Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung

Masterarbeit

Woodins HOD-Vermutung

Themensteller
Prof. Dr. Ralf Schindler

vorgelegt von
Sandra Uhlenbrock
22. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Hintergrund **7**

2.1 Elementare Einbettungen 7

2.2 Die Klasse HOD 10

3 Hauptteil **13**

3.1 Nachfolgerkardinalzahlen in HOD 13

3.2 Äquivalenzen zur HOD-Vermutung 37

1 Einleitung

Diese Masterarbeit befasst sich mit der von W. Hugh Woodin aufgestellten HOD-Vermutung über die Klasse der erblich Ordinalzahl-definierbaren Mengen. Nach einer kurzen thematischen Einführung in Kapitel 2, wird in Kapitel 3 der Hauptteil dieser Arbeit dargestellt.

Zunächst wird der Einfluss der HOD-Vermutung auf den Zusammenhang zwischen der Klasse HOD und dem Mengenuniversum V untersucht. In Abschnitt 3.1 wird dazu gezeigt, dass, falls die HOD-Vermutung nicht gilt, viele Nachfolgerkardinalzahlen in HOD falsch ausgerechnet werden. Außerdem wird gezeigt, dass, falls die HOD-Vermutung gilt und eine HOD-superkompakte Kardinalzahl existiert, viele Nachfolgerkardinalzahlen in HOD korrekt bestimmt werden.

In Abschnitt 3.2 werden dann darauf aufbauend äquivalente Formulierungen der HOD-Vermutung bewiesen. Insbesondere werden dort Extender und die Aussage, dass HOD ein geeignetes Extender-Modell ist, behandelt.

Das Kapitel 3 dieser Arbeit basiert auf [Woo10]. Da sich alle dort gezeigten Aussagen an dieser Quelle orientieren, wird in diesem Kapitel auf explizite Referenzen verzichtet.

2 Hintergrund

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Definitionen eingeführt, die im Hauptteil dieser Arbeit benötigt werden. Außerdem werden zwei Resultate bewiesen, die als Einführung in den weiteren Teil der Arbeit betrachtet werden können.

2.1 Elementare Einbettungen

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit einer kurzen Einführung in elementare Einbettungen. Dieser Begriff ist für den weiteren Verlauf dieser Arbeit sehr zentral.

Definition 1. *Seien M, N Modelle. Eine Abbildung*

$$j : M \to N$$

heißt elementare Abbildung*, falls für jede Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und für alle $m_1, \ldots, m_n$ folgendes gilt:*

$$M \models \varphi[m_1, \ldots, m_n] \Leftrightarrow N \models \varphi[j(m_1), \ldots, j(m_n)].$$

Wir wollen nun ein Resultat von Kunen aus dem Jahr 1971 zeigen, welches besagt, dass es keine nicht-triviale Einbettung $j : V \to V$ geben kann. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir, im Zusammenhang mit großen Kardinalzahlen, häufig die Existenz von elementaren Einbettungen mit verschiedenen Eigenschaften fordern. Das folgende Resultat macht deutlich, dass wir die Anforderungen an die elementare Einbettung nicht zu stark wählen dürfen, um eine mögliche Konsistenz mit ZFC nicht auszuschließen.

Bevor wir das eigentliche Resultat beweisen können, benötigen wir ein grundlegendes Lemma.

Lemma 2. *Sei $\nu < \lambda$ eine reguläre Kardinalzahl und sei $S \subseteq \{\xi < \lambda \mid \mathrm{cf}(\xi) = \nu\}$ eine Menge, die stationär in λ ist. Weiter sei C eine ν-abgeschlossene und in λ unbeschränkte Menge. Dann gilt $S \cap C \neq \emptyset$.*

Beweis. Sei $\bar{C}$ der Abschluss von C. Das heißt $\bar{C}$ ist club in λ. Dann existiert ein $\xi \in S \cap \bar{C}$.

Angenommen es gilt $\xi \notin C$. Dann ist $\xi = \sup_{i<\delta} \xi_i$ für ein $\delta > \nu$ und $\xi_i \in C$. (Falls $\xi_i \notin C$, ersetze ξ_i induktiv durch $(\xi_j^{(i)})_{i<\delta_i}$ mit $\xi_i = \sup_{j<\delta_i} \xi_j^{(i)}$.)

Da $\xi \in S$ gilt, folgt $\mathrm{cf}(\xi) = \nu$. Das heißt es existieren $(\xi'_i \mid i < \nu)$ mit $\xi = sup_{i<\nu}\xi'_i$. Die Folge $(\xi_i \mid i < \delta)$ ist unbeschränkt in ξ. Daher existiert für alle $i < \nu$ ein $j < \delta$ so, dass $\tilde{\xi}_i := \xi_j \in C$ mit $\tilde{\xi}_i \geq \xi'_i$. Dann gilt

$$\xi = \sup_{i<\nu} \tilde{\xi}_i \text{ mit } \tilde{\xi}_i \in C.$$

Da C ν-abgeschlossen ist, folgt also auch $\xi \in C$, was im Widerspruch zur Annahme $\xi \notin C$ steht. □

Nun können wir den Satz von Kunen beweisen. Der hier geführte Beweis stammt von W. H. Woodin und orientiert sich an [Kan09].

Satz 3. ***(von Kunen)***
In ZFC *gibt es keine nicht-triviale elementare Einbettung* $j : V \to V$.

Beweis. Angenommen es gäbe eine solche elementare Einbettung $j : V \to V$ mit kritischem Punkt $\kappa = \kappa_0$. Für $n \in \omega$ setze $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$ und setze

$$\lambda = \sup_{n \in \omega} \kappa_n.$$

Betrachte nun die Menge $S_\omega^{\lambda^+} := \{\xi < \lambda^+ \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$. Da unterhalb von λ^+ club-viele Ordinalzahlen mit Kofinalität ω existieren ist die Menge $S_\omega^{\lambda^+}$ stationär. Nach dem Satz von Solovay lässt sich diese Menge daher in κ viele disjunkte stationäre Teilmengen S_i zerlegen. Das heißt es gilt

$$\{\xi < \lambda^+ \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\} = \bigcup_{i<\kappa} S_i.$$

Weiter gilt $j(\lambda) = \lambda$, denn: Sei $f : \omega \to \lambda$, definiert durch $f(n) = \kappa_n$ für $n \in \omega$, eine kofinale Abbildung. Da j eine elementare Abbildung mit kritischem Punkt κ ist und $\omega < \kappa$ gilt, ist $j(f) : \omega \to j(\lambda)$ für $n \in \omega$ durch $j(f)(n) = j(\kappa_n)$ definiert und kofinal in $j(\lambda)$. Damit folgt

$$j(\lambda) = \sup_{n \in \omega} j(\kappa_n) = \sup_{n \in \omega} \kappa_{n+1} = \lambda.$$

Wegen der Elementarität von j folgt dann auch, dass $j(\lambda^+) = \lambda^+$ gilt. Außerdem folgt aus der Elementarität von j, dass

$$j(\bigcup_{i<\kappa} S_i) = \bigcup_{i<j(\kappa)} T_i$$

für disjunkte stationäre Mengen T_i gilt. Insbesondere ist T_κ stationär. Weiter gilt $j(S_i) = T_i$ für $i < \kappa$.

Behauptung 1. Es existiert ein $i < \kappa$ so, dass $S_i \cap T_\kappa$ stationär ist.

Beweis. Angenommen $S_i \cap T_\kappa$ ist für alle $i < \kappa$ nicht stationär. Dann existiert für alle $i < \kappa$ eine club Menge C_i so, dass $C_i \cap (S_i \cap T_\kappa) = \emptyset$. Dann ist auch $\bigcap_{i<\kappa} C_i$ club und, da T_k stationär ist, folgt $\bigcap_{i<\kappa} C_i \cap T_\kappa \neq \emptyset$.
Sei $\xi_0 \in \bigcap_{i<\kappa} C_i \cap T_\kappa \neq \emptyset$. Da

$$\xi_0 \in T_\kappa \subseteq \{\xi < j(\lambda^+) \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\} = \{\xi < \lambda^+ \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\} = \bigcup_{i<\kappa} S_i$$

auf Grund der Elementarität von j gilt, existiert dann ein festes $i < \kappa$ so, dass $\xi_0 \in S_i$ gilt. Dann folgt aber $\xi_0 \in (S_i \cap T_\kappa) \cap C_i$, was im Widerspruch zur Annahme $C_i \cap (S_i \cap T_\kappa) = \emptyset$ steht. $\square$

Sei also nun $i < \kappa$ wie in der Behauptung gewählt. Sei

$$C = \{\xi < \lambda^+ \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega \wedge j(\xi) = \xi\}.$$

Diese Menge ist ω-abgeschlossen, denn: Sei $(\xi_i \mid i < \omega)$ eine Folge in C, das heißt $j(\xi_i) = \xi_i$. Dann gilt

$$\mathrm{cf}(\sup_{i\in\omega} \xi_i) = \omega \text{ und } j(\sup_{i\in\omega} \xi_i) = \sup_{i\in\omega} j(\xi_i) = \sup_{i\in\omega} \xi_i.$$

Außerdem ist C unbeschränkt in λ^+, denn: Sei $\alpha < \lambda^+$. Setze $\alpha_0 = \alpha$ und $\alpha_{n+1} = j(\alpha_n)$ für $n < \omega$. Setze weiter $\delta = \sup_{n\in\omega} \alpha_n$. Dann gilt $\delta < \lambda^+$, da $\mathrm{cf}(\lambda^+) = \lambda^+ > \omega$ und da für alle $n < \omega$ wegen Elementarität von j gilt, dass $\alpha_n < j(\lambda^+) = \lambda^+$. Außerdem gilt

$$\mathrm{cf}(\delta) = \omega \text{ und } j(\delta) = \sup_{n\in\omega} j(\alpha_n) = \sup_{n\in\omega} \alpha_{n+1} = \delta.$$

Also folgt $\delta \in C$.
Daher folgt mit der Behauptung und Lemma 2, dass ein $\xi_0 \in C \cap (S_i \cap T_\kappa)$ existiert. Daraus folgt, dass

$$\xi_0 = j(\xi_0) \in j(S_i) = T_i.$$

Dies steht allerdings im Widerspruch dazu, dass $\xi_0 \in T_\kappa$, da alle T_i für $i < j(\kappa)$ disjunkt sind und $i < \kappa$ gilt. Daher kann es keine nicht-triviale elementare Einbettung $j : V \to V$ geben. $\square$

Bemerkung. Der Beweis dieses Satzes zeigt sogar, dass es keine nicht-triviale elementare Einbettung

$$j : V \to M$$

so geben kann, dass $V_{\lambda+2} \subseteq M$, für $\lambda = \sup_{n\in\omega} \kappa_n$ wie im obigen Beweis gewählt, gilt. Dies gilt, da man λ^+ durch Elemente von $V_{\lambda+2}$ kodieren kann.

