§2: Euklidische Geometrie

[...]

Vorbem. 2.12 (Folgendes steckt bei der eukl. Geometrie und anderen Geometrien im Hintergrund)

- E Menge, Elemente aus E = Punkte
- $\mathcal{G}$ Familie von Teilmengen von E, Elemente aus $\mathcal{G}$ = Geraden
- $\mathcal{Z} \subseteq E \times E \times E$
  $P, Q, R \in E$
  $(P, Q, R) \in \mathcal{Z} :\Longleftrightarrow$ Q zwischen P und R
- Strecken sind gegeben durch zwei Pkte. P und Q, Bez. PQ
- Zwei Strecken PQ und $P'Q'$ heißen kongruent, wenn sie gleich lang sind.

  Bez. $PQ \cong P'Q'$.
- Winkel sind gegeben durch drei Pkte. P, Q, R, die nicht auf einer Geraden liegen, Bez. $\angle PQR$
- Zwei Winkel $\angle PQR$ und $\angle P'Q'R'$ heißen kongruent, wenn sie dasselbe Winkelmaß haben.
  Bez. $\angle PQR \cong \angle P'Q'R'$

Was genau die Menge E ist, was $\mathcal{G}$ ist, was „zwischen" bedeutet, was Strecken, deren Längen, Winkel, deren Maße und die Kongruenz von Strecken bzw. Winkeln heißen soll, muss natürlich festgelegt werden.

Bsp. 2.13

$E := \mathbb{R}^2$, $\mathcal{G} :=$ System der Teilmengen
$\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0 \}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$,
$a^2+b^2 \neq 0$.

$\mathcal{Z} := \{ (P, Q, R) \in \mathbb{R}^2 \mid P \neq R$, es gibt ein
$0 < t < 1$ mit $Q = P \oplus t \cdot (R \ominus P) \}$,
(wobei $R \ominus P := R \oplus (-1) \cdot P$ ist).

$\cong$ Äquivalenzreln. auf $E \times E$

$PQ \cong P'Q' :\Leftrightarrow \| P \ominus Q \| = \| P' \ominus Q' \|$
(euklidische Norm)

$\simeq$ Äquivalenzreln. auf $\{ (P, Q, R) \in E \times E \times E \mid$
es gibt kein $g \in \mathcal{G}$ mit $P, Q, R \in g \}$

$PQR \simeq \angle\, P'Q'R' :\Leftrightarrow$

$$\frac{\langle P \ominus Q, R \ominus Q \rangle}{\| P - Q \| \cdot \| R \ominus Q \|} = \frac{\langle P' \ominus Q', R' \ominus Q' \rangle}{\| P' \ominus Q' \| \cdot \| R' - Q' \|}$$

(Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$)

[Hierbei muss man theoretisch noch nicht einmal wissen, wie Längen von Strecken und das Winkelmaß definiert sind.

Aber so wie wir es definiert hatten, stimmt es mit unserer „Forderung" aus 2.12 überein!! :)]

Def. 2.14

Eine euklidische Ebene ist ein 5-Tupel $(E, \mathcal{G}, \mathcal{Z}, \cong, \simeq)$ bestehend aus einer Menge E, einer nicht-leeren Familie $\mathcal{G}$ von Teilmengen von E (=: Geraden), einer Teilmenge $\mathcal{Z} \subseteq E \times E \times E$, einer Äquivalenzrelation $\cong$ auf $E \times E$ und einer Äquivalenzrelation $\simeq$ auf der Menge $\{(P,Q,R) \in E \times E \times E \mid$ es gibt kein $g \in \mathcal{G}$, so dass $P, Q, R \in g\}$ mit folgenden Eigenschaften:

Inzidenzaxiome

(I1) Durch je zwei verschiedene Pkte $P, Q \in E$ geht genau eine Gerade.

(I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Pkte.

(I3) Es gibt drei Pkte, die nicht auf einer Geraden liegen.
[Insbesondere können wir also überhaupt vernünftig von der Kongruenz von Winkeln sprechen.]

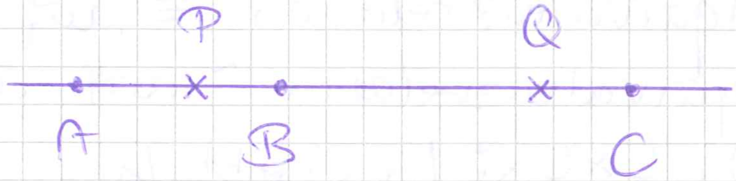
Lageaxiome

(L1) Liegt Q zwischen P und R, so liegen P, Q, R auf einer Geraden, sind paarweise verschieden, und Q liegt auch zwischen R und P.

[Insbesondere ist die „Zwischenrelation" also symmetrisch.]

(L2) Sind P, Q zwei verschiedene Pkte und g die nach (I 1) eind. best. Gerade durch P und Q so gibt es Pkte. A, B, C mit auf g:

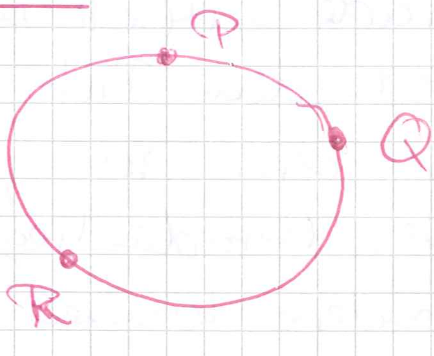
- P liegt zw. A und B und
- Q liegt zw. B und C.

