

Beispiel eines Rings, der kein Hauptidealring ist

Wir betrachten den Polynomring in einer Variablen X über den ganzen Zahlen, also $\mathbb{Z}[X]$.

(Wichtig ist, dass man hier als „zugrundeliegenden“ Ring für den Polynomring die ganzen Zahlen und nicht etwa die rationalen oder die reellen Zahlen nimmt.)

Wir wissen (Satz aus der Vorlesung), dass in jedem Ring R für eine endliche Menge von m Ringelementen $r_1, \dots, r_m \in R$ die Menge $I(r_1, \dots, r_m)$ aller R -Linearkombinationen von r_1, \dots, r_m ein Ideal bildet, also auch insbesondere die Menge der polynomiellen Linearkombinationen von $2 \in \mathbb{Z}[X]$ und $X \in \mathbb{Z}[X]$, also die Menge

$$I(2, X) := \{f \cdot 2 + g \cdot X \mid f, g \in \mathbb{Z}[X]\}$$

ein Ideal in $\mathbb{Z}[X]$ ist.

Definition: Für ein Polynom $k := z_0 + z_1X + \dots + z_nX^n$ nennen wir z_0 den *konstanten Term* in k .

Wenn wir uns überlegen, welche Polynome in $I(2, X)$ liegen, so sehen wir, dass der konstante Term der Polynome immer gerade sein muss: Denn X hat keinen konstanten Term und damit auch $g \cdot X$ für alle möglichen $g \in \mathbb{Z}[X]$ nicht, so dass konstante Terme für Elemente in $I(2, X)$ nur aus $f \cdot 2$ mit $f \in \mathbb{Z}[X]$ entstehen können. Hier sind die konstanten Terme aber Vielfache von 2.

Genauer gilt:

$$I(2) = \{z_0 + z_1X + \dots + z_nX^n \mid n \in \mathbb{N}, z_0, \dots, z_n \in \mathbb{Z} \text{ und } z_0, \dots, z_n \text{ gerade}\}$$

sowie

$$I(X) = \{z_0 + z_1X + \dots + z_nX^n \mid n \in \mathbb{N}, z_0, \dots, z_n \in \mathbb{Z} \text{ und } z_0 = 0\}.$$

Insgesamt erhalten wir damit:

$$I(2, X) = \{z_0 + z_1X + \dots + z_nX^n \mid n \in \mathbb{N}, z_0, \dots, z_n \in \mathbb{Z} \text{ und } z_0 \text{ gerade}\} \subsetneq \mathbb{Z}[X].$$

Wäre nun $\mathbb{Z}[X]$ ein Hauptidealring, so müsste es ein einziges Polynom $h \in \mathbb{Z}[X]$ geben mit

$$I(2, X) = I(h).$$

Dieses Polynom h darf nur einen von Null verschiedenen konstanten Term (also „keinen X -Anteil“) haben, da wir sonst aus $\tilde{f} \cdot h$ mit $\tilde{f} \in \mathbb{Z}[X]$ niemals das Polynom $2 \in I(2, X)$ erhalten würden. (Da wäre dann ja in dem Produkt $\tilde{f} \cdot h$ in allen Summanden immer „ein X dabei“.)

Da $2 \in I(2, X)$, muss auch $|h| \leq 2$ sein, sonst könnten wir aus $\tilde{f} \cdot h$ mit $\tilde{f} \in \mathbb{Z}[X]$ mit $\tilde{f} \in \mathbb{Z}[X]$ wiederum niemals das Polynom 2 erhalten.¹ Andererseits darf auch nicht $|h| = 1$ sein, denn sonst wäre $I(h) = I(1) = \mathbb{Z}[X]$ bzw. $I(h) = I(-1) = \mathbb{Z}[X]$ (da jedes Polynom k sich in der Form $k = k \cdot 1 = (-k) \cdot (-1)$ schreiben lässt). Auch darf nicht $h = 0$ sein, denn dann wäre $I(h) = I(0) = \{0\} \neq I(2, X)$.

Einzige Kandidaten für $h \in \mathbb{Z}[X]$, aus denen man ein Hauptideal $I(h)$ bilden könnte, so dass $I(2, X) = I(h)$ gilt, wären $h = 2$ oder $h = -2$. Nun ist aber auch $X \in I(2, X)$. Aber $2 \nmid X$ in $\mathbb{Z}[X]$, da X in $\mathbb{Z}[X]$ kein polynomielles Vielfaches von 2 ist.²

Damit ist das Ideal $I(2, X) \subseteq \mathbb{Z}[X]$ kein Hauptideal (und daher (nach Definition) $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring).

¹Hier geht nun ein, dass der zugrundeliegende Ring \mathbb{Z} ist.

²Auch hier geht wieder ein, dass der zugrundeliegende Ring für den Polynomring der Ring der ganzen Zahlen ist.