charakterisierung der Parallelität von Geraden erhalten.

Parallelenaxiom

Zu jeder Geraden $L \in \mathcal{L}$ und jedem Punkt $P \notin L$ gibt es genau eine Gerade L' mit $P \in L'$ und $L \| L'$.

Nun setzen wir voraus, dass das Parallelenaxiom gilt.

Satz 7.6. *(Mit den Bezeichnungen wie in der Definition der Paare von Wechselwinkeln gilt:)*
In einem (=jedem) Paar von Wechselwinkeln haben die Winkel genau dann dasselbe Winkelmaß, wenn $L_1 \| L_2$ gilt.

Beweis. Die Hinrichtung ist gerade die Aussage des vorangegangenen Satzes.

Nun zur Rückrichtung:

Sei $L_1 \| L_2$. Wir betrachten den Winkel $\sphericalangle P_1Q_1P_2$. Der Punkt Q_1 liegt in einer Halbebene bzgl. der Geraden M. Wir wählen nun einen Punkt E in der anderen Halbebene mit $m(\sphericalangle P_2EP_1) = m(\sphericalangle P_1Q_1P_2)$. (Das geht nach dem zweiten Winkelmaßaxiom.)

Nach dem vorangegangenen Satz, ist dann $L_1 \| \overleftrightarrow{P_2E}$, und außerdem ist natürlich $P_2 \in \overleftrightarrow{P_2E}$. Nach Voraussetzung ist aber auch $L_1 \| L_2$ und $P_2 \in L_2$. Damit müssen die beiden Geraden $\overleftrightarrow{P_2E}$ und L_2 nach dem Parallelenaxiom gleich sein.

Insbesondere ist damit auch $\sphericalangle P_2EP_1 = \sphericalangle P_2R_2P_1$, und somit $m(\sphericalangle P_2R_1P_1) = m(\sphericalangle P_2EP_1) = m(\sphericalangle P_1Q_1P_2)$.

Durch Vertauschen der Rollen der Indizes 1 und 2 erhalten wir auch $m(\sphericalangle P_1R_2P_2) = m(\sphericalangle P_2Q_2P_1)$. □

Wir erhalten nun eine weitere Charakterisierung der Parallelität zweier Geraden.

Satz 7.7. *Zwei Geraden L_1 und L_2 sind genau dann parallel, wenn jede Gerade M, die senkrecht auf L_1 steht, auch senkrecht auf L_2 steht.*

Beweis. „$\Rightarrow$“:

Sei $L_1 \| L_2$. Dann haben nach dem vorangegangenen Satz die Paare von Wechselwinkeln bzgl. *jeder* Geraden, die die beiden schneidet, dasselbe Winkelmaß. Insbesondere gilt (mit den Bezeichnungen wie oben): $m(\sphericalangle P_1Q_1P_2) = m(P_2R_2P_1)$. Ist nun $L_1 \perp M$, also $m(\sphericalangle P_1Q_1P_2) = 90$, so ist auch $m(P_2R_2P_1) = 90$, also $L_2 \perp M$.

„$\Leftarrow$“:

Wir können nach dem zweiten Winkelmaßaxiom eine Gerade M finden, die senkrecht auf L_1 steht. Nach Voraussetzung steht dann M auch senkrecht auf L_2. Dann folgt mit Satz 7.2, dass $L_1 \| L_2$ ist. □

Wir können nun die Summe der Winkelmaße der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks berechnen:

Satz 7.8. *Die Summe der Winkelmaße der Innenwinkel in jedem Dreieck beträgt 180.*

Beweis. Wir betrachten ein Dreieck $\triangle PQR$ und bezeichnen $\overleftrightarrow{PR} =: L$ und mit L' die (nach dem Parallelenaxiom eindeutig bestimmmte) zu L parallele Gerade durch den Punkt Q.

Wir wählen nun einen Punkt P' auf L', so dass P' in derselben Halbebene bzgl. $\overleftrightarrow{QR}$ liegt wie P, und einen Punkt $R' \in L'$, so dass R' in derselben Halbebene bzgl. $\overleftrightarrow{QP}$ liegt wie R.

Nach dem vierten Winkelmaßaxiom gilt nun

$$m(\sphericalangle QP'R) + m(\sphericalangle QRR') = 180,$$

da P' und R' auf den entgegengesetzten Strahlen $\overrightarrow{QP'}$ und $\overrightarrow{QR'}$ liegen.