2.2 Die Klasse HOD

Wir führen nun die Klasse HOD der erblich Ordinalzahl-definierbaren Mengen ein und nennen einige grundlegende Eigenschaften, die wir später benötigen werden.

Definition 4. *Eine Menge X heißt* Ordinalzahl-definierbar*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$, eine Formel $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ und Ordinalzahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ so gibt, dass*

$$X = \{u \mid \varphi(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}.$$

Mit OD *bezeichnen wir die Klasse aller Ordinalzahl-definierbaren Mengen.*

Die Klasse OD ist selbst definierbar, da $X \in \mathrm{OD}$ genau dann gilt, wenn es ein α, eine Formel $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ und Ordinalzahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ so gibt, dass

$$V_\alpha \vDash \text{„}X = \{u \mid \varphi(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}\text{"}$$

gilt.

Definition 5. *Eine Menge X heißt* erblich Ordinalzahl-definierbar*, falls jede Menge im transitiven Abschluss von X Ordinalzahl-definierbar ist. Mit* HOD *bezeichnen wir die Klasse aller erblich Ordinalzahl-definierbaren Mengen. Das heißt*

$$\mathrm{HOD} = \{x \mid \mathrm{TC}(\{x\}) \subset \mathrm{OD}\}.$$

Dabei ist der transitive Abschluss einer Menge X wie folgt definiert:

$$\mathrm{TC}(X) = \bigcap\{T \mid X \subseteq T \wedge T \textit{ ist transitiv}\}.$$

Der folgende Satz beinhaltet einige elementare Eigenschaften von HOD, die wir im Laufe dieser Arbeit benutzen werden.

Satz 6. HOD *erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

(*i*) $\mathrm{Ord} \subseteq \mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{OD}$.

(*ii*) HOD *ist transitiv.*

(*iii*) $\mathrm{HOD} \cap V_\alpha \in \mathrm{HOD}$ *für alle* $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

(*iv*) $(\mathrm{HOD})^{V_\alpha} \subseteq \mathrm{HOD} \cap V_\alpha$ *für alle* $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

(*v*) $(\mathrm{HOD})^{V_\alpha} \subseteq (\mathrm{HOD})^{V_\beta}$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ *mit* $\alpha \leq \beta$.

(*vi*) *Falls* $V_\delta \prec_{\Sigma_2} V$ *gilt, folgt* $\mathrm{HOD} \cap V_\delta = (\mathrm{HOD})^{V_\delta}$.

Beweis. (*i*) $\mathrm{Ord} \subseteq \mathrm{HOD}$ ist klar, da eine Ordinalzahl transitiv ist und offensichtlich auch Ordinalzahl-definierbar. Daher besteht der transitive Abschluss einer Ordinalzahl nur aus Ordinalzahlen. $\mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{OD}$ ist ebenfalls klar, denn für jede Menge x gilt $x \in \mathrm{TC}(\{x\})$.

(*ii*) Die Transitivität von HOD folgt direkt aus der Definition.

(iii) Offensichtlich gilt $\mathrm{HOD} \cap V_\alpha \subseteq \mathrm{HOD}$. Außerdem gilt $\mathrm{HOD} \cap V_\alpha \in \mathrm{OD}$, da man diese Menge mit Hilfe von α definieren kann. Daher folgt $\mathrm{HOD} \cap V_\alpha \in \mathrm{HOD}$.

$(iv), (v)$ Diese Eigenschaften folgen, da man V_α mit Hilfe von α definieren kann.

(vi) Die Eigenschaft $x \in \mathrm{HOD}$ lässt sich durch eine Σ_2-Formel ausdrücken, da $x \in \mathrm{HOD}$ genau dann gilt, wenn für alle Mengen y im transitiven Abschluss von x gilt, dass $y \in \mathrm{OD}$. Es gilt $y \in \mathrm{OD}$ genau dann, wenn Ordinalzahlen $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ so existieren, dass y über V_α mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ definierbar ist. Diese Formel ist Σ_2, da V_α durch eine Π_1-Formel definiert werden kann.

□

Satz 7. *Es gilt* $\mathrm{HOD} \models \mathrm{ZFC}$.

Beweis. Siehe [Kun80], Seite 161f. □

Wir zeigen nun ein Resultat von Vopěnka. Die Aussage des Satzes ist, dass HOD in einem gewissen Sinne nah an V liegt, da jede Menge von Ordinalzahlen generisch über HOD ist. Der Beweis orientiert sich an [Jec03].

Satz 8. (ZF) ***(von Vopěnka)***
Sei $X \subset \mathrm{Ord}$*. Dann ist* X *generisch über* HOD*. Das heißt es gilt* $X \in \mathrm{HOD}[G]$ *für eine Boolesche Algebra* $B \in \mathrm{HOD}$*, die in* HOD *vollständig ist, und einen* HOD*-generischen Ultrafilter* $G \subset B$*.*

Beweis. Sei κ so, dass $X \subset \kappa$. Weiter sei $C = \mathrm{OD} \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa)) \setminus \{\emptyset\}$ die Menge aller Ordinalzahl-definierbarer Mengen, die Mengen von Teilmengen von κ sind. Als partielle Ordnung auf C, betrachten wir die Inklusion.

Behauptung 1. Es existiert eine erblich Ordinalzahl-definierbare partiell geordnete Menge $(B, \leq)$ und ein Ordinalzahl-definierbarer Isomorphismus $\pi : (C, \subset) \to (B, \leq)$.

Beweis. Es existiert eine definierbare bijektive Abbildung $F : \mathrm{OD} \to \mathrm{Ord}$. Weiter ist C eine Ordinalzahl-definierbare Menge von Ordinalzahl-definierbaren Mengen. Deswegen ist $F \restriction C$ eine Ordinalzahl-definierbare bijektive Abbildung von C nach $F``C =: B$. Wir definieren nun eine partielle Ordnung $\leq$ auf B so, dass $(B, \leq)$ isomorph zu $(C, \subset)$ ist. Für $b_1, b_2 \in B$ setzen wir

$$b_1 \leq b_2 \text{ genau dann, wenn } F^{-1}(b_1) \subset F^{-1}(b_2).$$

Dann gilt $B \in \mathrm{OD}$, da F, C und $\subset \cap C^2$ Ordinalzahl-definierbar sind. Außerdem gilt $B \subset \mathrm{HOD}$, da $B \subset \mathrm{Ord} \subset HOD$. Also ist $B \in \mathrm{HOD}$, das heißt B ist sogar erblich Ordinalzahl-definierbar. □

$(C, \subset)$ ist mit $\cup$ als Summe und $\cap$ als Multiplikation eine Boolesche Algebra. Falls $A \subset C$ Ordinalzahl-definierbar ist, dann sind auch $\bigcup A$ und $\bigcap A$ Ordinalzahl-definierbar. Also gilt dann $\bigcup A, \bigcap A \in C$. Das heißt C ist Ordinalzahl-definierbar-vollständig.

Da π ein Ordinalzahl-definierbarer Isomorphismus ist, folgt, dass $(B, \leq)$ in HOD eine vollständige Boolesche Algebra ist, denn: Sei $A \subset B$ in HOD, das heißt es gilt $A \in \mathrm{HOD}$. Dann ist $\pi^{-1}"A \subset C$ Ordinalzahl-definierbar und es gilt $\bigcup \pi^{-1}"A \in C$. Daher folgt $\bigcup A = \pi(\bigcup \pi^{-1}"A) \in \pi"C = B$.

Setze $H = \{u \in C \mid X \in u\}$. Dann ist H ein Ultrafilter auf C.

Behauptung 2. $G = \pi"H$ ist ein HOD-generischer Ultrafilter auf B.

Beweis. G ist ein Ultrafilter, da H ein Ultrafilter und π ein Isomorphismus ist. Damit G zusätzlich HOD-generisch ist, muss für jede dichte Teilmenge D von B, die in HOD ist, $G \cap D \neq \emptyset$ gelten.

Sei daher $D \in \mathrm{HOD}$ eine dichte Teilmenge von B. Dann ist $D' := \pi^{-1}"D \in \mathrm{OD}$ eine dichte Teilmenge von C. Wir zeigen, dass $\bigcup D' = \mathcal{P}(\kappa)$.

Angenommen $\bigcup D' \subsetneq \mathcal{P}(\kappa)$. Dann gilt $\mathcal{P}(\kappa) \setminus \bigcup D' \in C$. Da D' eine dichte Teilmenge von C ist, existiert also ein $d \in D'$ mit $d \subset \mathcal{P}(\kappa) \setminus \bigcup D'$. Dies ist ein Widerspruch, da $d \in D'$ insbesondere $d \subset \bigcup D'$ impliziert.

