Auf Übungsblatt 2 hatten wir folgende Aufgabe:

Aufgabe 3 (Kleinsche Vierergruppe). (4 Punkte)

Gegeben sei die Menge $M := \{a, b, c, d\}$ mit folgender Verknüpfung $*$:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Zeigen Sie, dass es sich bei der Menge M mit der Verknüpfung $*$ um eine abelsche Gruppe handelt! (Insbesondere ist hierbei das neutrale Element zu bestimmen und zu jedem Element sein Inverses.)

Wir hatten bei der Besprechung der Übungen mit Hilfe der Gruppentafel bereits nachgewiesen, dass es sich um eine Verknüpfung handelt, dass a das neutrale Element der Gruppe ist, jedes Element zu sich selbst invers ist und dass die Gruppe abelsch ist.

Es fehlte noch, die *Assoziativität* der Verknüpfung $*$ nachzurechnen. Insgesamt hätten wir dafür $4^3 = 64$ Gleichungen nachzurechnen – für alle drei zu besetzenden Positionen bei der Assoziativität gibt es je 4 Möglichkeiten: a, b, c oder d. Man kann sich das Ganze aber einfacher machen, indem man strukturell gleiche Gleichungen zusammenfasst. :-)

Wir betrachten zunächst diejenigen Gleichungen, an der an (mindestens) einer Position das neutrale Element a auftritt:

- $(a * x) * y = x * y = a * (x * y)$ für alle $x, y \in \{a, b, c, d\}$
- $(x * a) * y = x * y = x * (a * y)$ für alle $x, y \in \{a, b, c, d\}$
- $(x * y) * a = x * y = x * (y * a)$ für alle $x, y \in \{a, b, c, d\}$

Die Gleichheitszeichen gelten, weil a das neutrale Element von M ist.

Damit haben wir nun schon $37 = 4^2 + 4 + 1 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 1$ Fälle abgehandelt.

Es bleibt also nur noch, die Kombinationen der drei übrigen Elemente zu überprüfen, was $3^3 = 27$ Fälle ergibt.

Falls $x \neq y \neq z \neq x$ ist, so gilt:

- $(x * y) * z = z * z = a = x * x = x * (y * z)$.

Damit sind weitere $3! = 6$ Möglichkeiten abgehandelt, und es bleiben noch 21 Fälle.

Es bleiben uns noch die Fälle, wo zwei Elemente übereinstimmen, wobei wir zunächst die Fälle betrachten, wo $x \neq y$ ist.
In dem Fall ist

$$x * y = y * x = z, \qquad (\star)$$

wobei z gerade das Element ist, was weder mit x noch mit y übereinstimmt, was verknüpft mit einem von sich (und a) verschiedenen Element das jeweils dritte ergibt, und es gilt:

- $(x * x) * y = a * y = y = x * z = x * (x * y)$
- $(x * y) * x = z * x = y = x * z = x * (y * x)$
- $(y * x) * x = z * x = y = y * a = y * (x * x)$

Die Gleichheitszeichen gelten hier, weil $(\star)$ gilt und a das neutrale Element von M ist.

Hiermit sind nun weitere $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Fälle nachgewiesen, und es bleiben noch genau die drei Fälle übrig, wo dreimal dasselbe Element auftritt.

Hier haben wir:

- $(x * x) * x = a * x = x = x * a = x * (x * x)$,

denn jedes x ist zu sich selbst invers und a das neutrale Element von M.

FERTIG! :-)

[1]

[1] Wenn man unbedingt will, kann man die acht nachgerechneten Gleichungen noch einmal um vier Gleichungen reduzieren, indem man bei den jeweils drei zusammenstehenden Gleichungen die Kommutativität ausnutzt. . . ;-)