Nach dem dritten Winkelmaßaxiom haben wir außerdem

$$m(\sphericalangle QP'R) = m(\sphericalangle QP'P) + m(\sphericalangle QPR),$$

also

$$m(\sphericalangle QP'P) + m(\sphericalangle QPR) + m(\sphericalangle QRR') = 180.$$

Da $L \| L'$, sind die hier auftretenden Winkel genau die Innenwinkel des Dreiecks, denn:

$$m(\sphericalangle QP'P) = m(\sphericalangle PQR),$$

da die beiden Winkel gerade die Wechselwinkel bzgl. der Geraden $\overleftrightarrow{PQ}$ sind, und:

$$m(\sphericalangle QRR') = m(\sphericalangle RPQ),$$

da die beiden Winkel gerade die Wechselwinkel bzgl. der Geraden $\overleftrightarrow{RQ}$ sind.
Insgesamt erhalten wir also:

$$m(\sphericalangle PQR) + m(\sphericalangle QPR) + m(\sphericalangle RPQ) = m(\sphericalangle QP'P) + m(\sphericalangle QPR) + m(\sphericalangle QRR') = 180.$$

$\square$

8 Eigenschaften von Isometrien

Gegeben sei in diesem Abschnitt wieder eine Euklidische Ebene $\mathcal{E}$, die alle bisher eingeführten Axiome erfüllt.

Lemma 8.1. *Ist $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Isometrie, so gilt für jedes Dreieck $\triangle PQR$ (mit $P, Q, R \in \mathcal{E}$), dass*

$$\triangle PQR \equiv \triangle f(P)f(Q)f(R).$$

Beweis. Da f eine Isometrie ist, folgt $\overline{PQ} \cong \overline{f(P)f(Q)}$, $\overline{QR} \cong \overline{f(Q)f(R)}$ und $\overline{RP} \cong \overline{f(R)f(P)}$. Nun folgt die Aussage aus dem SSS-Kongruenzsatz. □

Folgerung 8.2. *Sind f eine Isometrie, $P, Q, R \in \mathcal{E}$ drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und m eine Winkelmaßfunktion auf $\mathcal{E}$, so gilt:*

$$m(\sphericalangle PQR) = m(\sphericalangle f(P)f(Q)f(R)).$$

(Isometrien erhalten also Winkelmaße.)

Beweis. Aus dem vorangegangenen Lemma folgt: $\triangle PQR \equiv \triangle f(P)f(Q)f(R)$. Die Dreiecke sind also reihenfolgen-kongruent. Also stimmen insbesondere auch die Winkelmaße überein: $(\sphericalangle PQR) = m(\sphericalangle f(P)f(Q)f(R))$. □

Später werden wir eine gewisse Umkehrung des Lemmas zeigen:

Satz 8.3. *Sind zwei Dreiecke $\triangle PQR$ und $\triangle P'Q'R'$ reihenfolgen-kongruent, so gibt es genau eine Isometrie $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ mit $f(P) = P'$, $f(Q) = Q'$ und $f(R) = R'$.*

Zunächst aber ein weiterer Satz:

Satz 8.4. *Sind $P, Q \in \mathcal{E}$ zwei verschiedene Punkte und $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Isometrie mit $f(P) = P$ und $f(Q) = Q$, so gilt für jeden Punkt $R \in \overleftrightarrow{PQ}$, dass auch $f(R) = R$ ist.*

Beweis. Falls $R = P$ oder $R = Q$ ist, so ist nichts zu zeigen, da ja nach Voraussetzung $f(R) = f(P) = P = R$ oder $f(R) = f(Q) = Q = R$) ist.

Wir zeigen zunächst, dass unter den Voraussetzungen $f(R) \in \overleftrightarrow{PQ}$ gilt.[10]

Sei nun also $R \neq P$ und $R \neq Q$. Nach der Definition von „zwischen“ liegt nun genau einer der drei Punkte P, Q, R zwischen den beiden anderen. Es gibt zwei wesentliche Fälle:

Fall 1: R liegt zwischen P und Q.
Fall 2: Q liegt zwischen P und R. (Falls P zwischen Q und R liegt, geht der Beweis analog, wir vertauschen einfach die Rollen von P und Q.)

Wäre $f(R) \notin \overleftrightarrow{PQ}$, so hätten wir ein Dreieck $\triangle f(P)f(Q)f(R) = \triangle PQf(R)$.

Zu Fall 1:

[10] Das R „springt“ also bei Anwendung von f nicht von der Geraden herunter.

Wir betrachten die Strecke $\overline{PQ}$ in dem Dreieck. Dann ist nach der Dreiecksungleichung $d(P,Q) < d(P,f(R)) + d(f(R),Q)$, wobei d die vorgegebene Abstandsfunktion auf $\mathcal{E}$ bezeichnet.