[

]

(L3) Sind P, Q, R drei verschiedene Pkte. auf einer Geraden so gibt es genau einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

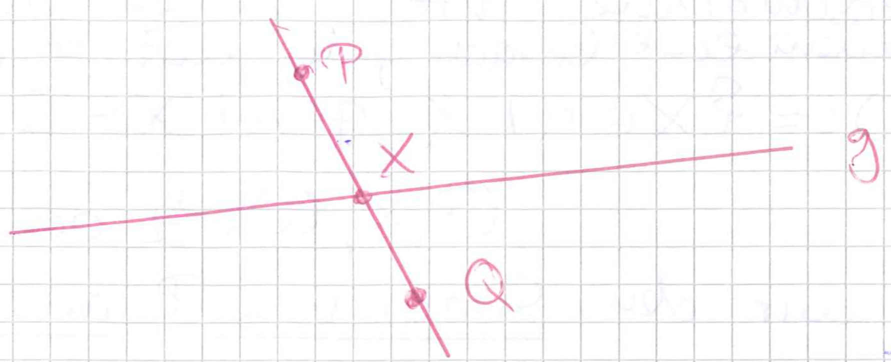
[*Verboten* ist also:



]

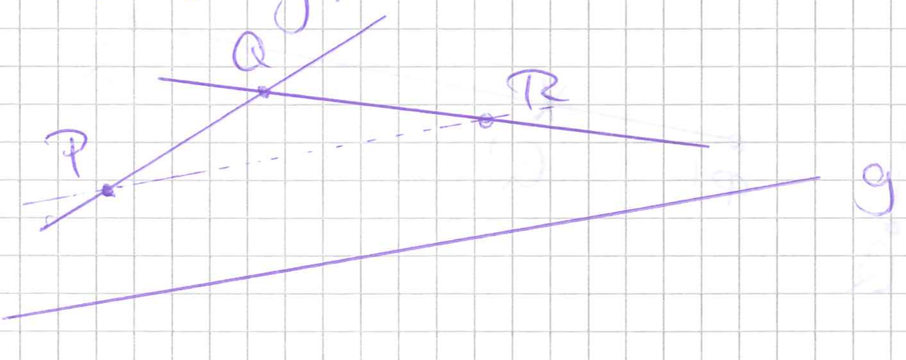
(„Zwischendefinition")
Ist $g \in \mathcal{G}$ und sind $P, Q \in E$ mit $P \notin g$ und $Q \notin g$, so sagen wir, dass P, Q *auf derselben Seite von g liegen*, wenn es *kein* $X \in g$ gibt mit X zwischen P und Q.

Verboten ist also:

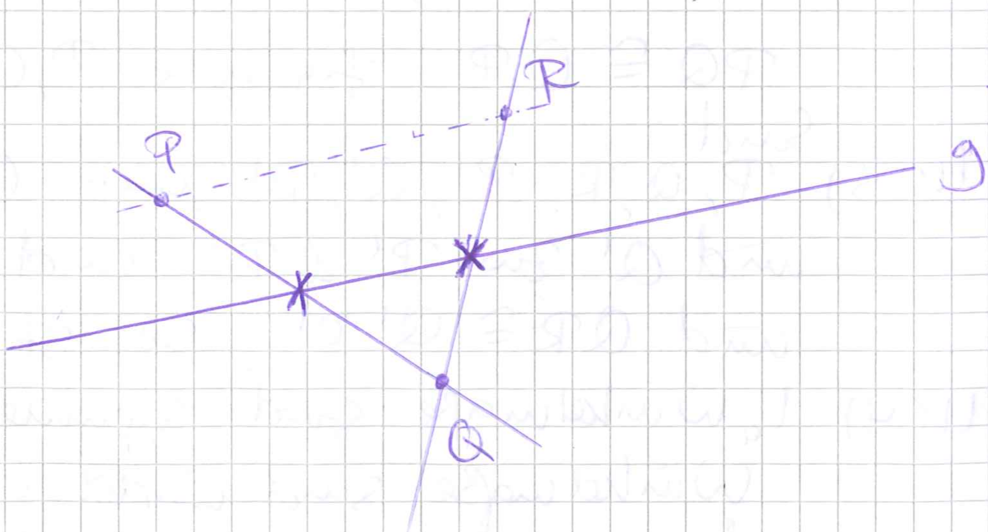


(L4a) Ist $g \in \mathcal{G}$ und liegen P und Q sowie Q und R auf derselben Seite von g, so liegen auch P und R auf derselben Seite von g.

(L4b) Ist $g \in \mathcal{G}$ und liegen weder P und Q noch Q und R auf derselben Seite von g, so liegen P und R auf derselben Seite von g.



zu (L4a)



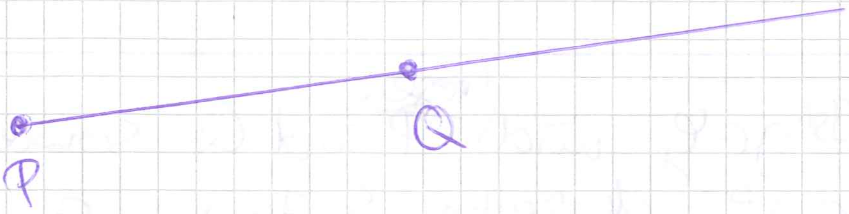
zu (L4b)

(„Zwischendefinition")

P, Q verschiedene Pkte. dann gibt es nach (I1) genau eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ mit $P, Q \in g$.

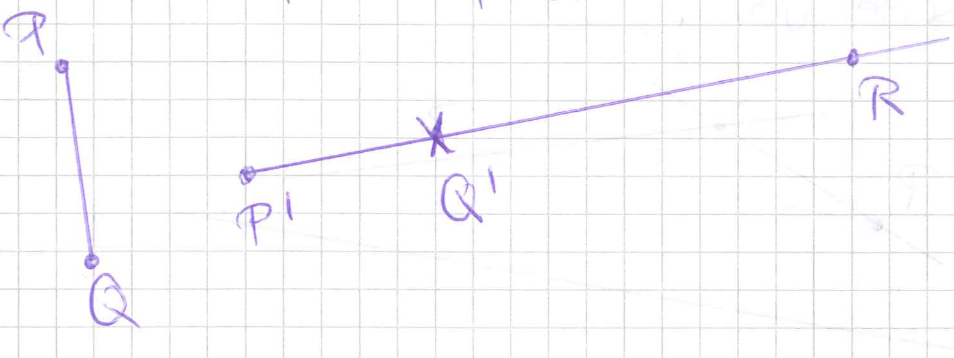
$S(P,Q) := \{X \in g \mid X = P$ od. $X = Q$ od. $(P, X, Q) \in \mathcal{Z}$ oder $(P, Q, X) \in \mathcal{Z}\}$

nennen wir den <u>Strahl von</u> P <u>aus Richtung</u> Q.



