3 Hyperbolische Geometrie

[...]

Im Folgenden betrachten wir nun spezielle gebrochen-lineare Abbildungen, nämlich solche, für die (mit den Bezeichnungen $\varphi_{a,b,c,d}$ wie oben) die Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind, so dass gilt:

$$ad - bc = 1.$$

Der folgenden Satz liefert uns einige Eigenschaften von gebrochen-linearen Abbildungen, mit Hilfe derer wir Kongruenz von Strecken und Winkeln im Poincaré-Modell der oberen Halbebene definieren können.

Satz 3.11. *Sei* $\varphi_{a,b,c,d} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ *eine gebrochen-lineare Abbildung.*

- *Ist* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *mit* $ad - bc = 1$*, so liefert* $\varphi_{a,b,c,d}$ *eine bijektive Abbildung der oberen Halbebene in sich.*
- *Ist* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *mit* $ad - bc = 1$ *und* $\varphi_{a,b,c,d}\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{0}{1}$*, so ist* $d = a$ *und* $c = -b$*.*
- *Sind* P, Q *Punkte in der oberen Halbebene mit* $P \neq Q$*, so gibt es* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *mit* $ad - bc = 1$*, so dass*
$$\varphi_{a,b,c,d}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
und
$$\varphi_{a,b,c,d}(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
mit $y_1 > 1$*.*

  [Diese Abbildung ist eindeutig, denn es gilt:]

  Ist $\varphi_{a',b',c',d'}$ *eine gebrochen-lineare Abbildung mit* $(a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$ *und* $a'd' - b'c' = 1$ *sowie*
$$\varphi_{a',b',c',d'}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
und
$$\varphi_{a',b',c',d'}(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
mit $y_2 > 1$*, so ist* $(a', b', c', d') = (a, b, c, d)$ *oder* $(a', b', c', d') = (-a, -b, -c, -d)$*.*

(ohne Beweis)

Einige Kommentare:

Zum ersten Punkt: Dass die Abbildung $\varphi_{a,b,c,d}$ eine bijektive Abbildung bildet, haben wir bereits in Satz 3.10 gesehen. Allerdings ist die Abbildung $\varphi_{a,b,c,d}$ im Fall $c \neq 0$ nicht auf ganz $\mathbb{C}$ definiert, und ihr Bild ist auch nicht ganz $\mathbb{C}$. Es fehlt jeweils ein Punkt, so dass wir diese beiden aufeinander abbilden können, um eine bijektive Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zu erhalten. Dass die Abbildungen die obere Halbebene in sich überführen, haben wir bereits auf Übungsblatt 8, Aufgabe 3, gesehen.

Zum dritten Punkt: Die Abbildung $\varphi_{a',b',c',d'}$ ist dieselbe wie $\varphi_{a,b,c,d}$, denn es ist:

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(-1)\cdot(az+b)}{(-1)\cdot(cz+d)} = \frac{-az+(-b)}{-cz+(-d)}$$

für alle $a, b, c, d, z \in \mathbb{C}$.

Der folgende Satz zeigt uns, dass Geraden auf Geraden abgebildet werden, die Zwischenrelation erhalten bleibt, weiterhin, dass es genau eine der Abbildungen gibt, die wir betrachten, die Strahlen in entsprechende Strahlen überführen.

Satz 3.12. *Sei* $E := \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$, $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \dot{\cup} \mathcal{G}_2$ *wie oben und* $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_1 \dot{\cup} \mathcal{Z}_2$ *wie oben,* $\varphi_{a,b,c,d}$ *eine gebrochen-lineare Transformation (Bez. wie oben). Dann gilt:*

- *Ist* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *mit* $ad - bc = 1$ *und* $g \in \mathcal{G}$, *so ist* $\varphi_{a,b,c,d}(g) \in \mathcal{G}$.
- *Ist* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *mit* $ad - bc = 1$ *und* $(P, Q, R) \in \mathcal{Z}$, *so ist*

  $$(\varphi_{a,b,c,d}(P), \varphi_{a,b,c,d}(Q), \varphi_{a,b,c,d}(R)) \in \mathcal{Z}.$$