Andererseits ist aber auch $d(P,Q) \overset{(*)}{=} d(P,R)+d(R,Q) \overset{(**)}{=} d(f(P),f(R))+d(f(R),f(Q)) \overset{(***)}{=} d(P,f(R)) + d(f(R),Q)$. **Widerspruch!**
$(*)$: R liegt zwischen P und Q
$(**)$: f ist eine Isometrie
$(***)$: $f(P) = P$, $f(Q) = Q$

Zu Fall 2:

Wir betrachten die Strecke $\overline{Pf(R)}$ in dem Dreieck. Dann ist nach der Dreiecksungleichung $d(P,f(R)) < d(P,Q) + d(Q,f(R))$.

Andererseits ist aber auch $d(P,f(R)) \overset{(*)}{=} d(f(P),f(R)) \overset{(**)}{=} d(P,R) \overset{(***)}{=} d(P,Q)+d(Q,R) \overset{(****)}{=} d(P,Q) + d(f(Q),f(R)) \overset{(*****)}{=} d(P,Q) + d(Q,f(R))$. **Widerspruch!**
$(*)$: $f(P) = P$
$(**)$: f ist eine Isometrie
$(***)$: Q liegt zwischen P und R
$(****)$: f ist eine Isometrie
$(*****)$: $f(Q) = Q$

Somit liegt also $f(R)$ tatsächlich auf der Geraden $\overleftrightarrow{PQ}$.

Nun zeigen wir, dass sogar $f(R) = R$ sein muss.

Wäre $R \neq f(R)$, so wäre auch $d(R,f(R)) \neq 0$ und die vier Punkte $P,Q,R,f(R)$ wären verschieden, aber auf einer Geraden.

Wir unterscheiden nun wieder zwei Fälle:

Fall 1: P und Q liegen beide zwischen R und $f(R)$. (Insbesondere können wir annehmen, dass P zwischen R und Q liegt und Q zwischen P und $f(R)$. Ansonsten vertauschen wir die Rollen von R und $f(R)$.)

Dann ist $d(R,f(R)) \overset{(*)}{=} d(R,P) + d(P,f(R)) \overset{(**)}{=} d(R,P) + d(f(P),f(R)) \overset{(***)}{=} d(R,P) + d(P,R) = 2 \cdot d(R,P)$ und analog auch $d(R,f(R)) = 2 \cdot d(R,Q)$.
$(*)$: P liegt zwischen R und $f(R)$
$(**)$: $P = f(P)$
$(***)$: f Isometrie

Damit ist nun $d(R,P) = d(R,Q)$. Andererseits ist $d(R,Q) = d(R,P) + d(P,Q)$, und da $d(P,Q) > 0$, also: $d(R,Q) < d(R,P)$. **Widerspruch!**

Fall 2: Eines von P oder Q liegt nicht zwischen R und $f(R)$. (Wir können davon ausgehen, dass dies P ist; ansonsten vertauschen wir die Rollen von P und Q. Auch können wir annehmen, dass R zwischen P und $f(R)$ liegt; sonst vertauschen wir die Rollen von R und $f(R)$.)

Dann ist $d(P, f(R)) = d(P, R) + d(R, f(R))$, also $d(P, R) < d(P, f(R))$, andererseits aber auch $d(P, R) \overset{(*)}{=} d(f(P), f(R)) \overset{(**)}{=} d(P, f(R))$ **Widerspruch!**
$(*)$: f Isometrie
$(**)$: $f(P) = P$ $\square$

Nun können wir zeigen, dass es keine anderen Isometrien außer der Identität gibt, die drei verschiedene Punkte festlassen, die nicht auf einer Geraden liegen:

Satz 8.5. *Sind $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Isometrie, $P, Q, R \in \mathcal{E}$ drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und gilt außerdem $f(P) = P$, $f(Q) = Q$ und $f(R) = R$, so ist f die Identität auf $\mathcal{E}$, also $f(S) = S$ für alle $S \in \mathcal{E}$.*

Beweis. Nach dem vorangegangenen Satz ist f die Identität auf den beiden Geraden $\overleftrightarrow{PQ}$ und $\overleftrightarrow{PR}$.[11]

Sei nun $S \in \mathcal{E} \backslash (\overleftrightarrow{PQ} \cup \overleftrightarrow{PR})$. Wir bezeichnen mit L_Q die eindeutig bestimmte Gerade, die senkrecht auf $\overleftrightarrow{PQ}$ steht und den Punkt S enthält, und mit L_R die eindeutig bestimmte Gerade, die senkrecht auf $\overleftrightarrow{PR}$ steht und den Punkt S enthält. Weiterhin bezeichnen wir den Schnittpunkt von L_Q und $\overleftrightarrow{PQ}$ mit T_Q, den Schnittpunkt von L_R und $\overleftrightarrow{PR}$ mit T_R.

Die beiden Geraden L_Q und L_R können nicht parallel sein (Übungsaufgabe), weswegen S der eindeutig bestimmte Schnittpunkt ist.