<u>Kongruenzaxiome</u>

(K1) („Abtragen von Strecken")
Sind P, Q, P', R Pkte. mit $P' \neq R$
so gibt es genau einen Pkt. $Q' \in S(P', R)$
mit $PQ \cong P'Q'$.



(K2) („Streckenlängen sind symmetrisch")

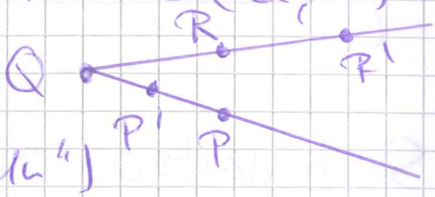
$PQ \cong QP$ für alle $P, Q \in E$.

(K3) Sind P, Q, R, P', Q', R' mit Q zw. P & R
und Q' zw. P' & R' und $PQ \cong P'Q'$
und $QR \cong Q'R'$, so ist $PR \cong P'R'$.

(K4) („Winkelmaße sind symmetrisch
Winkelmaße sind unabh. von der Wahl
der Pkte. auf den Strahlen")

Sind P, Q, R nicht auf einer Geraden, so ist $\angle PQR \cong \angle RQP$.

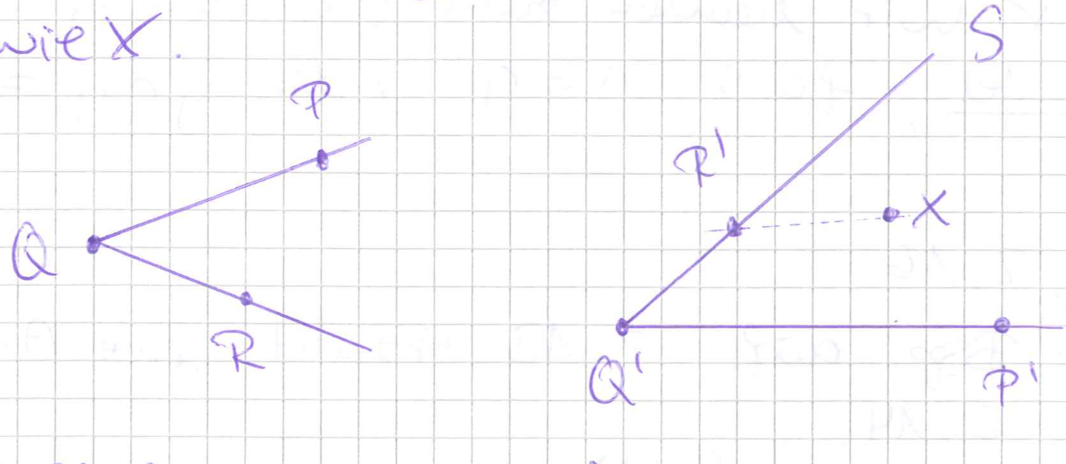
Weiterhin ist $\angle PQR \cong \angle P'QR'$ für alle $P' \in S(Q,P)$ und $R' \in S(Q,R)$ mit $P' \neq Q \neq R'$.



(K5) („Abtragen von Winkeln")

Sind $P, Q, R, X, P' \neq Q'$ Pkte. aus E, so dass P, Q, R nicht auf einer Geraden liegen und X nicht auf der Geraden durch P' und Q' liegt, so gibt es genau einen von Q' ausgehenden Strahl S, so dass für alle $R' \in S$ mit $R' \neq Q'$ gilt:

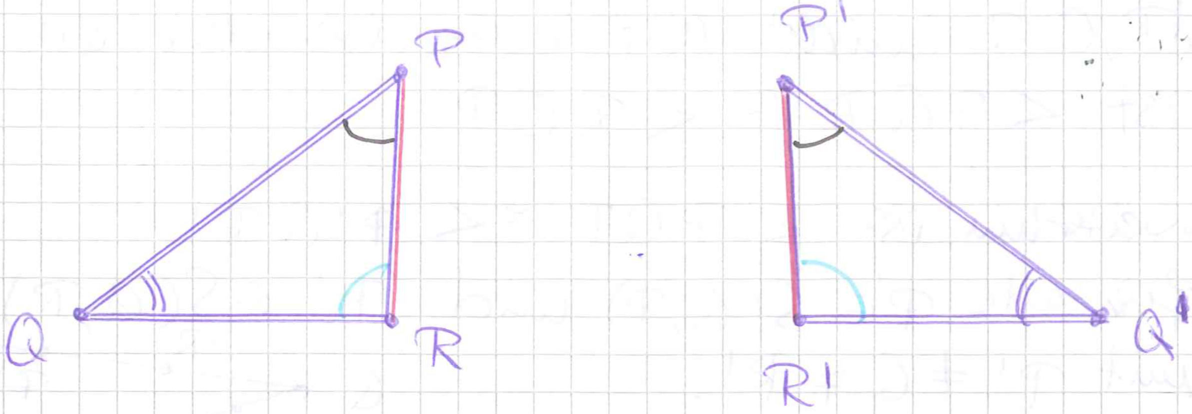
$\angle PQR \cong \angle P'Q'R'$ und R' liegt auf derselben Seite der Geraden durch P' und Q' wie X.



(K6) („SWS-Axiom")

$P, Q, R, P', Q', R' \in E$, weder P, Q, R noch P', Q', R' liegen auf derselben Geraden, $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$, $\overline{QR} \cong \overline{Q'R'}$, $\angle PQR \cong \angle P'Q'R'$.

Dann gilt auch: $\overline{PR} \cong \overline{P'R'}$, $\angle QPR \cong \angle Q'P'R'$ und $\angle QRP \cong \angle Q'R'P'$.



<u>Stetigkeitsaxiome</u>

(S1) [entspricht im Wesentlichen dem Archimedischen Axiom]

(S2) [entspricht im Wesentlichen dem Vollständigkeitsaxiom].

<u>Parallelenaxiom</u>

Ist $g \in \mathcal{G}$ und $P \in E$ mit $P \notin g$ so gibt es genau eine Gerade g' durch P mit $g \cap g' = \emptyset$.