Daher gilt $\bigcup D' = \mathcal{P}(\kappa)$. Da $X \in \mathcal{P}(\kappa)$ gilt, folgt nun, dass $X \in \bigcup D'$. Also existiert ein $d' \in D'$, sodass $X \in d'$. Daher gilt $d' \in D' \cap H$ und somit auch $\pi(d') \in D \cap G$. □

Es bleibt nun zu zeigen, dass $X \in \mathrm{HOD}[G]$ gilt. Sei dazu $f : \kappa \to B$ definiert durch $f(\alpha) = \pi(\{Z \subset \kappa \mid \alpha \in Z\})$. Dann ist f Ordinalzahl-definierbar und es gilt $f \subset \mathrm{Ord} \times \mathrm{HOD} \subset \mathrm{HOD}$. Daher gilt $f \in \mathrm{HOD}$. Außerdem gilt für jedes $\alpha < \kappa$

$$\alpha \in X \text{ genau dann, wenn } f(\alpha) \in G.$$

Denn sei $\alpha \in X$. Dann gilt

$$X \in \{Z \subset \kappa \mid \alpha \in Z\} \in \{u \in C \mid X \in u\}.$$

Also gilt

$$f(\alpha) = \pi(\{Z \subset \kappa \mid \alpha \in Z\}) \in \pi"\{u \in C \mid X \in u\} = G.$$

Für die andere Implikation gelte

$$f(\alpha) = \pi(\{Z \subset \kappa \mid \alpha \in Z\}) \in \pi"\{u \in C \mid X \in u\}.$$

Da π bijektiv ist, folgt $\{Z \subset \kappa \mid \alpha \in Z\} \in \{u \in C \mid X \in u\}$. Also gilt $X \in \{Z \subset \kappa \mid \alpha \in Z\}$ und daher $\alpha \in X$.

Es folgt also $X \in \mathrm{HOD}[G]$.

□

Bemerkung. Unter Verwendung des Auswahlaxioms gilt die Aussage des Satzes von Vopěnka sogar für beliebige Mengen X. Das heißt dann kann man den Beweis leicht so verallgemeinern, dass er für jede beliebige Menge X zeigt, dass diese generisch über HOD ist.

3 Hauptteil

Dieses Kapitel ist der Schwerpunkt dieser Arbeit. Wir werden uns in einem ersten Abschnitt damit beschäftigen, wie nah HOD an V ist. Dazu werden wir Nachfolgerkardinalzahlen in HOD betrachten und zeigen, welchen Einfluss die sogenannte HOD-Vermutung auf die korrekte Berechnung dieser Nachfolgerkardinalzahlen hat. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden wir äquivalente Formulierungen der HOD-Vermutung betrachten.

3.1 Nachfolgerkardinalzahlen in HOD

In diesem Abschnitt werden wir uns näher mit HOD beziehungsweise der sogenannten HOD-Vermutung befassen.

Für die Betrachtung von Nachfolgerkardinalzahlen in HOD werden HOD-superkompakte Kardinalzahlen eine große Rolle spielen. Daher werden wir uns zunächst mit diesem Begriff beschäftigen, der eine Verschärfung der Bedingungen für superkompakte Kardinalzahlen darstellt.

Definition 9. *Eine Kardinalzahl δ heißt* superkompakt*, falls es für alle $\lambda > \delta$ ein transitives M und eine elementare Einbettung*

$$j : V \to M$$

mit kritischem Punkt δ so gibt, dass

(i) $j(\delta) > \lambda$ und

(ii) ${}^{\lambda}M \subseteq M$.

Im Folgenden werden wir Aussagen, die nicht nur für HOD, sondern auch für allgemeinere Modelle der Mengenlehre N gelten, in diesem allgemeineren Zusammenhang beweisen. Daher werden wir auch die Definition von HOD-superkompakt allgemeiner formulieren. Dabei wird $N \subseteq V$ ein transitives Modell der Mengenlehre sein, sodass $N \vDash \mathrm{ZFC}$ und $\mathrm{Ord} \subseteq N$ gilt. Ein solches N nennen wir *inneres Modell.* Da in dieser Arbeit nur Modelle der Mengenlehre betrachtet werden, sind alle vorkommenden Modelle als Modelle der Mengenlehre zu verstehen, auch wenn dies nicht explizit angegeben ist. Dass HOD ein inneres Modell ist, haben wir in den Sätzen 6 und 7 gesehen.

Definition 10. *Sei N ein inneres Modell. Eine superkompakte Kardinalzahl δ heißt* N-superkompakt*, falls für alle $\lambda > \delta$ eine elementare Einbettung*

$$j : V \to M$$

mit kritischem Punkt δ so existiert, dass

(*i*) $j(\delta) > \lambda$,
(*ii*) ${}^{\lambda}M \subseteq M$ *und*
(*iii*) $j(N \cap V_\delta) \cap V_\lambda = N \cap V_\lambda$.

Im Folgenden werden wir für einige Resultate benötigen, dass es eine HOD-superkompakte Kardinalzahl gibt. Um diese Aussage in die Hierarchie der üblichen großen Kardinalzahlen einzuordnen, zeigen wir, dass jede erweiterbare Kardinalzahl schon HOD-superkompakt ist. Erweiterbare Kardinalzahlen sind dabei wie folgt definiert.

Definition 11. *Eine Kardinalzahl κ heißt* erweiterbar*, falls für alle $\alpha > \kappa$ eine Ordinalzahl β und eine elementare Abbildung*

$$j : V_\alpha \to V_\beta$$

mit kritischem Punkt κ so existiert, dass $\alpha < j(\kappa)$ gilt.

Lemma 12. *Sei δ eine erweiterbare Kardinalzahl. Dann ist δ* HOD*-superkompakt.*

Beweis. Sei $\gamma_0 > \delta$. Wir müssen zeigen, dass eine elementare Einbettung $j_0 : V \to M_0$ mit kritischem Punkt δ so existiert, dass

(i) $M_0^{V_{\gamma_0}} \subseteq M_0$,
(ii) $\gamma_0 < j_0(\delta)$ und
(iii) $j_0(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_{\gamma_0} = \mathrm{HOD} \cap V_{\gamma_0}$.

Wir wollen $\gamma > \gamma_0$ so wählen, dass

(1) $|V_\gamma| = \gamma$,
(2) $\mathrm{cf}(\gamma) > |V_{\gamma_0}|$ und
(3) $(\mathrm{HOD})^{V_\gamma} = \mathrm{HOD} \cap V_\gamma$.

Die Klasse $C_1 = \{\gamma \mid |V_\gamma| = \gamma\}$ ist abgeschlossen, da für eine Folge $(\gamma_\eta \mid \eta < \lambda)$ in C_1 mit Supremum γ gilt:

$$|V_\gamma| = \sup\{|V_{\gamma_\eta}| \mid \eta < \lambda\} = \sup\{\gamma_\eta \mid \eta < \lambda\} = \gamma.$$

Außerdem ist C_1 unbeschränkt. Sei α eine Ordinalzahl. Definiere eine Folge $(\alpha_n \mid n \leq \omega)$ durch $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{n+1} = |V_{\alpha_n}|$ und $\alpha_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$. Dann gilt

$$|V_{\alpha_\omega}| = \sup\{|V_{\alpha_n}| \mid n < \omega\} = \sup\{\alpha_{n+1} \mid n < \omega\} = \alpha_\omega.$$

Das heißt C_1 ist club.
Die Klasse $C_3 = \{\gamma \mid (\mathrm{HOD})^{V_\gamma} = \mathrm{HOD} \cap V_\gamma\}$ ist nach Satz 6 ebenfalls club, da die Klasse $\{\alpha \mid V_\alpha \prec_{\Sigma_n} V\}$ für ein festes n club ist.
Daher erhält man ein γ, welches (1) – (3) erfüllt, indem man ein Element mit genügend großer Kofinalität aus dem club $C_1 \cap C_3$ wählt.

Da δ eine erweiterbare Kardinalzahl ist, existiert eine elementare Einbettung $j : V_{\gamma+1} \to V_{j(\gamma)+1}$ mit kritischem Punkt δ und $\gamma < j(\delta)$. Wir wollen nun eine elementare Einbettung $j_E : V \to M$ konstruieren, für die $j_E \upharpoonright V_{\gamma+1} = j$ gilt.
Hierzu betrachten wir Tupel (f, a) mit $f : V_\gamma \to V$ und $a \in V_{j(\gamma)}$. Für solche Tupel setzen wir

$$(f, a) \sim (g, b) \text{ genau dann, wenn } (a, b) \in j(\{(u, v) \mid f(u) = g(v)\}).$$

Behauptung 1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Reflexivität ist klar, da $(a, a) \in j(\{(u, v) \mid f(u) = f(v)\})$ gilt. $\sim$ ist außerdem symmetrisch, da $(a, b) \in j(\{(u, v) \mid f(u) = g(v)\})$ genau dann gilt, wenn $(b, a) \in j(\{(u, v) \mid g(u) = f(v)\}$ gilt.
Für die Transitivität gelte $(a, b) \in j(\{(u, v) \mid f(u) = g(v)\})$ und $(b, c) \in j(\{(u, v) \mid g(u) = h(v)\})$. Dann gilt auch $(a, c) \in j(\{(u, v) \mid f(u) = h(v)\})$, da

$$\begin{aligned}(a, b, c) &\in j(\{(u, v, w) \mid f(u) = g(v)\}) \cap j(\{(u, v, w) \mid g(v) = h(w)\}) \\ &= j(\{(u, v, w) \mid f(u) = g(v) = h(w)\}) \\ &\subset j(\{(u, v, w) \mid f(u) = h(w)\}).\end{aligned}$$

Daher ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. □

Schreibe nun für die zugehörigen Äquivalenzklassen $[f, a] = \{(g, b) \mid (g, b) \sim (f, a)\}$ und definiere auf diesen

$$[f, a] \mathrel{\widetilde{\in}} [g, b] \text{ genau dann, wenn } (a, b) \in j(\{(u, v) \mid f(u) \in g(v)\}).$$

Behauptung 2. $\widetilde{\in}$ ist fundiert.