Da f die Winkelmaße erhält und die Identität auf den beiden Geraden $\overleftrightarrow{PQ}$ und $\overleftrightarrow{PR}$ ist, sind nicht nur $\overleftrightarrow{PQ} \perp L_Q$ und $\overleftrightarrow{PR} \perp L_R$, sondern auch $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{f(T_Q)f(S)} = \overleftrightarrow{T_Q f(S)}$ und $\overleftrightarrow{PR} \perp \overleftrightarrow{f(T_R)f(S)} = \overleftrightarrow{T_R f(S)}$.

Da es jeweils nur eine Gerade gibt, die durch einen festen Punkt geht und senkrecht auf einer anderen Geraden steht, ist $L_Q = \overleftrightarrow{T_Q f(S)}$ und $L_R = \overleftrightarrow{T_R f(S)}$. Außerdem liegt der Punkt $f(S)$ dadurch ebenfalls im Durchschnitt $L_Q \cap L_R$. Da die beiden Geraden L_Q und L_R aber nicht parallel sind und $S \in L_Q \cap L_R$, muss nun $f(S) = S$ sein. $\square$

[11] Wir müssen also zeigen, dass auch *alle anderen* Punkte, die nicht auf $\overleftrightarrow{PQ}$ oder $\overleftrightarrow{PR}$ liegen, durch f auch wieder auf sich abgebildet werden.

9 Isometrien im $\mathbb{R}^2$

Wichtige Arten von Isometrien im $\mathbb{R}^2$ haben wir bereits kennengelernt. Dazu gehören Translationen und Drehungen (s. a. Abschnitt 3).

Satz 9.1. *Translationen und Drehungen im $\mathbb{R}^2$ sind bijektiv.*

Beweis. Übungsblatt 10, Aufgabe 3. □

Weiterhin haben wir im Abschnitt 3 auch Spiegelungen an der x-Achse und an der y-Achse betrachtet. Nun kann man sich aber auch andere Geraden im $\mathbb{R}^2$ wählen und an diesen spiegeln. Im Folgenden werden wir diese Spiegelungen explizit beschreiben.

Zunächst betrachten wir Spiegelungen an Geraden, die durch den Nullpunkt $\binom{0}{0} =: O$ gehen.

Geraden durch den Nullpunkt lassen sich durch die Angabe eines weiteren Punktes im $\mathbb{R}^2$ beschreiben.

Definition 9.2. Gegeben sei eine Gerade $L := \overleftrightarrow{OQ}$ mit $Q = \binom{x_1}{y_1} \in \mathbb{R}^2$. Die *Spiegelung* $S_L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Geraden L ist dann gegeben durch

$$S_L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \frac{x \cdot x_1 + y \cdot y_1}{x_1^2 + y_1^2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Definition 9.3. Ist eine beliebige Gerade $M := \overleftrightarrow{PQ}$ gegeben, so führen wir für die Spiegelung an der Geraden M zunächst eine Translation des $\mathbb{R}^2$ um $-P$ durch, dann die Spiegelung an der entsprechend verschobenen Geraden und dann eine Translation um P.

Explizit lässt sich damit die Spiegelung $S_M \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an einer Geraden $M = \overleftrightarrow{PQ}$ mit $P = \binom{x_0}{y_0}$ und $Q = \binom{x_1}{y_1}$ berechnen als:

$$S_M\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \frac{(x - x_0) \cdot (x_1 - x_0) + (y - y_0) \cdot (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_0 - x \\ 2y_0 - y \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

Satz 9.4. *Jede Spiegelung S_M im $\mathbb{R}^2$ einer der Geraden M ist bijektiv, und die Umkehrabbildung ist wiederum S_M.*

Beweis. Nachrechnen. □

Wir können nun zeigen, dass jede Isometrie im $\mathbb{R}^2$ bijektiv ist. Dazu benutzen wir u. a., dass wir bereits wissen, dass die Hintereinanderschaltung von Isometrien wieder eine Isometrie liefert. Durch den Aufbau des Beweises erhalten wir sogar, dass sich jede Isometrie im $\mathbb{R}^2$ als Hintereinanderschaltung von Spiegelungen, Drehungen und Translationen schreiben lässt.

Satz 9.5. *Jede Isometrie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist bijektiv.*

Beweis. Wir betrachten die Punkte $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ sowie deren Bilder unter der Abbildung f. Dann konstruieren wir aus f mit Hilfe einer Hintereinanderschaltung von Translationen, Drehungen und ggf. Spiegelungen eine Abbildung, die drei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ festhält, somit (nach Satz 8.5) also nur die Identität sein kann. Damit folgt dann, dass f bijektiv ist (und sich tatsächlich aus einer Hintereinanderschaltung dieser drei Abbildungsarten schreiben lässt).

Wir benennen $P := f\left(\binom{0}{0}\right)$.