<u>Def.</u> 2.15 (E, $\mathcal{G}$ wie oben) Wir nennen zwei Geraden $g, g' \in \mathcal{G}$ <u>parallel</u>, falls $g = g'$ oder $g \cap g' = \emptyset$ ist.

<u>Bem.</u> 2.16

Das Bsp. aus 2.13 erfüllt alle Axiome aus 2.14.

[Wir werden das (jetzt) nicht nachrechnen, sondern wenden uns nun einem anderen Modell zu, das alle Axiome aus 2.14 erfüllt bis auf das Parallelenaxiom.]

§3 Hyperbolische Geometrie

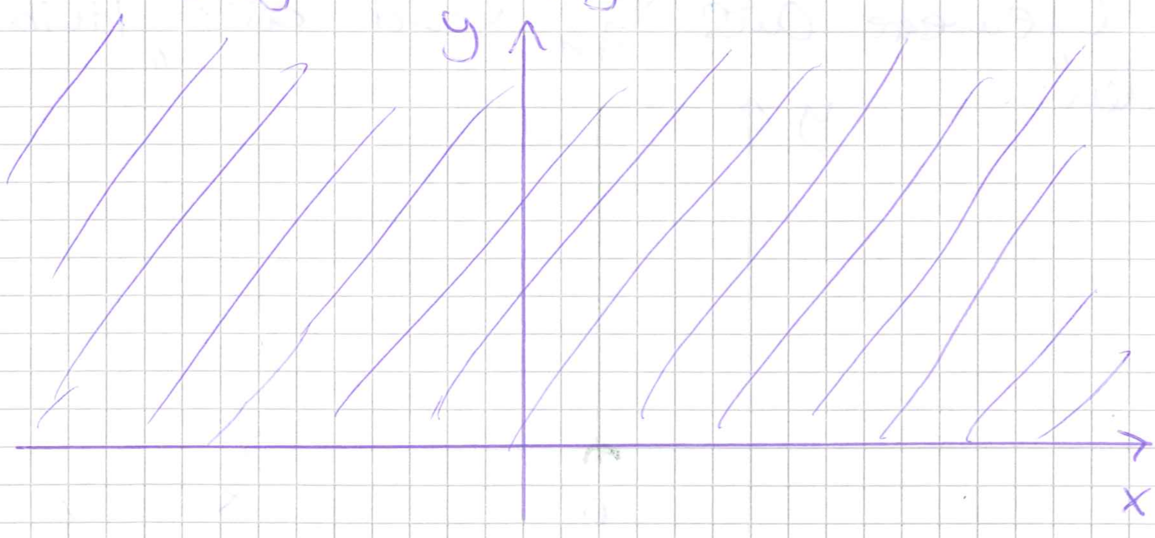
– Das Poincaré-Modell der oberen Halbebene

- In diesem Modell gelten alle Axiome der euklidischen Ebene bis auf das Parallenaxiom.
- Wir werden die einzelnen Axiome nachrechnen, allerdings immer nur soviel von der zugrundeliegenden Struktur (s. 2.12) definieren, wie wir für das Rechnen benötigen.

Def. 3.1

Wir beginnen mit der zugrundeliegenden Menge E:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > 0 \right\}$$



[Das erklärt auch den Namen „der oberen Halbebene" – mal abgesehen von Poincaré, auf den dieses Modell zurückgeht ...]

Weiterhin benötigen wir Geraden.
Wir definieren zwei Sorten von Geraden wie folgt:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \,\dot{\cup}\, \mathcal{G}_2 \,, \quad \text{wobei}$$

$\mathcal{G}_1 := \{ g_a \mid a \in \mathbb{R} \}$,

$$g_a := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} x = a, \\ y > 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \binom{a}{y} \;\middle|\; y > 0 \right\}$$

und

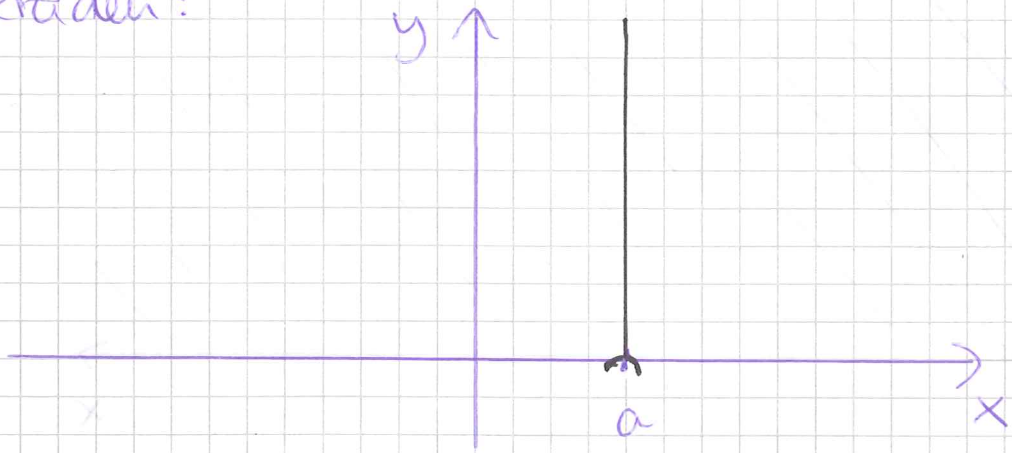
$\mathcal{G}_2 := \{ g_{a,r} \mid a \in \mathbb{R}, r > 0 \}$,

$$g_{a,r} := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} \left\| \binom{x}{y} - \binom{a}{0} \right\| = r, \\ y > 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = r, \\ y > 0 \end{matrix} \right\}$$