Beweis. Angenommen es existiert eine Folge $([f_n, a_n])_{n\in\omega}$ so, dass $[f_{n+1}, a_{n+1}] \mathrel{\widetilde{\in}} [f_n, a_n]$ für alle $n \in \omega$ gilt. Das heißt es gilt $(a_{n+1}, a_n) \in j(X_n)$ für

$$X_n := \{(u, v) \mid f_{n+1}(u) \in f_n(v)\} \subseteq V_\gamma \times V_\gamma \subseteq V_\gamma.$$

Wir können die Folge $(X_n \mid n \in \omega)$ durch eine geeignete Kodierung, wie zum Beispiel $\{(n, x) \mid x \in X_n, n \in \omega\} \subseteq \omega \times V_\gamma \subseteq V_\gamma$, als Element von $V_{\gamma+1}$ auffassen.
Weiter gilt $a_n \in V_{j(\gamma)} = \bigcup_{\alpha<j(\gamma)} V_\alpha$, da γ und damit auch $j(\gamma)$ eine Limeszahl ist. Daher existiert für alle $a_n \in V_{j(\gamma)}$ ein $\alpha_n < j(\gamma)$ so, dass $a_n \in V_{\alpha_n}$ gilt. Setze $\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\}$. Da $\mathrm{cf}(\gamma) > \omega$ und damit auch $\mathrm{cf}(j(\gamma)) > \omega$, gilt $\alpha < j(\gamma)$. Es folgt also $(a_n \mid n \in \omega) \in V_{\alpha+1} \subset V_{j(\gamma)}$, da $a_n \in V_\alpha \subset V_{j(\gamma)}$ für alle $n \in \omega$ gilt.
Damit gilt nun

$$V_{j(\gamma)+1} \models \forall n \, (a_{n+1}, a_n) \in j(X_n),$$

also folgt

$$V_{j(\gamma)+1} \models \exists (a'_n \mid n \in \omega) \, \forall n \, (a'_{n+1}, a'_n) \in j(X_n).$$

Da $j : V_{\gamma+1} \to V_{j(\gamma)+1}$ eine elementare Einbettung ist, folgt

$$V_{\gamma+1} \vDash \exists(a'_n \mid n \in \omega)\, \forall n\, (a'_{n+1}, a'_n) \in X_n.$$

Das heißt es gilt $(a'_{n+1}, a'_n) \in \{(u,v) \mid f_{n+1}(u) \in f_n(v)\}$ für alle $n \in \omega$, also $f_{n+1}(a'_{n+1}) \in f_n(a'_n)$ für alle $n \in \omega$, was im Widerspruch dazu steht, dass $\in$ fundiert ist. □

Sei M^* die Klasse aller Äquivalenzklassen von $[f,a]$ und sei $\sigma : (M^*, \widetilde{\in}) \to M$ der Mostowski-Kollaps. Dieser exisitiert, da $\widetilde{\in}$ fundiert, extensional und mengenähnlich ist. Hierbei meint mengenähnlich, dass $\{[f,a] \mid [f,a] \mathrel{\widetilde{\in}} [g,b]\}$ für alle $[g,b]$ eine Menge ist.
Dann definieren wir $\widetilde{j}_E : V \to (M^*, \widetilde{\in})$ durch $\widetilde{j}_E(z) = [c_z, \emptyset]$, wobei c_z die konstante Funktion mit Wert z bezeichnet. Weiter definieren wir

$$j_E : V \to M$$

durch $j_E(z) = \sigma \circ \widetilde{j}_E(z)$.
Wir wollen nun zeigen, dass $j_E \restriction V_{\gamma+1} = j$ gilt. Dazu zeigen wir zunächst die folgende Behauptung.

Behauptung 3. Für alle $a \in V_{j(\gamma)}$ gilt $a = \sigma([\mathrm{id}, a])$.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch $\in$-Induktion.
Zunächst zeigen wir $a \subseteq \sigma([\mathrm{id}, a])$. Sei dazu $b \in a$. Dann gilt $[\mathrm{id}, b] \mathrel{\widetilde{\in}} [\mathrm{id}, a]$, denn

$$\begin{aligned}(b,a) &\in \{(u,v) \mid \mathrm{id}(u) \in \mathrm{id}(v)\}\\ &= \{(u,v) \mid j(\mathrm{id})(u) \in j(\mathrm{id})(v)\}\\ &= j(\{(u,v) \mid \mathrm{id}(u) \in \mathrm{id}(v)\})\end{aligned}$$

Aus $[\mathrm{id}, b] \mathrel{\widetilde{\in}} [\mathrm{id}, a]$, folgt $\sigma([\mathrm{id}, b]) \in \sigma([\mathrm{id}, a])$ und, da nach Induktionsvoraussetzung $\sigma([\mathrm{id}, b]) = b$, auch $b \in \sigma([\mathrm{id}, a])$.
Nun zeigen wir die andere Inklusion $\sigma([\mathrm{id}, a]) \subseteq a$. Sei dazu $[f,c] \mathrel{\widetilde{\in}} [\mathrm{id}, a]$. Dann ist zu zeigen, dass ein $b \in a$ so existiert, dass $[f,c] = [\mathrm{id}, b]$, da dann mit der Induktionsvoraussetzung $\sigma([f,c]) = \sigma([\mathrm{id}, b]) = b \in a$ folgt.
Definiere $f' : V_\gamma \to V_\gamma$ durch

$$f'(u) = \begin{cases} f(u), & \text{falls } f(u) \in V_\gamma \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $f' \in V_{\gamma+1}$, das heißt $j(f')$ ist definiert. Dann folgt aus $[f,c] \mathrel{\widetilde{\in}} [\mathrm{id}, a]$, dass

$$\begin{aligned}(c,a) &\in j(\{(u,v) \mid f(u) \in \mathrm{id}(v)\})\\ &\subseteq j(\{(u,v) \mid f'(u) \in v\})\\ &= \{(u,v) \mid j(f')(u) \in v\}.\end{aligned}$$

Das heißt es gilt $j(f')(c) \in a$. Setze $b = j(f')(c)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(c,b) &\in \{(u,v) \mid j(f')(u) = v\}\\ &= j(\{(u,v) \mid f'(u) = v\})\\ &= j(\{(u,v) \mid f(u) = \mathrm{id}(v)\}).\end{aligned}$$

Daher folgt $[f,c] = [\mathrm{id}, b]$ und hierdurch auch die Behauptung. □

Damit können wir nun folgende Behauptung zeigen.

Behauptung 4. Es gilt $j_E \upharpoonright V_\gamma = j \upharpoonright V_\gamma$.

Beweis. Wegen Behauptung 3 ist zu zeigen, dass

$$j_E(z) = \sigma \circ \widetilde{j}_E(z) = \sigma([c_z, \emptyset]) \overset{!}{=} \sigma([\mathrm{id}, j(z)]) = j(z)$$

für $z \in V_\gamma$. Wir zeigen daher $[c_z, \emptyset] = [\mathrm{id}, j(z)]$ für $z \in V_\gamma$. Es gilt

$$\begin{aligned}&c_{j(z)}(\emptyset) = j(z) = \mathrm{id}(j(z))\\ \Leftrightarrow\ &(\emptyset, j(z)) \in \{(u,v) \mid c_{j(z)}(u) = \mathrm{id}(v)\}\\ \Leftrightarrow\ &(\emptyset, j(z)) \in j(\{(u,v) \mid c_z(u) = \mathrm{id}(v)\}).\end{aligned}$$

Also folgt $[c_z, \emptyset] = [\mathrm{id}, j(z)]$. □

Die Elementarität von j_E folgt aus der folgenden Variante des Satzes von Łoś.

Satz 13. ***(von Łoś)***
Für alle Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und beliebige $[f_1, a_1], \ldots, [f_n, a_n] \in M^*$ gilt

$$(M^*, \widetilde{\in}) \models \varphi([f_1, a_1], \ldots, [f_n, a_n]) \Leftrightarrow$$

$$(a_1, \ldots, a_n) \in j(\{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \models \varphi(f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\}).$$

Beweis. Wir zeigen diese Aussage durch Induktion nach der Komplexität von φ.
Sei also φ zunächst atomar. Es gilt

$$\begin{aligned}(M^*, \widetilde{\in}) \models \text{„}[f,a] \in [g,b]\text{"} &\Leftrightarrow [f,a]\ \widetilde{\in}\ [g,b]\\ &\Leftrightarrow (a,b) \in j(\{(u,v) \mid f(u) \in g(v)\}).\end{aligned}$$

Sei nun $\varphi \equiv \neg\psi$ für eine Formel ψ. Dann gilt

$$\begin{aligned}&(M^*, \widetilde{\in}) \models \varphi([f_1, a_1], \ldots, [f_n, a_n])\\ \Leftrightarrow\ &(M^*, \widetilde{\in}) \not\models \psi([f_1, a_1], \ldots, [f_n, a_n])\\ \Leftrightarrow\ &(a_1, \ldots, a_n) \notin j(\{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \models \psi(f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\})\\ \Leftrightarrow\ &(a_1, \ldots, a_n) \in j(\{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \not\models \psi(f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\})\\ \Leftrightarrow\ &(a_1, \ldots, a_n) \in j(\{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \models \varphi(f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\}).\end{aligned}$$

Sei nun $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ für Formeln ψ_1, ψ_2. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&(M^*, \ \widetilde{\in}\ ) \vDash \varphi([f_1, a_1], \ldots, [f_n, a_n]) \\
\Leftrightarrow\ &(M^*, \ \widetilde{\in}\ ) \vDash \text{„}\psi_1([f_1, a_1], \ldots, [f_n, a_n]) \text{ und } (M^*, \ \widetilde{\in}\ ) \vDash \psi_2([f_1, a_1], \ldots, [f_n, a_n])\text{"} \\
\Leftrightarrow\ &(a_1, \ldots, a_n) \in j(\{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash \psi_1(f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\}) \cap \\
&\qquad\qquad j(\{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash \psi_2(f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\}) \\
\Leftrightarrow\ &(a_1, \ldots, a_n) \in j(\{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash \psi_1(f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\} \cap \\
&\qquad\qquad (u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash \psi_2(f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\}) \\
\Leftrightarrow\ &(a_1, \ldots, a_n) \in j(\{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash (\psi_1 \wedge \psi_2)(f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\})
\end{aligned}$$