Wir bilden nun $f_1 := T_{PO} \circ f$, wobei T_{PO} die Translation ist, die den Punkt P auf den Nullpunkt O verschiebt. Damit ist

$$f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = T_{PO} \circ f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = T_{PO}(P) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

f_1 ist als Hintereinanderschaltung zweier Isometrien wiederum eine Isometrie, es gilt also

$$\overline{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \overset{(*)}{\cong} \overline{f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) f_1\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)} \overset{(**)}{\cong} \overline{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} f_1\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)}.$$

$(*)$: f_1 Isometrie
$(**)$: $f_1\left(\binom{0}{0}\right) = \binom{0}{0}$

Damit gibt es eine Drehung D_α um ein Winkelmaß α, so dass $D_\alpha\left(f_1\left(\binom{1}{0}\right)\right) = \binom{1}{0}$ ist.

Wir setzen nun $f_2 := D_\alpha \circ f_1 = D_\alpha \circ T_{PO} \circ f$.

Nach Konstruktion lässt f_2 nun die beiden Punkte $\binom{0}{0}$ und $\binom{1}{0}$ fest, denn:

$$f_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = D_\alpha \circ f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \overset{(*)}{=} D_\alpha\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \overset{(**)}{=} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$(*)$: da $f_1\left(\binom{0}{0}\right) = \binom{0}{0}$
$(**)$: da D_α als Drehung um $\binom{0}{0}$ den Nullpunkt fest lässt

und

$$f_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = D_\alpha \circ f_1\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

nach Definition von D_α.

Da f_2 als Hintereinanderschaltung zweier Isometrien wiederum eine Isometrie ist und Isometrien Winkelmaße erhalten, gilt für das Winkelmaß m also:

$$m\left(\sphericalangle f_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) f_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) f_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right) \overset{(*)}{=} m\left(\sphericalangle \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} f_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right)$$
$$= m\left(\sphericalangle \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 90.$$

(∗): da $f_2\left(\binom{0}{0}\right) = \binom{0}{0}$ und $f_2\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{0}{1}$

Damit liegt der Punkt $f_2\left(\binom{0}{1}\right)$ also auf der (eindeutig bestimmten) Geraden, die den Punkt $\binom{0}{0}$ enthält und senkrecht auf der Geraden $\overleftrightarrow{\binom{0}{0}\binom{1}{0}}$ (=„x-Achse“) steht. (Diese Gerade ist die y-Achse.)

Außerdem ist f_2 als Isometrie abstandserhaltend, es gilt also:

$$\overline{f_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} \overset{(*)}{\cong} \overline{f_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) f_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)} \overset{(**)}{\cong} \overline{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}.$$

(∗): da $f_2\left(\binom{0}{0}\right) = \binom{0}{0}$
(∗∗): f_2 Isometrie

Daraus folgt nun, dass entweder $f_2\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{0}{1}$ oder $f_2\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{0}{-1}$ sein muss.

Wir setzen nun $f_3 := f_2$, falls $f_2\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{0}{1}$ ist, und $f_3 := S_{\overleftrightarrow{\binom{0}{0}\binom{1}{0}}} \circ f_2$, falls $f_2\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{0}{-1}$ ist, wobei hier $S_{\overleftrightarrow{\binom{0}{0}\binom{1}{0}}}$ die Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $\overleftrightarrow{\binom{0}{0}\binom{1}{0}}$ (=„x-Achse“) ist.

Damit gilt:

$$f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ f_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ f_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Somit ist f_3 als Hintereinanderschaltung von Isometrien eine Isometrie, die außerdem drei verschiedene Punkte festlässt. Nach Satz 8.5 kann sie daher nur die Identität sein.

Wir haben also im ersten Fall, wenn $f_2\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{0}{1}$ ist,

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} = f_3 = D_\alpha \circ T_{PO} \circ f.$$

Damit ist

$$f = T_{OP} \circ D_{-\alpha},$$

denn die Umkehrabbildung zu T_{PO} ist T_{OP} und die Umkehrabbildung zu D_α ist $D_{-\alpha}$.
Im zweiten Fall, wenn $f_2\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{0}{-1}$ ist, haben wir:

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} = f_3 = S_{\overleftrightarrow{\binom{0}{0}\binom{1}{0}}} \circ D_\alpha \circ T_{PO} \circ f.$$

Damit ist

$$f = T_{OP} \circ D_{-\alpha} \circ S_{\overleftrightarrow{\binom{0}{0}\binom{1}{0}}},$$

denn die Umkehrabbildung zu T_{PO} ist T_{OP}, die Umkehrabbildung zu D_α ist $D_{-\alpha}$ und die Umkehrabbildung zu $S_{\overleftrightarrow{\binom{0}{0}\binom{1}{0}}}$ ist sie selbst.