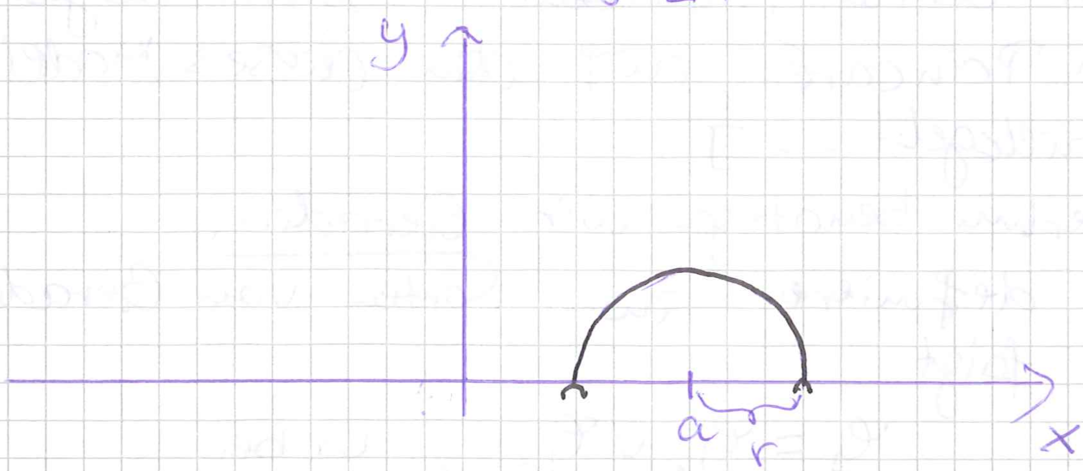
ist.

Die Elemente aus $\mathcal{G}_1$ sind also „Halbgeraden":



,

die Elemente aus $\mathcal{G}_2$ „Halbkreislinien":



[Mit diesen beiden Strukturen (E als zugrundeliegende Menge und $\mathcal{G}$ als Menge der Geraden) können wir bereits nachrechnen, dass die Inzidenzaxiome gelten und das Parallelenaxiom nicht gilt.]

Satz 3.2

$(E, \mathcal{G})$ wie oben definiert erfüllt die Inzidenzaxiome.

Beweis

(I 1):

Seien $P, Q \in E$ verschieden, $P = \binom{x_1}{y_1}$, $Q = \binom{x_2}{y_2}$.

(Insbes. ist $y_1 > 0$, $y_2 > 0$.)

Fall 1:

$\boxed{x_1 = x_2}$

- Wir zeigen zunächst: Es gibt mindestens eine Gerade, die P und Q enthält.

Beh. $g_{x_1} \ni P, Q$.

$$P = \binom{x_1}{y_1} \in \left\{ \binom{x_1}{y} \,\middle|\, y > 0 \right\} = g_{x_1}$$

$$Q = \binom{x_2}{y_2} \underset{\boxed{x_1 = x_2}}{=} \binom{x_1}{y_2} \in \left\{ \binom{x_1}{y} \,\middle|\, y > 0 \right\} = g_{x_1}$$

- Jetzt zeigen wir: Es gibt höchstens eine Gerade, die P und Q enthält.

* Sei $g_a \in \mathcal{G}_1$, $a \neq x_1$, mit $P, Q \in g_a$.

Dann ist $P = \binom{x_1}{y_1} \notin \left\{ \binom{a}{y} \,\middle|\, y > 0 \right\} = g_a$

* Sei nun $g' = g_{a,r} \in \mathcal{G}_2$.
Wären $P, Q \in g'$, so wäre

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = r, \; y > 0 \right\} \text{ und}$$

$$Q = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = r, y > 0 \right\}$$

Also wäre

$$\sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1 - a)^2 + y_2^2},$$

also auch

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = (x_1 - a)^2 + y_2^2,$$

also

$$y_1^2 = y_2^2.$$

Da aber nach Voraussetzung $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$, folgt:

$$y_1 = y_2 \text{ und damit}$$

$$P = Q \quad \lightning \text{ (Widerspruch).}$$

<u>Fall 2:</u> $\boxed{x_1 \neq x_2}$

- Wir zeigen zunächst, Es gibt <u>höchstens</u> eine Gerade, die P und Q enthält.

* Sei $g_a \in \mathcal{G}_1$ mit $P, Q \in g_a$.

Dann ist

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \middle| \; y > 0 \right\} =: g_a \quad \text{und}$$

$$Q = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \middle| \; y > 0 \right\}, \quad \text{also}$$

$$x_1 = a = x_2 . \quad ↯ \; (\text{Widerspruch}).$$

[Wir können uns also auf Geraden in $\mathcal{G}_2$ beschränken]

* Sei $g_{a,r} \in \mathcal{G}_2$ mit $P, Q \in g_{a,r}$.

Dann ist

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = r, \; y > 0 \right\}$$

und

$$Q = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = r, y > 0 \right\}$$

Also ist:

$$\sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2} = r = \sqrt{(x_2 - a)^2 + y_2^2}, \quad (*)$$

also auch:

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = r^2 = (x_2 - a)^2 + y_2^2,$$

also

$$x_1^2 - 2x_1 a + a^2 + y_1^2 \qquad x_2^2 - 2x_2 a + a^2 + y_2^2,$$

also

$$x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 2a \cdot (x_1 - x_2)$$

Da $x_1 \neq x_2$ ist, können wir durch $2 \cdot (x_1 - x_2)$ teilen und erhalten:

$$a = \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{2(x_1 - x_2)}$$ und damit:

(*)
$$r = \sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2} = \sqrt{\left(x_1 - \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{2 \cdot (x_1 - x_2)}\right)^2 + y_1^2}$$

[Wenn es also eine Gerade gibt, auf der P und Q liegen, muss es die Gerade $g_{a,r}$ mit <u>diesen</u> Parametern sein.]

- Wir zeigen nun noch:
  $P, Q \in g_{a,r}$ mit

$$a := \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{2 \cdot (x_1 - x_2)}$$ und

$$r := \sqrt{\left(x_1 - \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{2 \cdot (x_1 - x_2)}\right)^2 + y_1^2}$$

$$\left(= \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{2 \cdot (x_1 - x_2)}\right)^2 + y_2^2}\right)$$

Nach Voraussetzung sind $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$.

Zu testen ist also nun nur noch, ob die „Abstandsgleichungen" erfüllt sind!