Sei nun $\varphi \equiv \exists x\ \psi$ für eine Formel ψ. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&(M^*, \ \widetilde{\in}\ ) \vDash \exists x\ \psi(x, [f_1, a_1], \ldots, [f_n, a_n]) \\
\Leftrightarrow\ &\text{es existiert ein } x = [g, b] \text{ so, dass } (M^*, \ \widetilde{\in}\ ) \vDash \psi([g, b], [f_1, a_1], \ldots, [f_n, a_n]) \\
\Leftrightarrow\ &\text{es existiert ein } x = [g, b] \text{ so, dass} \\
&(b, a_1, \ldots, a_n) \in j(\{(v, u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash \psi(g(v), f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\})
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass

$$(a_1, \ldots, a_n) \in j(\{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash \exists x\ \psi(x, f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\}),$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}
&\{(v, u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash \psi(g(v), f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\} \\
\subseteq\ &V_\gamma \times \{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash \exists x\ \psi(x, f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\}.
\end{aligned}$$

Da j elementar ist, gilt also auch

$$\begin{aligned}
&j(\{(v, u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash \psi(g(v), f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\}) \\
\subseteq\ &V_{j(\gamma)} \times j(\{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash \exists x\ \psi(x, f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\}).
\end{aligned}$$

Für die andere Implikation gelte

$$(a_1, \ldots, a_n) \in j(\{(u_1, \ldots, u_n) \mid V \vDash \exists x\ \psi(x, f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))\}).$$

Nach dem Ersetzungsschema existiert eine Menge a so, dass für alle $u_1, \ldots, u_n$, für die ein x mit $V \vDash \psi(x, f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))$ existiert, ein solches x aus der Menge a existiert. Sei $<_a$ eine Wohlordnung auf a. Definiere

$$f((u_1, \ldots, u_n)) = \begin{cases} \text{das } <_a \text{-kleinste } x \in a \text{ mit} & \\ \qquad V \vDash \psi(x, f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n)), & \text{falls dies existiert} \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt, falls $V \vDash \exists x\ \psi(x, f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n))$ gilt, auch

$$V \vDash \psi(f((u_1, \ldots, u_n)), f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n)).$$

Also folgt

$$(a_1, \dots, a_n) \in j(\{(u_1, \dots, u_n) \mid V \vDash \psi(f((u_1, \dots, u_n)), f_1(u_1), \dots, f_n(u_n))\}).$$

Damit gilt nun

$$(b, a_1, \dots, a_n) \in j(\{(v, u_1, \dots, u_n) \mid V \vDash \psi(f(v), f_1(u_1), \dots, f_n(u_n))\})$$

mit $b = (a_1, \dots, a_n) \in V_{j(\gamma)}$. □

Behauptung 5. Es gilt $\sigma([f, a]) = j_E(f)(a)$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass

$$j_E(f)(a) = j_E(f)(\sigma([\mathrm{id}, a])) = (\sigma([c_f, \emptyset]))(\sigma([\mathrm{id}, a])) \stackrel{!}{=} \sigma([f, a]).$$

Letzteres gilt nach dem Satz von Łoś genau dann, wenn

$$\begin{aligned}(\emptyset, a, a) &\in j(\{(u, v, w) \mid V \vDash (c_f(u))(\mathrm{id}(v)) = f(w)\}) \\ &= j(\{(u, v, w) \mid V \vDash f(v) = f(w)\}).\end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich erfüllt. □

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass $j_E \restriction V_{\gamma+1} = j$ gilt.

Behauptung 6. Es gilt $j_E \restriction V_{\gamma+1} = j$.

Beweis. Sei $x \subset V_\gamma$ und $a \in V_{j(\gamma)}$. Wir zeigen zunächst, dass

$$a \in j_E(x) \Leftrightarrow a \in j(x)$$

gilt. Es gilt nach Definition $j_E(x) = \sigma([c_x, \emptyset])$ und $a = \sigma([\mathrm{id}, a])$ nach Behauptung 3. Daher gilt:

$$\begin{aligned}a \in j_E(x) &\Leftrightarrow [\mathrm{id}, a] \mathrel{\widetilde{\in}} [c_x, \emptyset] \\ &\Leftrightarrow (a, \emptyset) \in j(\{(u, v) \mid \mathrm{id}(u) \in c_x(v)\}) \\ &\Leftrightarrow (a, \emptyset) \in j(\{(u, v) \mid u \in x\}) \\ &\Leftrightarrow (a, \emptyset) \in \{(u, v) \mid u \in j(x)\} \\ &\Leftrightarrow a \in j(x).\end{aligned}$$

Damit gilt nun

$$j_E(x) \cap V_{j(\gamma)} = j(x) \cap V_{j(\gamma)}$$

für alle $x \subset V_\gamma$. Damit aus dieser Aussage die Behauptung folgt, muss $V_{j_E(\gamma)} \subseteq V_{j(\gamma)}$ gelten. Dann gilt

$$j_E(x) = j_E(x) \cap V_{j_E(\gamma)} = j_E(x) \cap V_{j(\gamma)} = j(x) \cap V_{j(\gamma)} = j(x).$$

Angenommen es gilt $j(\gamma) < j_E(\gamma)$. Dann gilt $j(\gamma) = \sigma([a, f]) = j_E(f)(a)$ für eine Abbildung $f : V_\gamma \to V$ und ein $a \in V_{j(\gamma)}$. Das heißt wegen $j_E(f)(a) < j_E(\gamma)$ gilt

$$(a, \emptyset) \in j(\{(u, v) \mid f(u) < c_\gamma(v)\}).$$

Daher können wir f ohne Beschränkung der Allgemeinheit so wählen, dass $f : V_\gamma \to \gamma$ gilt. Insbesondere gilt also $f \subset V_\gamma$. Nach dem oben Gezeigten gilt damit

$$j_E(f) \cap V_{j(\gamma)} = j(f) \cap V_{j(\gamma)} = j(f).$$

Mit $j(\gamma) = j_E(f)(a)$ und $a \in V_{j(\gamma)}$ folgt daraus nun

$$\begin{aligned}(a, \emptyset) &\in \{(u, v) \mid j_E(f)(u) = j(c_\gamma)(v)\}\\ &= \{(u, v) \mid j(f)(u) = j(c_\gamma)(v)\}\\ &= j(\{(u, v) \mid f(u) = c_\gamma(v)\}).\end{aligned}$$

Dies steht offensichtlich im Widerspruch zu $(a, \emptyset) \in j(\{(u, v) \mid f(u) < c_\gamma(v)\})$. Daraus folgt die Behauptung. □

Damit haben wir nun eine elementare Einbettung $j_E : V \to M$ so konstruiert, dass $j_E \upharpoonright V_{\gamma+1} = j$ gilt. Da j mit kritischem Punkt $\delta < \gamma$ gewählt war, gilt also, dass der kritische Punkt von j_E ebenfalls δ ist. Damit j_E bezeugt, dass δ superkompakt ist, muss die folgende Behauptung gezeigt werden.

Behauptung 7. Es gilt $M^{V_{\gamma_0}} \subset M$.

Beweis. Sei $F : |V_{\gamma_0}| \to M$ eine Abbildung. Dann ist zu zeigen, dass $F \in M$ gilt.
Wähle für $i < \mu := |V_{\gamma_0}|$ Abbildungen $f_i : V_\gamma \to V$ und $a_i \in V_{j(\gamma)}$ so, dass $F(i) = \sigma([f_i, a_i])$ gilt. Nach Behauptung 5 gilt dann

$$F(i) = \sigma([f_i, a_i]) = j_E(f_i)(a_i).$$

Es ist zu zeigen, dass eine Abbildung $f : V_\gamma \to V$ und ein $a \in V_{j(\gamma)}$ so existieren, dass folgendes gilt:

$$F = \sigma([f, a]) = j_E(f)(a).$$

Es gilt

$$j_E((f_i \mid i < \mu)) = (g_i \mid i < j_E(\mu)) \in M,$$

wobei $j_E(f_i) = g_{j_E(i)}$ gilt. Weiter gilt $j_E{}''\mu \in V_{\sup j_E{}''\mu} \subset M$. Also folgt

$$(j_E(f_i) \mid i < \mu) = (g_i \mid i \in j_E{}''\mu) \in M.$$

Daher existiert ein $[g, b]$ mit $(j_E(f_i) \mid i < \mu) = j(g)(b)$, also mit

$$j_E(f_i) = j(g)(b)(i).$$

Setze $a = (((a_i \mid i < \mu), \mu), b) \in V_{j(\gamma)}$ und sei $f((((u_k \mid k < \overline{\mu}), \overline{\mu}), w))$ eine Funktion mit Definitionsbereich $\overline{\mu}$ so, dass für alle $k < \overline{\mu}$ gilt:

$$f((((u_k \mid k < \overline{\mu}), \overline{\mu}), w))(k) = g(w)(k)(u_k).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} j_E(f)(a)(i) &= j_E(f)((((a_i \mid i < \mu), \mu), b))(i) \\ &= j_E(g)(b)(i)(a_i) \\ &= j_E(f_i)(a_i). \end{aligned}$$

Also gilt $j_E(f)(a) = F$ und damit $F \in M$. □

Um zu zeigen, dass δ sogar HOD-superkompakt ist, genügt der Beweis der folgenden Behauptung.

Behauptung 8. Es gilt $j_E(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_\gamma = \mathrm{HOD} \cap V_\gamma$.