Da alle auftretenden Abbildungen (Translationen, Drehungen und Spiegelungen) bijektiv sind, ist f als Hintereinanderschaltung derselben auch bijektiv. □

Wir können nun folgenden Satz zeigen:

Satz 9.6. *Sind zwei Dreiecke $\triangle PQR$ und $\triangle P'Q'R'$ im $\mathbb{R}^2$ reihenfolgen-kongruent, so gibt es genau eine Isometrie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(P) = P'$, $f(Q) = Q'$ und $f(R) = R'$.*

Beweis. Zur Existenz:

Wir konstruieren uns eine Abbildung f mit den gewünschten Eigenschaften durch Hintereinanderschaltung von Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Wir setzen $f_1 := T_{PP'}$, die Translation des $\mathbb{R}^2$, die P auf P' abbildet. Damit gilt natürlich $f_1(P) = T_{PP'}(P) = P'$.

Nun wissen wir, dass gilt:

$$\overline{Q'P'} \overset{(*)}{\cong} \overline{QP} \overset{(**)}{\cong} \overline{f_1(Q)\, f_1(P)} \overset{(***)}{=} \overline{f_1(Q)\, P'}.$$

$(*)$: $\triangle PQR$ und $\triangle P'Q'R'$ sind reihenfolgen-kongruent.
$(**)$: f_1 ist als Translation eine Isometrie.
$(***)$: nach Definition von $f_1 := T_{PP'}$

Damit gibt es eine Drehung $D_{\beta,P'}$ mit Drehwinkel β um den Punkt P', so dass $D_{\beta,P'}(f_1(Q)) = Q'$ ist.

Wir setzen nun $f_2 := D_{\beta,P'} \circ f_1$. Dann gilt:

$$f_2(P) = D_{\beta,P'} \circ f_1(P) = D_{\beta,P'}(P') = P',$$

da $D_{\beta,P'}$ eine Drehung um P' ist, also insbesondere P' fest lässt, und

$$f_2(Q) = D_{\beta,P'} \circ f_1(Q) \overset{(*)}{=} Q'$$

nach Definition von $D_{\beta,P'}$.

Daher ist

$$\triangle P'Q'f_2(R) = \triangle f_2(P)f_2(Q)f_2(R) \overset{(*)}{\equiv} \triangle PQR \overset{(**)}{\equiv} \triangle P'Q'R'$$

$(*)$: f_2 erhält als Isometrie die Reihenfolgen-Kongruenz
$(**)$: nach Voraussetzung.

Wir bezeichnen mit $S_{\overleftrightarrow{P'Q'}}$ die Spiegelung an der Geraden $\overleftrightarrow{P'Q'}$.
Es sind R' und $S_{\overleftrightarrow{P'Q'}}(R')$ die einzigen beiden Punkte im $\mathbb{R}^2$, die als $f_2(R)$ auftreten können, da nur für diese beiden die vorgegebenen Winkelmaße m stimmen:

$$m(\sphericalangle P'Q'f(R)) = m(\sphericalangle P'Q'R')$$

und

$$m(\sphericalangle Q'P'f(R)) = m(\sphericalangle Q'P'R').$$

Falls $f_2(R) = R'$ ist, so haben wir mit f_2 (als Hintereinanderschaltung zweier Isometrien) eine Isometrie des $\mathbb{R}^2$ gefunden, für die $f_2(P) = P'$, $f_2(Q) = Q'$ und $f_2(R) = R'$ gilt.

Sonst setzen wir $f_3 := S_{\overleftrightarrow{P'Q'}} \circ f_2$, und dann ist f_3 (als Hintereinanderschaltung dreier Isometrien) eine Isometrie des $\mathbb{R}^2$, für die gilt: $f_3(P) = S_{\overleftrightarrow{P'Q'}} \circ f_2(P) = S_{\overleftrightarrow{P'Q'}}(P') = P'$, $f_3(Q) S_{\overleftrightarrow{P'Q'}} \circ f_2(Q) = S_{\overleftrightarrow{P'Q'}}(Q') = Q'$ und $f_3(R) = S_{\overleftrightarrow{P'Q'}} \circ f_2(R) = S_{\overleftrightarrow{P'Q'}} \circ S_{\overleftrightarrow{P'Q'}}(R') = R'$, da $\left(S_{\overleftrightarrow{P'Q'}}\right)^{-1} = S_{\overleftrightarrow{P'Q'}}$ ist.

