ÜBUNGSBLATT 6

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Gegeben sei die Drehgruppe C_4 eines Quadrates.

Zeigen Sie, dass die beiden Drehungen des Quadrates um seinen Mittelpunkt mit Drehwinkeln 0° und 180° eine Untergruppe C_2 der Drehgruppe C_4 bilden!

Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift für die „zugehörige“ Gruppenoperation[1] der Gruppe C_2 auf der Menge C_4.

Bestimmen Sie die Bahnen und Stabilisatoren der Gruppenoperation!

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die euklidische Norm

$$\| - \| \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

eine *Norm* liefert, dass also gilt:

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$
$$\|a \bullet \mathbf{x}\| = |a| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und

$$\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Berechnen Sie (**ohne** Taschenrechner!):

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|, \quad \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

[1] s. Beweis des Satzes von Lagrange