Beweis. Für eine beliebige Klasse $A = \{x \mid \varphi(x, \vec{p})\}$ sei

$$j_E(A) = \{x \in M \mid M \vDash \varphi(x, j(\vec{p}))\}.$$

Dann gilt $j_E(\mathrm{HOD}) = (\mathrm{HOD})^M$.
Da δ eine erweiterbare Kardinalzahl ist, gilt $V_\delta \prec_{\Sigma_2} V$ und daher nach Satz 6 auch

$$\mathrm{HOD} \cap V_\delta = (\mathrm{HOD})^{V_\delta}.$$

Die Gleichung

$$\mathrm{HOD} \cap V_\gamma = (\mathrm{HOD})^{V_\gamma}$$

gilt nach Wahl von γ. Wir zeigen nun zunächst die Inklusion $j_E(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_\gamma \subset \mathrm{HOD} \cap V_\gamma$. Es gilt

$$\begin{aligned} j_E(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_\gamma &= j_E((\mathrm{HOD})^{V_\delta}) \cap V_\gamma \\ &= (\mathrm{HOD})^{V_{j_E(\delta)}} \cap V_\gamma \\ &\subseteq \mathrm{HOD} \cap V_{j_E(\delta)} \cap V_\gamma \\ &= \mathrm{HOD} \cap V_\gamma, \end{aligned}$$

da $(\mathrm{HOD})^{V_\alpha} \subseteq \mathrm{HOD} \cap V_\alpha$ für jede Ordinalzahl α gilt. Außerdem gilt für beliebige Ordinalzahlen $\alpha < \beta$, dass $(\mathrm{HOD})^{V_\alpha} \subseteq (\mathrm{HOD})^{V_\beta}$. Daher folgt die andere Inklusion mit folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} \mathrm{HOD} \cap V_\gamma &= \mathrm{HOD} \cap V_\gamma \cap V_\gamma \\ &= (\mathrm{HOD})^{V_\gamma} \cap V_\gamma \\ &\subseteq (\mathrm{HOD})^{V_{j_E(\delta)}} \cap V_\gamma \\ &= j_E((\mathrm{HOD})^{V_\delta}) \cap V_\gamma \\ &= j_E(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_\gamma. \end{aligned}$$

□

Damit ist $j_0 := j_E$ die gesuchte elementare Einbettung, die bezeugt, dass δ HOD-superkompakt ist.

$\square$

Wir wollen uns nun mit der HOD-Vermutung befassen. Dazu benötigen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 14. *Sei κ eine überabzählbare, reguläre Kardinalzahl. Dann heißt κ* ω-stark messbar in HOD*, falls ein $\gamma < \kappa$ so existiert, dass folgendes gilt:*
(i) γ ist eine unendliche Kardinalzahl in HOD*, $(2^\gamma)^{\mathrm{HOD}} < \kappa$ und*
(ii) es existiert keine Folge $(S_\alpha \mid \alpha < \gamma) \in \mathrm{HOD}$ von paarweise disjunkten Teilmengen von κ so, dass S_α für alle $\alpha < \gamma$ stationär in $\{\eta < \kappa \mid \mathrm{cf}(\eta) = \omega\}$ ist.

Nun können wir definieren, was wir unter HOD-Vermutung verstehen wollen.

Definition 15. *Mit* HOD-Vermutung *wird die folgende Aussage bezeichnet:*
Es existiert eine echte Klasse von überabzählbaren, regulären Kardinalzahlen κ, die nicht ω-stark messbar in HOD *sind.*

Wir wollen im Folgenden untersuchen, wie sich die Gültigkeit der HOD-Vermutung darauf auswirkt, wie nah HOD an V liegt. Wir werden dazu betrachten, ob in HOD die Nachfolger von Kardinalzahlen genauso wie in V ausgerechnet werden.
Der folgende Satz sagt aus, dass, falls die HOD-Vermutung nicht stimmt, sehr viele Nachfolgerkardinalzahlen in HOD falsch ausgerechnet werden.

Satz 16. *Angenommen die* HOD-*Vermutung gilt nicht. Dann existiert ein α so, dass* HOD *für alle $\kappa \geq \alpha$ den Nachfolger κ^+ falsch ausrechnet. Das heißt für alle $\kappa \geq \alpha$ gilt*

$$(\kappa^+)^{\mathrm{HOD}} < (\kappa^+)^V.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die folgende Behauptung, aus der sich die Aussage des Satzes später leicht ergeben wird.

Behauptung 1. Sei κ eine überabzählbare, reguläre Kardinalzahl, die ω-stark messbar in HOD ist. Dann ist κ messbar in HOD.

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ der club-Filter bei κ. Wir wollen zeigen, dass es eine stationäre Menge $S \subseteq \{\xi < \kappa \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$ so gibt, dass

$$\mathrm{HOD} \vDash \text{„}(\mathcal{F} \restriction S) \cap \mathrm{HOD} \text{ ist ein Ultrafilter”}.$$

Dabei ist $\mathcal{F} \restriction S = \{X \subseteq S \mid \exists C \subseteq \kappa \text{ club mit } C \cap S \subseteq X\}$.
Betrachte die Menge $S^\kappa_\omega = \{\xi < \kappa \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$.

1. Fall: S^κ_ω kann nicht als $S_0 \cup S_1$ geschrieben werden, mit $S_0, S_1 \in \mathrm{HOD}$, $S_0 \cap S_1 = \emptyset$ und $V \vDash$ „S_0, S_1 sind stationär”.
Dann existiert für jedes $S \subseteq S^\kappa_\omega$ mit $S \in \mathrm{HOD}$ ein club C so, dass $C \cap S^\kappa_\omega \subseteq S$ oder

$(C \cap S^\kappa_\omega) \cap S = \emptyset$ gilt. Ansonsten wäre $S, S^\kappa_\omega \setminus S$ eine disjunkte Zerlegung von S^κ_ω in Mengen aus HOD, die stationär in V sind.
Falls $C \cap S^\kappa_\omega \subseteq S$ für einen club C gilt, dann folgt $S \in (\mathcal{F} \restriction S^\kappa_\omega) \cap \mathrm{HOD}$. Andernfalls gilt $(C \cap S^\kappa_\omega) \cap S = \emptyset$ für einen club C. Dann folgt, dass $S^\kappa_\omega \setminus S \in (\mathcal{F} \restriction S^\kappa_\omega) \cap \mathrm{HOD}$. Daher ist $(\mathcal{F} \restriction S^\kappa_\omega) \cap \mathrm{HOD}$ ein Ultrafilter in HOD, was zu zeigen war.

2. Fall: S^κ_ω lässt sich als $S_0 \cup S_1$ schreiben, wobei $S_0, S_1 \in \mathrm{HOD}$, $S_0 \cap S_1 = \emptyset$ und $V \vDash$ „S_0, S_1 sind stationär" gilt.
Wir werden diesen Fall auf den obigen Fall zurück führen. Dazu konstruieren wir in HOD rekursiv Mengen S_x für $x \in \{0,1\}^{<\beta}$. Dabei soll β eine Ordinalzahl sein, die so groß ist, dass die alle Argumente durchgeführt werden können. Wir werden sehen, dass die Konstruktion abbrechen muss und daher immer ein solches β existiert.
Wir setzen $S_\emptyset = S^\kappa_\omega$. Für $lh(x) = \alpha + 1$ für ein α, betrachte das vorher konstruierte $S_{x \restriction \alpha}$. Falls $S_{x \restriction \alpha}$ stationär ist, existieren ohne Beschränkung der Allgemeinheit stationäre Mengen $S_{(x \restriction \alpha)^\frown 0}, S_{(x \restriction \alpha)^\frown 1} \in \mathrm{HOD}$ so, dass $S_{x \restriction \alpha} = S_{(x \restriction \alpha)^\frown 0} \cup S_{(x \restriction \alpha)^\frown 1}$ und $S_{(x \restriction \alpha)^\frown 0} \cap S_{(x \restriction \alpha)^\frown 1} = \emptyset$ gilt, da die Behauptung ansonsten wie im 1. Fall folgt.
Falls $S_{(x \restriction \alpha)}$ nicht stationär ist, setze $S_{(x \restriction \alpha)^\frown 0} = \emptyset$ und $S_{(x \restriction \alpha)^\frown 1} = S_{(x \restriction \alpha)}$.
Für $lh(x) = \lambda$ für eine Limesordinalzahl λ, setze $S_x = \bigcap_{\alpha < \lambda} S_{(x \restriction \alpha)}$.
Diese Konstruktion lässt sich in HOD durchführen, da HOD den Filter

$$(\mathcal{F} \restriction S^\kappa_\omega) \cap \mathrm{HOD} = \{X \subseteq S^\kappa_\omega \mid X \in \mathrm{HOD} \wedge \exists C \subseteq \kappa \text{ club mit } C \cap S^\kappa_\omega \subseteq X\}$$

als Element enthält.
Behauptung 2. Für alle α mit $(2^\alpha)^{\mathrm{HOD}} < \kappa$ existiert mindestens ein x mit $lh(x) = \alpha$ so, dass S_x stationär ist.