- *Sind* $P, Q, P', Q' \in E$, $P \neq Q$ *und* $P' \neq Q'$, *so gibt es genau eine gebrochen-lineare Abbildung* $\varphi_{a,b,c,d}$ *mit* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *und* $ad - bc = 1$, *so dass gilt:*

  $$\varphi_{a,b,c,d}(P) = P'$$

  und

  $$\varphi_{a,b,c,d}(S(P, Q)) = S(P', Q'),$$

  wobei $S(P, Q)$ *den Strahl ausgehend vom Punkt* P *in Richtung* Q *bezeichnet (*$S(P', Q')$ *entsprechend).*

(ohne Beweis)

Folgerung 3.13. *Sind* P, P' *Punkte und* g, g' *Geraden in der oberen Halbebene mit* $P \in g$ *und* $P' \in g'$, *so gibt es* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *mit* $ad - bc = 1$, *so dass*

$$\varphi_{a,b,c,d}(P) = P'$$

und

$$\varphi_{a,b,c,d}(g) = g'$$

ist.

Wir definieren jetzt die Kongruenz von Strecken und Winkeln in der oberen Halbebene:

Definition 3.14. E, $\mathcal{G}$ und $\mathcal{Z}$ wie oben, $\varphi_{a,b,c,d}$ gebrochen-lineare Transformation (Bez. wie oben).
Eine Strecke ist gegeben durch zwei Punkte $P, Q \in E$.
Wir sagen, dass zwei Strecken $(P,Q), (P',Q') \in E \times E$ *kongruent* sind, wenn es $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ mit $ad - bc = 1$ gibt, so dass

$$\varphi_{a,b,c,d}(P) = P'$$

und

$$\varphi_{a,b,c,d}(Q) = Q'$$

ist.

Wir schreiben:

$$(P,Q) \cong (P',Q').$$

Dieses liefert eine Äquivalenzrelation auf $E \times E$.[1]

Definition 3.15. E, $\mathcal{G}$ und $\mathcal{Z}$ wie oben, $\varphi_{a,b,c,d}$ gebrochen-lineare Transformation (Bez. wie oben).
Ein Winkel ist gegeben durch drei Punkte $P, Q, R \in E$, die nicht auf einer Geraden liegen.
Wir sagen, dass zwei Winkel $\angle PQR, \angle P'Q'R' \in E \times E \times E$ *kongruent* sind, wenn es $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ mit $ad - bc = 1$ gibt, so dass

$$\varphi_{a,b,c,d}(Q) = Q'$$

ist und weiterhin

$$\varphi_{a,b,c,d}(P) \in S(Q',P') \quad \text{und} \quad \varphi_{a,b,c,d}(R) \in S(Q',R')$$

oder

$$\varphi_{a,b,c,d}(P) \in S(Q',R') \quad \text{und} \quad \varphi_{a,b,c,d}(R) \in S(Q',P')$$

ist.

Wir schreiben:

$$\angle PQR \simeq \angle P'Q'R'.$$

Dieses liefert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel in der oberen Halbebene.

[1] Insbesondere braucht man, um das zu zeigen, Satz 3.10. Jede Strecke ist zu sich selbst kongruent (wähle als Abbildung $\varphi_{1,0,0,1}$); ist eine Strecke kongruent zu einer anderen, so ist die andere auch kongruent zu der einen (wähle hierzu als gebrochen-lineare Abbildung die Umkehrabbildung der benutzten gebrochen-linearen Abbildung); ist eine Strecke kongruent zu einer zweiten und die zweite zu einer dritten, so ist auch die erste kongruent zur dritten (wähle als gebrochen-lineare Abbildung die Hintereinanderschaltung der beiden benutzten gebrochen-linearen Abbildungen).