Zur Eindeutigkeit:

Angenommen, wir haben zwei Isometrien f und g, die die Punkte entsprechend der Voraussetzung abbilden. Dann ist insbesondere f bijektiv, und es gilt:

$$f^{-1} \circ g(P) = f^{-1}(P') = P,$$

$$f^{-1} \circ g(Q) = f^{-1}(Q') = Q$$

und

$$f^{-1} \circ g(R) = f^{-1}(R') = R.$$

Die Abbildung $f^{-1} \circ g$ ist also (als Hintereinanderschaltung zweier Isometrien) eine Isometrie des $\mathbb{R}^2$, die drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, fest lässt. Also kann sie nach Satz 8.5 nur die Identität sein. $f^{-1} \circ g$ die Identität auf $\mathbb{R}^2$. Daraus folgt: $f = f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} = f \circ f^{-1} \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \circ g = g$. □

10 Algebraische Eigenschaften von Isometrien

Im vorangegangenen Kapitel haben wir gesehen, dass sich jede Isometrie des $\mathbb{R}^2$ schreiben lässt als eine Hintereinanderschaltung von Spiegelungen, Drehungen und Translationen. Um etwas über die algebraische Struktur der Menge aller Isometrien auf $\mathbb{R}^2$ aussagen zu können, definieren wir:

Definition 10.1. Eine *Gruppe* ist eine nicht-leere Menge M mit einer Verknüpfung $\bullet : M \times M \to M$, so dass gilt:

1. Für alle $m_1, m_2, m_3 \in M$ gilt: $(m_1 \bullet m_2) \bullet m_3 = m_1 \bullet (m_2 \bullet m_3)$. (Assoziativgesetz)
2. Es gibt ein Element $e \in M$, so dass für alle $m \in M$ gilt: $e \bullet m = m \bullet e = m$. (Existenz eines *neutralen Elementes*)
3. Zu jedem Element $m \in M$ gibt es ein Element $m' \in M$, so dass gilt: $m \bullet m' = m' \bullet m = e$. (Existenz von *inversen Elementen*)

Beispiel 10.2. *Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen bildet mit der Addition als Verknüpfung und der 0 als neutralem Element eine Gruppe. Das zu $z \in \mathbb{Z}$ inverse Element ist $-z$.*

Wir betrachten nun die Menge aller Isometrien im $\mathbb{R}^2$.

Satz 10.3. *Die Menge aller Isometrien des $\mathbb{R}^2$ bildet mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen als Verknüpfung und der Identität auf $\mathbb{R}^2$ als neutralem eine Gruppe. Das zu einer Isometrie f inverse Element ist die Umkehrabbildung f^{-1} zu f.*

Beweis. Einfach nachrechnen. □

Definition 10.4. Wir nennen eine Teilmenge H einer Gruppe G (mit der Verknüpfung $\bullet\colon G \times G \to G$) eine *Untergruppe* von G, wenn

- $H \neq \emptyset$ ist,
- für alle h_1, h_2 gilt: $h_1 \bullet h_2 \in H$ und
- für alle $h \in H$ ist auch das zu h inverse Element $h^{-1} \in H$.

Wir können nun zwei Untergruppen der Gruppe der Isometrien des $\mathbb{R}^2$ angeben:

Satz 10.5. *Sei $\mathcal{T}(2)$ die Menge aller Translationen des $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{T}(2)$ ist eine Untergruppe der Gruppe der Isometrien des $\mathbb{R}^2$.*

Beweis. $\mathcal{T}(2)$ ist nicht leer, denn $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} = T_{O,O} \in \mathcal{T}(2)$. (Hier bezeichnet $T_{O,O}$ die Translation des $\mathbb{R}^2$, die den Nullpunkt O auf den Nullpunkt verschiebt.)

Sind $T_{PQ}, T_{RS} \in \mathcal{T}(2)$ zwei Translationen im $\mathbb{R}^2$, so ist auch $T_{PQ} \circ T_{RS} = T_{R+P,S+Q} \in \mathcal{T}(2)$, denn:

$$T_{PQ} \circ T_{RS}(M) = T_{PQ}(M+S-R) = M+S-R+Q-P = M+(S+Q)-(R+P) = T_{R+P,S+Q}(M)$$

für alle $M \in \mathbb{R}^2$.

Wie wir in Übungsaufgabe 3, Blatt 10, gesehen haben, ist die Umkehrabbildung zu einer Translation T_{PQ} die Abbildung T_{QP}. Also ist mit $T_{PQ} \in \mathcal{T}(2)$ auch $T_{PQ}^{-1} = T_{QP} \in \mathcal{T}(2)$. □

Definition 10.6. Die *orthogonale Gruppe* $\mathcal{O}(2)$ im $\mathcal{R}^2$ ist gegeben durch

$$\mathcal{O}(2) := \{f \text{ Isometrie im } \mathbb{R}^2 \mid f(O) = O\},$$

wobei $O \in \mathbb{R}^2$ den Nullpunkt $\binom{0}{0}$ bezeichnet.