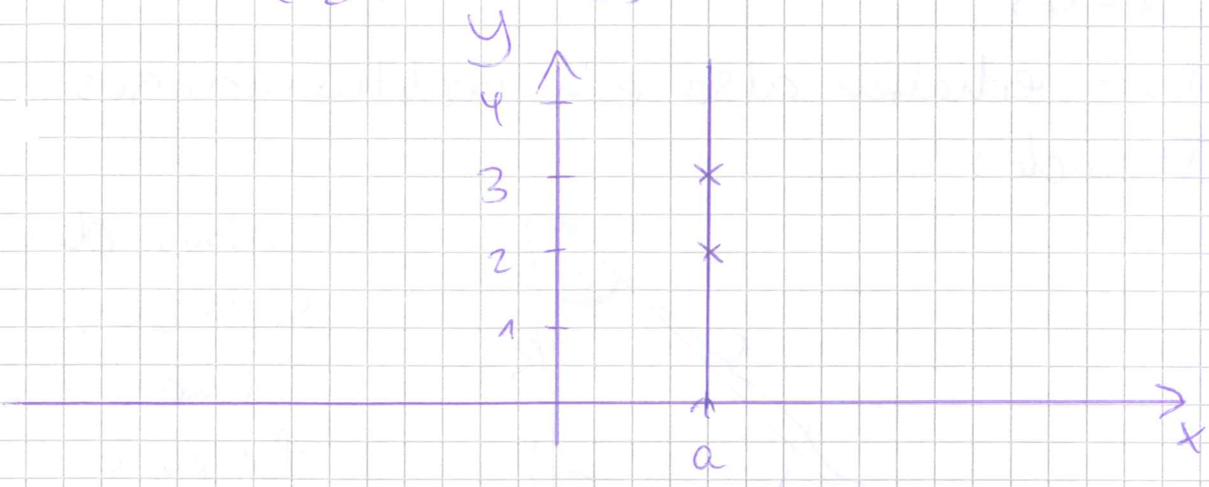
Das sieht man aber durch Einsetzen von P und Q in die definierende Gleichung $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = r$ für $g_{a,r}$.

(I2):

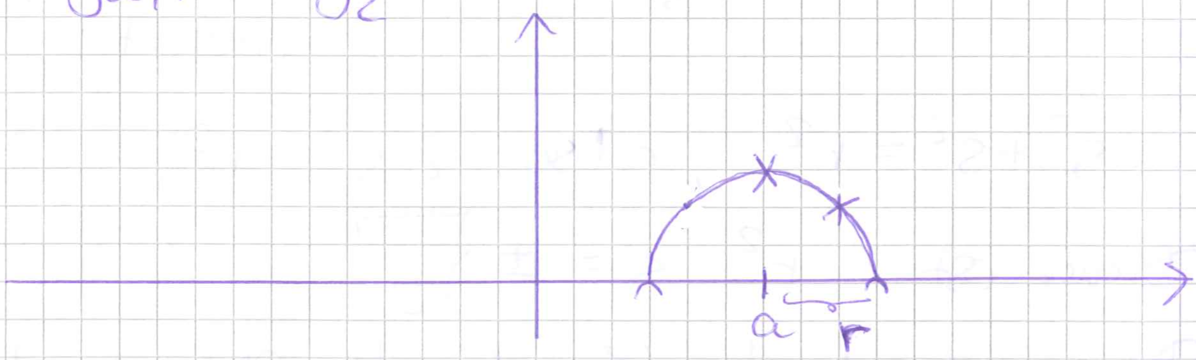
- $g_a \in \mathcal{G}_1$

Dann ist $\binom{a}{2}, \binom{a}{3} \in \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \right\} = g_a$,

und $\binom{a}{2} \neq \binom{a}{3}$

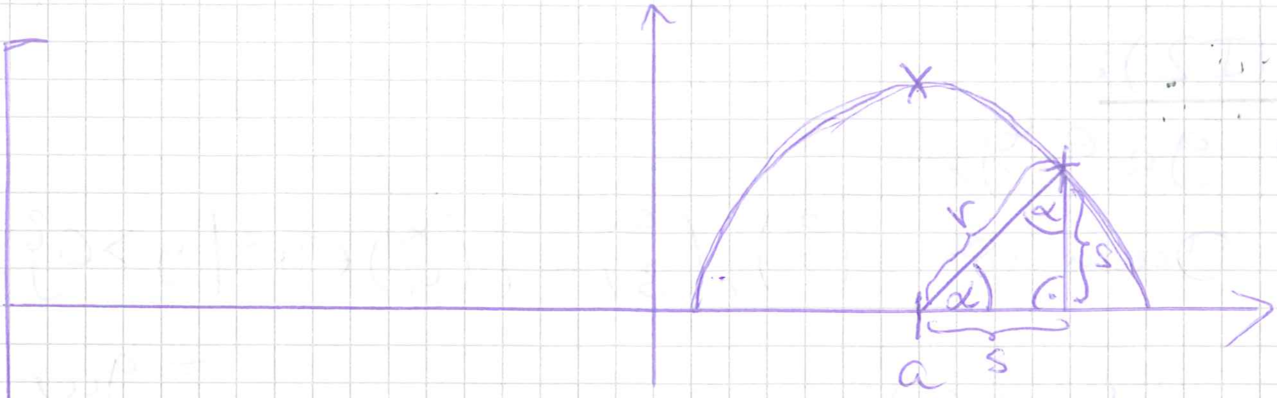


- $g_{a,r} \in \mathcal{G}_2$



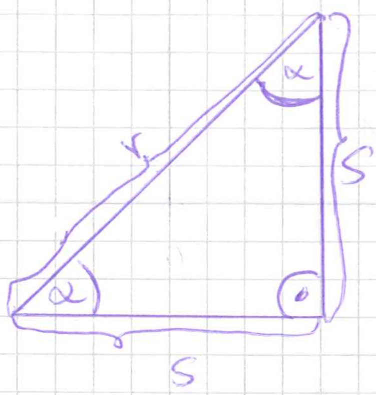
[Relativ schnell kann man sehen, dass der Punkt $\binom{a}{r}$ auf der Geraden $g_{a,r}$ liegt, aber wir benötigen noch einen zweiten Pkt.]

[Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras können wir geeignete Koordinaten bestimmen.]



$\alpha = 45°$

Wir erhalten also ein rechtwinkliges Dreieck:



wobei der Satz des Pythagoras folgende Gleichung liefert:

$s^2 + s^2 = r^2$, also $2s^2 = r^2$.