Bemerkung 3.16. *Die Definition der Kongruenz von Strecken liefert uns eine Möglichkeit der „Längenmessung" in der oberen Halbebene. Wenn zwei Punkte P, Q in der oberen Halbebene gegeben sind, könnten wir den hyperbolischen Abstand zwischen den beiden Punkten dadurch definieren, dass wir uns eine gebrochen-lineare Abbildung $\varphi_{a,b,c,d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc = 1$ nehmen, die P auf $\binom{0}{1}$ und Q auf $\binom{0}{y_1}$ mit $y_1 > 1$ abbildet, die nach Satz 3.11 existiert und eindeutig ist. Den hyperbolischen Abstand würden wir dann definieren als den euklidischen Abstand der beiden Bildpunkte $\binom{0}{1}$ und $\binom{0}{y_1}$.*

Nachteil dieser Definition ist, dass wir wirklich erst einmal die Parameter a, b, c, d bzw. die gebrochen-lineare Abbildung bestimmen müssten, die die Punkte entsprechend abbildet, und auch nicht klar wäre, dass das wirklich eine Abstandsfunktion liefern würde – das tut es nämlich nicht *(s.a. folgendes Kapitel)!!*

4 Längenmessung im Poincaré-Modell der oberen Halbebene

Um Längen für Strecken in der oberen Halbebene zu definieren, benutzen wir eine Konstruktion in den komplexen Zahlen, das so genannte Doppelverhältnis.

Definition 4.1. Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ mit $\{z_1, z_2\} \cap \{z_3, z_4\} = \emptyset$.
Dann definieren wir das *Doppelverhältnis von* z_1, z_2, z_3, z_4 durch

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \in \mathbb{C}.$$

Beispiel 4.2.

$$DV(1, 2, -1, 4) = \frac{1 - (-1)}{2 - (-1)} : \frac{1 - 4}{2 - 4} = \frac{2}{3} : \frac{-3}{-2} = \frac{4}{9}$$

Bemerkung 4.3. *Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ mit $\{z_1, z_2\} \cap \{z_3, z_4\} = \emptyset$. Dann gilt:*

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(z_2, z_1, z_3, z_4)^{-1} = DV(z_1, z_2, z_4, z_3)^{-1}.$$

Beweis. Durchrechnen! □

Wir wollen das Doppelverhältnis nutzen, um hyperbolische Längen zu definieren. Da wir den Logarithmus auf ein Doppelverhältnis anwenden wollen, müssen wir sicherstellen, dass die Zahl, die wir erhalten, nicht nur komplex, sondern reell und positiv ist. Der folgende Satz liefert eine Charakterisierung der Bedingung:

Satz 4.4. *Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 \neq z_2$ und $z_1 \neq z_3$ und z_2, z_3, z_4 paarweise verschieden.*

Dann ist $DV(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn gilt:

Es gibt $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, so dass $\|z_j - z_0\| = r$ für alle $j = 1, 2, 3, 4$ ist, wobei $\| - \|$ den euklidischen Abstand bezeichnet, [2] *oder*
es gibt $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 \neq 0$, so dass gilt:

$$a \; Re \; z_j + b \; Im \; z_j + c = 0$$

für alle $j = 1, 2, 3, 4$[3].

Weiterhin gilt:

$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$ genau dann, wenn gilt:

Es gibt einen Weg auf der Kreislinie, der die Punkte z_3 und z_4 verbindet, ohne dass dieser Weg einen der Punkte z_1 oder z_2 trifft (im ersten Fall oben), oder
z_3 und z_4 liegen beide (euklidisch) zwischen z_1 und z_2 bzw. z_3 und z_4 liegen beide nicht (euklidisch) zwischen z_1 und z_2 (im zweiten Fall oben).

(ohne Beweis)

Wir nutzen nun das Doppelverhältnis, um Abstände zwischen zwei Punkten $P = \binom{x_1}{y_1}$ und $Q = \binom{x_2}{y_2}$ in der oberen Halbebene zu definieren. (Dann ist insbesondere $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$.)