Beweis. Angenommen alle S_x mit $lh(x) = \alpha$ sind nicht stationär. Dann existieren club-Mengen $C_x \subseteq \kappa$ mit $S_x \cap C_x = \emptyset$. Da

$$|\{C_x \mid lh(x) = \alpha\}| = (2^{lh(x)})^{\mathrm{HOD}} < \kappa$$

gilt, ist auch $\bigcap\{C_x \mid lh(x) = \alpha\}$ club. Aus $S^\kappa_\omega = \bigcup\{S_x \mid lh(x) = \alpha\}$ folgt dann

$$S^\kappa_\omega \cap \bigcap\{C_x \mid lh(x) = \alpha\} = \emptyset.$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass S^κ_ω stationär ist. $\square$

Da κ ω-stark messbar in HOD ist, existiert ein $\gamma < \kappa$ so, dass $(2^\gamma)^{\mathrm{HOD}} < \kappa$ gilt und keine Folge $(S_\alpha \mid \alpha < \gamma) \in \mathrm{HOD}$ von paarweise disjunkten Teilmengen von κ so existiert, dass S_α für alle $\alpha < \kappa$ stationär in S^κ_ω ist.
Da $(2^\gamma)^{\mathrm{HOD}} < \kappa$ gilt, existiert ein x mit $lh(x) = \gamma$ so, dass S_x stationär ist. Dann ist auch $S_{x \restriction \alpha}$ für alle $\alpha < \gamma$ stationär, da $S_x \subseteq S_{x \restriction \alpha}$ gilt. Definiere

$$T_\alpha = S_{x \restriction \alpha} \setminus S_{x \restriction (\alpha+1)}.$$

Dann ist T_α nach Konstruktion für alle $\alpha < \gamma$ stationär, da S_α stationär ist. Außerdem sind nach Definition alle T_α disjunkt. Das heißt

$$(T_\alpha \mid \alpha < \gamma) \in \mathrm{HOD}$$

ist eine Folge von paarweise disjunkten Teilmengen von κ so, dass T_α für alle $\alpha < \gamma$ stationär in S^κ_ω ist. Dies steht im Widerspruch dazu, dass κ ω-stark messbar in HOD ist. Daher muss diese Konstruktion abbrechen, was bedeutet, dass die Behauptung immer wie im 1. Fall folgt.

Insgesamt folgt nun, dass eine Menge $S \subseteq S^\kappa_\omega$ so existiert, dass

$$\mathrm{HOD} \vDash \text{„}(\mathcal{F} \restriction S) \cap \mathrm{HOD} \text{ ist ein Ultrafilter"}.$$

Dieser Filter ist offensichtlich $< \kappa$-vollständig und nicht prinzipal, da dies für den club-Filter $\mathcal{F}$ gilt. Daher ist κ messbar in HOD. □

Daraus folgt nun mit dem folgenden Argument, dass, wenn die HOD-Vermutung nicht gilt, ein α so existiert, dass HOD für alle $\kappa \geq \alpha$ den Nachfolger κ^+ falsch berechnet.
Wenn die HOD-Vermutung nicht gilt, gibt es keine echte Klasse von überabzählbaren, regulären Kardinalzahlen, die nicht ω-stark messbar in HOD sind. Das heißt es existiert ein α so, dass $(\kappa^+)^V$ für alle $\kappa^+ > \alpha$ ω-stark messbar in HOD ist. Mit Behauptung 1 folgt, dass $(\kappa^+)^V$ messbar in HOD ist. Insbesondere ist $(\kappa^+)^V$ in HOD keine Nachfolgerkardinalzahl, also gilt

$$(\kappa^+)^{\mathrm{HOD}} < (\kappa^+)^V$$

für alle $\kappa^+ > \alpha$.

□

Wir wollen nun zeigen, dass, wenn die HOD-Vermutung gilt und es eine HOD-superkompakte Kardinalzahl gibt, in HOD viele Nachfolgerkardinalzahlen richtig berechnet werden. Dazu benötigen wir zunächst die Definition eines Maßes.

Definition 17. *Sei A eine Menge mit $|A| \geq \delta$. Sei F der Filter auf $\mathcal{P}_\delta(A)$, der durch die Mengen*

$$\hat{P} = \{Q \in \mathcal{P}_\delta(A) \mid P \subseteq Q\}$$

erzeugt wird. Ein $< \delta$-vollständiger Ultrafilter μ auf $\mathcal{P}_\delta(A)$, der F erweitert, heißt feines Maß*.*
Ein feines Maß μ heißt normal*, falls es abgeschlossen unter diagonalen Durchschnitten*

$$\underset{a\in A}{\Delta} X_a = \{x \in \mathcal{P}_\delta(A) \mid x \in \bigcap_{a \in x} X_a\}$$

ist.

Zwischen normalen, feinen Maßen und superkompakten Kardinalzahlen existiert folgender Zusammenhang.

Satz 18. *Eine Kardinalzahl δ ist genau dann superkompakt, wenn für alle $\lambda \geq \delta$ ein normales, feines Maß μ auf $\mathcal{P}_\delta(\lambda)$ existiert.*

Beweis. Siehe [Jec03], Seite 375. □

Um zu zeigen, dass aus der HOD-Vermutung und der Existenz einer HOD-superkompakten Kardinalzahl folgt, dass viele Nachfolgerkardinalzahlen in HOD richtig berechnet werden, zeigen wir zunächst, dass aus diesen beiden Annahmen folgt, dass es ein normales, feines Maß auf $\mathcal{P}_\delta(\gamma)$ gibt, welches, im Bezug auf HOD, zwei nützliche Eigenschaften besitzt.

Satz 19. (HOD**-Vermutung)**
Sei δ eine superkompakte Kardinalzahl und sei $\gamma > \delta$. Dann existiert ein normales, feines Maß μ auf $\mathcal{P}_\delta(\gamma)$ so, dass folgendes gilt:
(i) $\mu(\mathrm{HOD} \cap \mathcal{P}_\delta(\gamma)) = 1$ *und*
(ii) falls δ HOD-*superkompakt ist, gilt $\mu \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{HOD}$.*

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir zunächst das folgende Lemma, welches wir in einem allgemeineren Zusammenhang formulieren.

Lemma 20. *Sei N ein inneres Modell. Weiter sei δ N-superkompakt, $\gamma > \delta$ und $a \in V_\gamma$. Dann existiert eine elementare Einbettung $j : V \to M$ mit kritischem Punkt $\overline{\delta} < \delta$ so, dass*
(i) $j(\overline{\delta}) = \delta$,
(ii) $(\overline{a}, \overline{\lambda}) \in V_\delta$ *existieren mit* $j((\overline{a}, \overline{\lambda})) = (a, \lambda)$,
(iii) $V_\gamma \subseteq M$ *und* $j(N \cap V_{\overline{\gamma}}) = N \cap V_\gamma$.

Beweis. Fixiere $\gamma > \delta$ wie im Beweis zu Lemma 12 mit $|V_\gamma| = \gamma$ und $a \in V_\gamma$. Da δ N-superkompakt ist, existiert eine elementare Einbettung $j_0 : V \to M$ mit kritischem Punkt δ so, dass folgendes gilt:
(1) $M^{V_{\gamma+1}} \subseteq M$,
(2) $\gamma < \gamma + 1 < j_0(\delta)$ und
(3) $V_\gamma \cap N = V_\gamma \cap j_0(N \cap V_\delta)$.
Es gilt $j_0 \restriction V_{\gamma+1} \in M$, da $M^{V_{\gamma+1}} \subseteq M$ gilt. Daher können wir

$$j_0 \restriction V_{\gamma+1} : V_{\gamma+1} \to V^M_{j_0(\gamma)+1}$$

als elementare Einbettung in M auffassen. Setze $j_0^* = j_0 \restriction V_{\gamma+1}$.
Wir zeigen nun, dass j_0^* bezeugt, dass die geforderten Eigenschaften in M für $j_0(\delta)$ und $(j_0(a), j_0(\gamma))$ gelten. Der kritische Punkt von j_0^* ist $\delta < j_0(\delta)$ und es gilt $j_0^*(\delta) = j_0(\delta)$. Weiter gilt in M

$$j_0^*((a, \gamma)) = (j_0^*(a), j_0^*(\gamma)) = (j_0(a), j_0(\gamma)),$$

mit $(a, \gamma) \in V_{j_0(\delta)}$, da $a \in V_\gamma$ und $\gamma \in V_{\gamma+1}$ gilt. Außerdem gilt

$$j_0^*(N^M \cap V_\gamma) = V_{j_0(\gamma)} \cap N^M,$$

da
$$N \cap V_\gamma = V_\gamma \cap j_0(N \cap V_\delta) = V_\gamma \cap N^M \cap V_{j_0(\delta)} = N^M \cap V_\gamma$$
gilt und daraus durch Anwenden von j_0^* folgt, dass
$$j_0^*(N^M \cap V_\gamma) = j_0^*(N \cap V_\gamma) = j_0(N \cap V_\gamma) = N^M \cap V_{j_0(\gamma)}$$
gilt. Das heißt insgesamt gilt nun

$M \vDash$ „$\exists\gamma\, \exists j_0^* : V_{\gamma+1} \to V_{j_0^*(\gamma)+1}$ mit kritischem Punkt $\overline{\delta} < j_0(\delta)$ so, dass
(i) $j_0^*(\overline{\delta}) = j_0(\delta)$,
(ii) $(\overline{a}, \overline{\gamma}) \in V_{j_0(\delta)}$ existieren, mit $j_0^*((\overline{a}, \overline{\gamma})) = (j_0(a), j_0(\gamma))$ und
(iii) $j_0^*(N \cap V_{\overline{\gamma}}) = V_{j_0(\gamma)} \cap N$."

Daraus folgt nun mit der Elementarität von j_0, dass folgendes gilt:

$V \vDash$ „$\exists\gamma\, \exists j^* : V_{\gamma+1} \to V_{j^*(\gamma)+1}$ mit kritischem Punkt $\overline{\delta} < \delta$ so, dass
(i) $j^*(\overline{\delta}) = (\delta)$,
(ii) $(\overline{a}, \overline{\gamma}) \in V_\delta$ existieren, mit $j^*((\overline{a}, \overline{\gamma})) = (a, \gamma)$ und
(iii) $j^*(N \cap V_{\overline{\gamma}}) = V_\gamma \cap N$."