Daher ist $s = \pm \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Damit sind die Koordinaten des zweiten „Kandidaten" $\begin{pmatrix} a + \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+s \\ s \end{pmatrix}$.

Wir zeigen nun:

$\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a + \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in g_{a,r}$.

- $\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = r, \; y > 0 \right\} = g_{a,r}$,

denn:

$\sqrt{(a-a)^2+r^2} = \sqrt{r^2} = r$, da $r>0$, und $r>0$.

- $\begin{pmatrix} a+\frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{(x-a)^2+y^2} = r,\ y>0 \right\}$

$= g_{a,r}$, denn:

$$\sqrt{\left(a+\frac{r}{\sqrt{2}}-a\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$= \sqrt{\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}} = \sqrt{r^2} = r$, da $r>0$,

und $\frac{r}{\sqrt{2}} > 0$.

<u>(I3):</u>

<u>Beh.</u> $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen nicht auf einer Geraden.

Ang. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lägen auf einer Geraden, dann lägen insbesondere $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf der Geraden.

Die Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist nach (I1) eindeutig und gegeben durch:

$$g_0 = \left\{ \binom{0}{y} \,\middle|\, y > 0 \right\}.$$

Aber $\binom{1}{1} \notin g_0$.

Also können die drei Pkte. nicht auf einer Geraden liegen.

$\blacksquare$

[Mit den Daten aus E und $\mathcal{G}$ können wir bereits zeigen, dass das Parallelenaxiom nicht gilt:]

<u>Satz</u> 3.3 (E & $\mathcal{G}$ wie oben!)

Sind $g \in \mathcal{G}$, $P \in E$ mit $P \notin g$, so gibt es unendlich viele verschiedene $g' \in \mathcal{G}$ mit $P \in g'$ und $g' \cap g = \emptyset$.

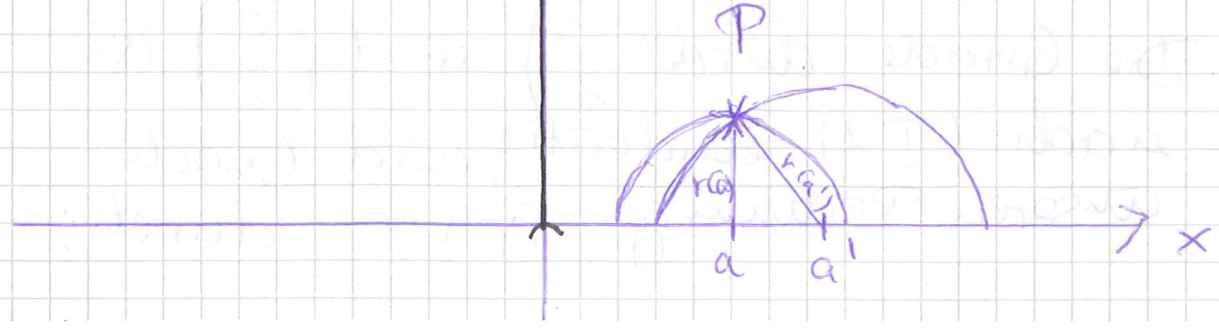
<u>Beweis</u>

Wir zeigen zunächst nur einen Spezialfall:

$$g = g_0 = \left\{ \binom{0}{y} \,\middle|\, y > 0 \right\},$$

$$P = \binom{x_1}{y_1} \text{ mit } x_1 > 0.$$

(Später können wir das verallgemeinern.)



Wir variieren nun die Mittelpunkte a der Halbkreislinien und wählen den Radius in Abhängigkeit von a ($r=r(a)$) so, dass P auf der Geraden $g_{a,r(a)}$ liegt.

Wir setzen $r(a) := \| P \ominus \binom{a}{0} \|$.

Dann liegt P auf der Geraden

$$g_{a,r(a)} := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\| \binom{x}{y} \ominus \binom{a}{0} \right\| = r(a),\ y>0 \right\},$$

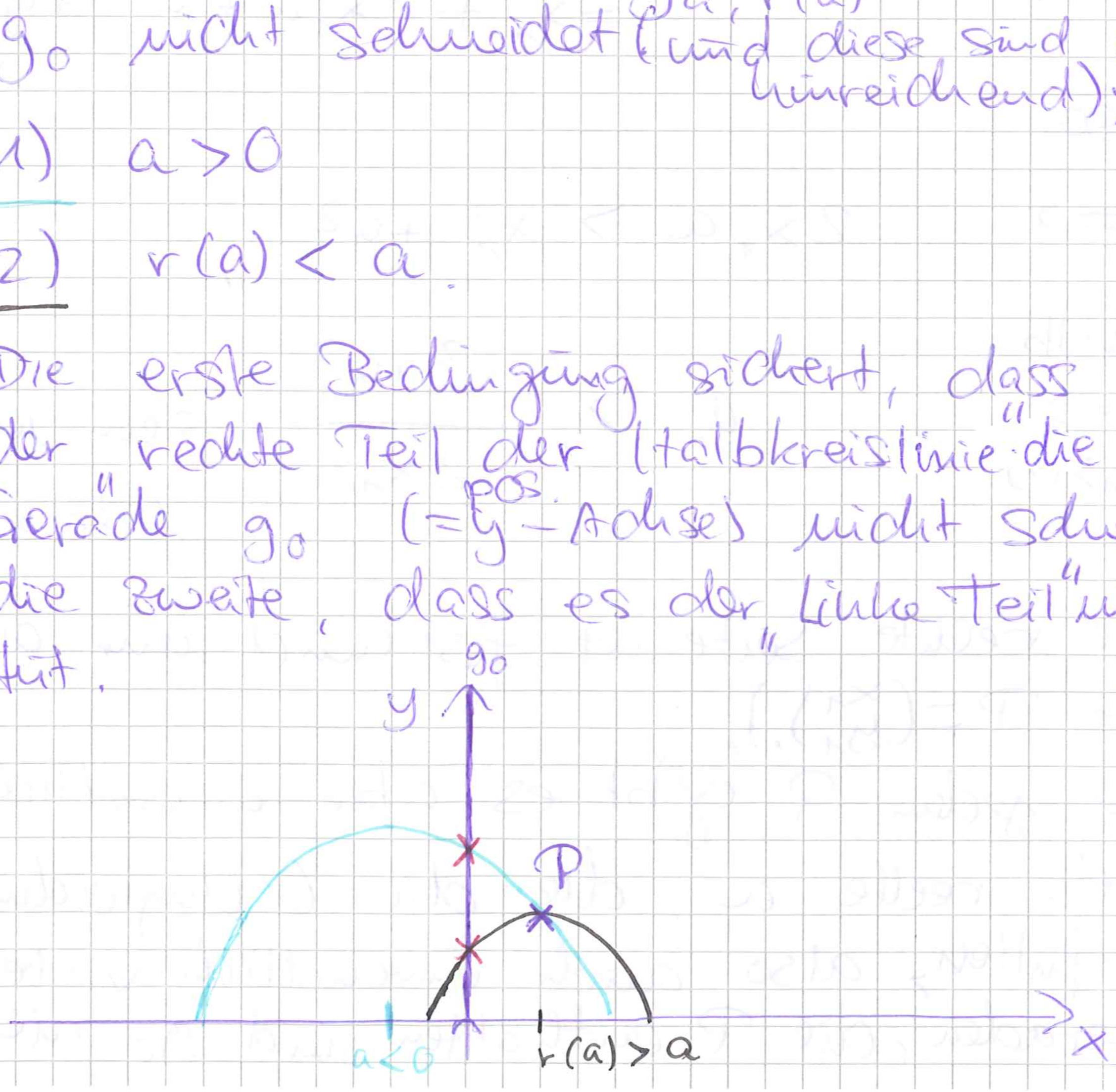
für *jedes* $a \in \mathbb{R}$.