Definition 4.5. Falls wir zwei Punkte P und Q wie oben haben, können wir sie als Elemente in $\mathbb{C}$ auffassen. Nach dem ersten Inzidenzaxiom gibt es, falls $P \neq Q$ ist, genau eine Gerade in der oberen Halbebene, die diese beiden Punkte enthält. Diese betrachten wir.
Entweder ist die Gerade nun von der „zweiten Form“, also

$$g_{a,r} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = r, \quad y > 0 \right\}$$

mit $a, r \in \mathbb{R}$ und $r > 0$, oder sie ist von der „ersten Form“, falls $x_1 = x_2$, also

$$g_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x = a, \quad y > 0 \right\},$$

wobei $a = x_1 \in \mathbb{R}$ sein muss.
Im ersten Fall definieren wir den *hyperbolischen Abstand $\tilde{d}$ zwischen P und Q* durch

$$\tilde{d}(P, Q) := |\log \mathrm{DV}(P, Q, \begin{pmatrix} a-r \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+r \\ 0 \end{pmatrix})|,$$

im zweiten Fall und dem Spezialfall, dass $P = Q$ ist, durch

$$\tilde{d}(P, Q) := |\log \frac{P - \binom{a}{0}}{Q - \binom{a}{0}}|.$$

[2] D. h., alle z_j liegen auf einem euklidischen Kreis.
[3] D. h., alle z_j liegen auf einer euklidischen Geraden.

Damit die Definition sinnvoll ist, müssen wir sicherstellen, dass der Ausdruck, auf den wir den Logarithmus anwenden, positiv ist.

Im ersten Fall können wir das, da die beiden letzten Punkte diejenigen Punkte sind, wo die Kreislinie, auf der P und Q liegen, die x-Achse schneidet. Damit haben wir auf der unteren Hälfte der Kreislinie einen Weg von $\binom{a-r}{0}$ zu $\binom{a+r}{0}$, der weder P noch Q trifft, denn die beiden Punkte P und Q liegen ja in der oberen Halbebene, während die untere Hälfte der Kreislinie in der unteren Halbebene liegt.

Im zweiten Fall rechnet man einfach durch:

$$\frac{P - \binom{a}{0}}{Q - \binom{a}{0}} = \frac{\binom{a}{y_1} - \binom{a}{0}}{\binom{a}{y_2} - \binom{a}{0}} = \frac{\binom{0}{y_1}}{\binom{0}{y_2}} = \frac{y_1 \cdot \binom{0}{1}}{y_2 \cdot \binom{0}{1}} = \frac{y_1}{y_2} > 0,$$

da $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ und $y_1, y_2 > 0$ nach Voraussetzung.

Der folgende Satz liefert nun, dass es sich bei der Definition des hyperbolischen Abstandes tatsächlich um eine Abstandsfunktion handelt, und dass der so definierte Abstand kompatibel ist mit der Kongruenz von Strecken, wie wir sie definiert hatten.

Satz 4.6. *Sei $\tilde{d}$ wie oben definiert. Dann gilt:*

$$\tilde{d}(P,Q) \geq 0$$

für alle P, Q, die Punkte in der oberen Halbebene sind, und

$$\tilde{d}(P,Q) = 0$$

genau dann, wenn $P = Q$ ist.

$$\tilde{d}(P,Q) = \tilde{d}(Q,P)$$

für alle P, Q, die Punkte in der oberen Halbebene sind.

$$\tilde{d}(P,Q) \leq \tilde{d}(P,R) + \tilde{d}(R,Q)$$

für alle P, Q, R, die Punkte in der oberen Halbebene sind.

Weiterhin gilt: Sind P, Q, P', Q' Punkte in der oberen Halbebene, so ist

$$\tilde{d}(P,Q) = \tilde{d}(P',Q')$$

genau dann, wenn es $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ mit $ad - bc = 1$ gibt, so dass

$$\varphi_{a,b,c,d}(P) = P' \text{ und } \varphi_{a,b,c,d}(Q) = Q'$$

ist, wobei $\varphi_{a,b,c,d}$ die gebrochen-lineare Abbildung $z \mapsto \frac{az+d}{cz+d}$ bezeichnet.

(ohne Beweis)

Der hyperbolische Abstand ist also genau dann gleich, wenn die entsprechenden Strecken kongruent sind.