Dass es sich hierbei tatsächlich um eine Untergruppe der Isometrien des $\mathbb{R}^2$ (und damit um eine Gruppe) handelt, zeigt der folgende Satz:

Satz 10.7. *$\mathcal{O}(2)$ ist eine Untergruppe der Gruppe der Isometrien des $\mathbb{R}^2$.*

Beweis. $\mathcal{O}(2)$ ist nicht leer, denn $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \in \mathcal{O}(2)$, denn natürlich ist $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ eine Isometrie, die den Nullpunkt fest lässt, da ja $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(O) = O$ ist.

Sind $f, g \in \mathcal{O}(2)$, so ist auch $f \circ g \in \mathcal{O}(2)$, denn:

$$f \circ g(O) = f(O) = O.$$

Ist $f \in \mathcal{O}(2)$, so muss auch $f^{-1} \in \mathcal{O}(2)$ sein, denn es gilt:

$$f^{-1}(O) = f^{-1} \circ f(O) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(O) = O.$$

□

A Nachtrag zu konvexen Mengen

Wir hatten in Kapitel 4 folgende Definition eingeführt.

Definition A.1. Eine Teilmenge A der Ebene $\mathcal{E}$ heißt *konvex*, falls für beliebige Punkte $P, Q \in A$ auch $\overline{PQ} \subseteq A$ ist.

Um aber im Beispiel des $\mathbb{R}^2$ mit der angegebenen Familie

$$\mathcal{L} := \{L_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0\}$$

von Geraden $L_{a,b,c} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ zu entscheiden, ob die Verbindungsstrecke $\overline{PQ}$ für zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ in einer vorgegebenen Teilmenge A des $\mathbb{R}^2$ liegt, muss man aber wissen, wie man die Verbindungsstrecke genau beschreiben kann.

Zunächst beschreiben wir für zwei vorgegebene Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ die (nach dem zweiten Inzidenzaxiom eindeutig bestimmte) Gerade $\overleftrightarrow{PQ}$, die durch P und Q geht:

Die Gerade $\overleftrightarrow{PQ}$ ist dadurch festgelegt, dass wir wissen, dass der Punkt P auf der Geraden liegt und sie eine gewisse Richtung hat, nämlich so, dass der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ auf der Geraden liegt.

Wir bezeichnen den Nullpunkt $\binom{0}{0}$ mit O. Wir verschieben zunächst alle Punkte auf der Geraden $\overleftrightarrow{PQ}$ um $-P$. Dann geht die so entstehende Gerade $\overleftrightarrow{(P-P)(Q-P)} = \overleftrightarrow{O(Q-P)}$ natürlich durch den Punkt O.

Die Punkte auf der Geraden $\overleftrightarrow{O(Q-P)}$ lassen sich beschreiben als

$$\{t \cdot (Q - P) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Nun verschieben wir die Gerade $\overleftrightarrow{O(Q-P)}$ wieder zurück um P. Damit lassen sich nun alle Punkte auf der Geraden $\overleftrightarrow{PQ}$ beschreiben durch

$$\{P + t \cdot (Q - P) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Die *Verbindungsstrecke* $\overline{PQ}$ ist dann gegeben durch

$$\{P + t \cdot (Q - P) \mid t \in [0, 1]\}.$$

A.1 Mögliche Lösung zum zweiten Teil der Aufgabe 3, Übungsblatt 5

Wenn wir nun zeigen möchten, dass die Vereinigungsmenge zweier konvexer Mengen nicht immer konvex ist, müssen wir uns zwei konkrete Mengen im $\mathbb{R}^2$ mit zwei Punkten darin aussuchen und zeigen, dass die Verbindungsstrecke im obigen Sinne Punkte enthält, die nicht in den beiden Mengen vorkommen.

Wir setzen nun

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid d((0,0),(x,y)) \leq \frac{1}{3}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{3}\right\}$$

und

$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid d((1,0),(x,y)) \leq \frac{1}{3}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq \frac{1}{3}\right\},$$

wobei d den euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Dann ist offenbar $(0,0) \in A$, da $\sqrt{0^2+0^2} = 0 \leq \frac{1}{3}$, und $(1,0) \in B$, da $\sqrt{(1-1)^2+0^2} = 0 \leq \frac{1}{3}$.

Weiterhin ist $\left(\frac{1}{2},0\right) \in \overline{(0,0),(1,0)}$, denn $\overline{(0,0),(1,0)} = \{t \cdot (1,0) \mid t \in [0,1]\} = \{(t,0) \mid t \in [0,1]\}$.

Jedoch ist $\left(\frac{1}{2},0\right) \notin A \cup B$, da $\sqrt{(\frac{1}{2})^2+0^2} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, also $\left(\frac{1}{2},0\right) \notin A$, und $\sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+0^2} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, also $\left(\frac{1}{2},0\right) \notin B$.