Wir benötigen nun zwei Bedingungen, damit die Gerade $g_{a,r(a)}$ die Gerade g_0 nicht schneidet (und diese sind auch hinreichend):

1) $a > 0$

2) $r(a) < a$.

Die erste Bedingung sichert, dass der rechte Teil der „Halbkreislinie" die „Gerade" g_0 (= pos. y-Achse) nicht schneidet, die zweite, dass es der „linke Teil" nicht tut.



Wenn die 2. Bedingung erfüllt ist, ist die erste in unserem Spezialfall auch erfüllt, denn $a > r(a) > 0$.

$$\underset{(\text{n.V.})}{\uparrow}$$

Wir haben also folgende Ungleichung die erfüllt sein muss (und auch hinreichend für das „Nicht-Schneiden" ist):

$$a > r(a) = \| P \ominus \binom{a}{0} \|$$

$$= \sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2}$$

$$\underset{[a>0]}{\Longleftrightarrow} \quad a^2 > (x_1 - a)^2 + y_1^2$$

$$= x_1^2 - 2x_1 a + a^2 + y_1^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x_1 a > x_1^2 + y_1^2$$

$$\underset{[x_1>0]}{\Longleftrightarrow} \quad a > \frac{x_1^2 + y_1^2}{2x_1}$$

Die rechte Seite ist fest (und nur abhängig von $P = \binom{x_1}{y_1}$).
Zu jedem P gibt es aber unendlich viele reelle a, die die Ungleichung erfüllen, also auch unendlich viele Geraden, die P enthalten und g_0 nicht schneiden. ▨

[Wir fahren nun fort mit der Definition von „zwischen" für die obere Halbebene]

Def. 3.4

$\mathbb{E}$ und $\mathcal{G}$ wie oben!

$\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_1 \dot{\cup} \mathcal{Z}_2$, wobei

$\mathcal{Z}_1 := \{ (\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}, \binom{x_3}{y_3}) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \mathbb{E} \mid$

$x_1 = x_2 = x_3$, $y_1 \neq y_3$, es gibt ein $0 < t < 1$ mit

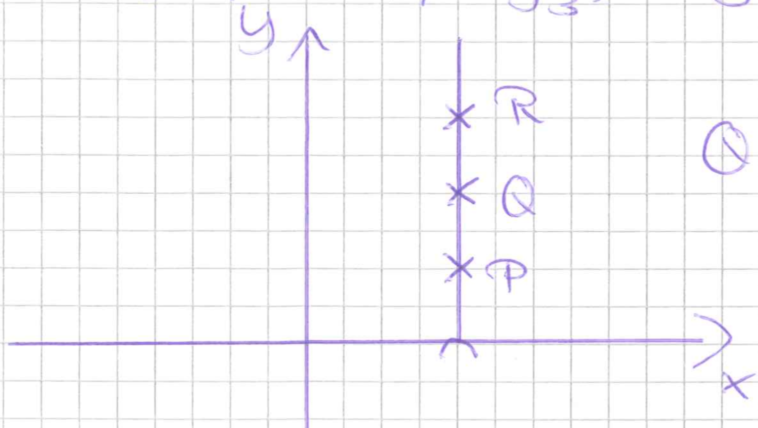
$\binom{x_2}{y_2} = t \cdot \binom{x_1}{y_1} \oplus (1-t) \cdot \binom{x_3}{y_3} \}$,

$\mathcal{Z}_2 := \{ (\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}, \binom{x_3}{y_3}) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \mathbb{E} \mid$

$x_1 < x_2 < x_3$ oder $x_1 > x_2 > x_3$, und es gibt $g \in \mathcal{G}_2$ mit

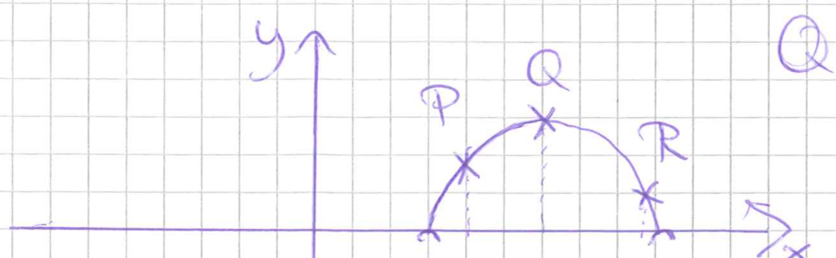
$\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}, \binom{x_3}{y_3} \in g \}$

zu $\mathcal{Z}_1$:



Q zw. P & R

zu $\mathcal{Z}_2$:



Q zw. P & R.