ÜBUNGSBLATT 3

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Gegeben seien zwei Gruppen $(G, \bullet)$ und $(H, *)$ sowie ein Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to H$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\text{Bild } f := \{h \in H \mid \text{es gibt ein } g \in G \text{ mit } f(g) = h\}$$

eine Untergruppe von $(H, *)$ ist!

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen und mit $\mathbb{R}^2$ die Menge der (geordneten) Paare reeller Zahlen, also $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Wir definieren eine Verknüpfung $\oplus\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf der Menge $\mathbb{R}^2$ durch folgende Vorschrift:

$$(x, y) \oplus (x', y') := (x + x', y + y'),$$

also durch die „komponentenweise" Addition in den reellen Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ (mit einem geeigneten neutralen Element und geeignet definierten inversen Elementen) eine abelsche Gruppe bildet!

b) Zeigen Sie, dass die folgenden drei Abbildungen Gruppenhomomorphismen liefern:

$$f\colon \quad \begin{aligned} &\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto 2x + 3y, \end{aligned}$$

$$g\colon \quad \begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ &x \mapsto (-x, 2x) \end{aligned}$$

und

$$h\colon \quad \begin{aligned} &\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x, y) \mapsto (x - y, 4x). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben seien die Kleinsche Vierergruppe (s. Aufgabe 3, Übungsblatt 2) sowie die Drehgruppe eines Quadrats. Zeigen Sie, dass die beiden Gruppen *nicht* isomorph sind, dass es also *keinen* Gruppenisomorphismus zwischen den beiden Gruppen geben kann!

Späteste Abgabe: Fr, 2.11.2012, 12.00 Uhr

Angela Holtmann