Eine Ultrapotenzkonstruktion wie im Beweis von Lemma 12 liefert dann eine elementare Einbettung
$$j : V \to M$$
mit $j \restriction V_{\gamma+1} = j^*$. Daher bleiben die Eigenschaften $(i) - (iii)$ für j erhalten. Weiter gilt offensichtlich $V_\gamma \subset V_{j(\gamma)+1} \subset M$. □

Beweis von Satz 19. Fixiere eine reguläre Kardinalzahl $\kappa > |V_{\gamma+\omega+1}|$ so, dass κ nicht ω-stark messbar in HOD ist. Ein solches κ existiert auf Grund der HOD-Vermutung. Fixiere weiter, analog zum Beweis von Lemma 12, $\lambda > |V_{\kappa+\omega}|$ so, dass
$$\mathrm{HOD} \cap V_\lambda = (\mathrm{HOD})^{V_\lambda}$$
gilt. Dann gilt
$$\mathrm{HOD} \cap V_{\kappa+2} = \mathrm{HOD} \cap V_\lambda \cap V_{\kappa+2} = (\mathrm{HOD})^{V_\lambda} \cap V_{\kappa+2}.$$
Sei $S^\kappa_\omega = \{\xi < \kappa \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$. Da κ nicht ω-stark messbar in HOD ist, existiert eine Folge
$$(S_\alpha \mid \alpha < |V_{\gamma+\omega}|) \in \mathrm{HOD}$$
von paarweise disjunkten Mengen so, dass S_α für alle $\alpha < |V_{\gamma+\omega}|$ stationär in S^κ_ω ist und
$$S^\kappa_\omega = \bigcup\{S_\alpha \mid \alpha < |V_{\gamma+\omega}|\}$$

gilt, denn $\omega < |V_{\gamma+\omega}| < \kappa$ und $(2^{|V_{\gamma+\omega}|})^{\mathrm{HOD}} \leq |V_{\gamma+\omega+1}| < \kappa$.
Sei $a = (\gamma, \kappa, (S_\alpha \mid \alpha < |V_{\gamma+\omega}|))$. Da

$$j_0(V \cap V_\delta) \cap V_\lambda = V_{j_0(\delta)} \cap V_\lambda = V_\lambda = V \cap V_\lambda$$

für die Abbildung j_0 gilt, die bezeugt, dass δ superkompakt ist, ist δ V-superkompakt. Weiter gilt $\lambda > \delta$ und $a \in V_\lambda$. Daher existiert nach Lemma 20 eine elementare Einbettung $j : V \to M$ mit kritischem Punkt $\overline{\delta}$, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:
(1) $j(\overline{\delta}) = \delta$,
(2) es existiert $(\overline{a}, \overline{\lambda}) \in V_\delta$ so, dass $j((\overline{a}, \overline{\lambda})) = (a, \lambda)$,
(3) $V_\lambda \subseteq M$ und
(4) $\mathrm{HOD} \cap V_\lambda \subseteq j(\mathrm{HOD} \cap V_{\overline{\lambda}})$.
Die Bedingung (4) gilt, da aus $j(\overline{\lambda}) = \lambda$ und $V_\lambda \subseteq M$ folgt, dass $j(V_{\overline{\lambda}}) = V_\lambda$. Da außerdem $(\mathrm{HOD})^{V_\alpha} \subseteq \mathrm{HOD} \cap V_\alpha$ für alle Ordinalzahlen α gilt, folgt

$$\mathrm{HOD} \cap V_\lambda = (\mathrm{HOD})^{V_\lambda} = j((\mathrm{HOD})^{V_{\overline{\lambda}}}) \subseteq j(\mathrm{HOD} \cap V_{\overline{\lambda}}).$$

Sei $(\overline{\gamma}, \overline{\kappa}, \overline{\lambda})$ das Urbild von $(\gamma, \kappa, \lambda)$ unter j und sei

$$(\overline{S}_\alpha \mid \alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|)$$

das Urbild von $(S_\alpha \mid \alpha < |V_{\gamma+\omega}|)$ unter j. Da $(S_\alpha \mid \alpha < |V_{\gamma+\omega}|) \in \mathrm{HOD} \cap V_\lambda = (\mathrm{HOD})^{V_\lambda}$ gilt, folgt aus der Elementarität von j, dass

$$(\overline{S}_\alpha \mid \alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|) \in (\mathrm{HOD})^{V_{\overline{\lambda}}}$$

gilt. Außerdem folgt für alle $\alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|$ aus der Elementarität von j, dass $\overline{S}_\alpha \subseteq \{\eta < \overline{\kappa} \mid \mathrm{cf}(\eta) = \omega\}$ gilt und dass $\overline{S}_\alpha$ stationär ist. Für $\eta < \overline{\kappa}$ mit $\mathrm{cf}(\eta) > \omega$ setze

$$\sigma_\eta = \{\alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}| \mid \overline{S}_\alpha \cap \eta \text{ ist stationär in } \eta\}.$$

Da $(\overline{S}_\alpha \mid \alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|) \in (\mathrm{HOD})^{V_{\overline{\lambda}}}$ gilt, gilt auch

$$(\sigma_\eta \mid \eta < \overline{\kappa}, \mathrm{cf}(\eta) > \omega) \in (\mathrm{HOD})^{V_{\overline{\lambda}}}.$$

Setze

$$(\tau_\eta \mid \eta < \kappa, \mathrm{cf}(\eta) > \omega) = j((\sigma_\eta \mid \eta < \overline{\kappa}, \mathrm{cf}(\eta) > \omega)).$$

Das heißt aus der Elementarität von j folgt, dass für alle $\eta < \kappa$ mit $\mathrm{cf}(\eta) > \omega$ gilt, dass

$$\tau_\eta = \{\alpha < |V_{\gamma+\omega}| \mid S_\alpha \cap \eta \text{ ist stationär in } \eta\}.$$

Außerdem gilt $(\tau_\eta \mid \eta < \kappa, \mathrm{cf}(\eta) > \omega) \in (\mathrm{HOD})^{V_\lambda} = \mathrm{HOD} \cap V_\lambda \subset \mathrm{HOD}$.
Setze

$$\eta_0 = \sup\{j(\xi) \mid \xi < \overline{\kappa}\}.$$

Dann gilt $\mathrm{cf}(\eta_0) = \mathrm{cf}(\overline{\kappa}) = \overline{\kappa} > \omega$ und $\eta_0 < \kappa$. Daher ist τ_{η_0} sinnvoll definiert. Wir zeigen nun zunächst die folgende Behauptung:

Behauptung 1. Es gilt $\tau_{\eta_0} = \{j(\alpha) \mid \alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|\}$.

Beweis. Wir zeigen zu Beginn die folgende Aussage: Für jeden club $C \subseteq \eta_0$ existiert ein club $D \subseteq \overline{\kappa}$ so, dass

$$\{j(\xi) \mid \xi \in D, \mathrm{cf}(\xi) = \omega\} \subseteq \{\xi \in C \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$$

gilt. Sei $C \subseteq \eta_0$ club. Setze $D = \{\xi < \overline{\kappa} \mid j(\xi) \in C\}$. Dann gilt offensichtlich

$$\{j(\xi) \mid \xi \in D, \mathrm{cf}(\xi) = \omega\} \subseteq \{\xi \in C \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\},$$

da, falls $\xi \in D$, auch $j(\xi) \in C$ folgt und da, falls $\mathrm{cf}(\xi) = \omega$ gilt, auch $\mathrm{cf}(j(\xi)) = j(\omega) = \omega$ gilt. Außerdem ist $D \subseteq \overline{\kappa}$ club, denn:

D abgeschlossen: Seien $\xi_\alpha \in D$ für $\alpha < \lambda < \overline{\kappa}$. Dann gilt $j(\xi_\alpha) \in C$. Daher folgt

$$j(\sup_{\alpha<\lambda} \xi_\alpha) = \sup_{\alpha<j(\lambda)} j(\xi_\alpha) \in C,$$

da C abgeschlossen ist. Also gilt $\sup_{\alpha<\lambda} \xi_\alpha \in D$.

D unbeschränkt: Sei $\beta < \overline{\kappa}$. Zu zeigen ist, dass ein $\xi \geq \beta, \xi < \overline{\kappa}$ mit $j(\xi) \in C$ existiert. Da $\{j(\xi) \mid \xi < \overline{\kappa}\}$ club in η_0 ist, ist auch $C \cap \{j(\xi) \mid \xi < \overline{\kappa}\}$ club in η_0. Also existiert ein

$$\zeta = j(\xi) \in C \cap \{j(\xi) \mid \xi < \overline{\kappa}\}$$

mit $j(\xi) \geq j(\beta)$. Daher folgt $\xi \in D$ und, da j elementar ist, $\xi \geq \beta$.

Also ist D wie gewünscht.

Wir zeigen als Nächstes die Inklusion $\{j(\alpha) \mid \alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|\} \subseteq \tau_{\eta_0}$ durch Widerspruch. Angenommen es gilt $\alpha \notin \tau_{\eta_0}$ und es existiert ein $\overline{\alpha}$ so, dass $j(\overline{\alpha}) = \alpha$. Dann existiert ein club C_α so, dass $C_\alpha \cap S_\alpha \cap \eta_0 = \emptyset$ gilt, da

$$\tau_{\eta_0} = \{\alpha < |V_{\gamma+\omega}| \mid S_\alpha \cap \eta_0 \text{ ist stationär in } \eta_0\}.$$

Sei $D_\alpha \subseteq \overline{\kappa}$ (wie oben konstruiert) ein club so, dass

$$\{j(\xi) \mid \xi \in D_\alpha, \mathrm{cf}(\xi) = \omega\} \subseteq \{\xi \in C_\alpha \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}.$$

Da $\overline{S}_{\overline{\alpha}}$ stationär in $\overline{\kappa}$ ist, existiert ein $\xi \in D_\alpha \cap \overline{S}_{\overline{\alpha}}$ so, dass $j(\xi) \in C_\alpha$. Dann gilt aber auch

$$j(\xi) \in j(\overline{S}_{\overline{\alpha}}) = S_{j(\overline{\alpha})} = S_\alpha$$

und, da $C_\alpha \subseteq \eta_0$ gilt, folgt

$$j(\xi) \in C_\alpha \cap S_\alpha \cap \eta_0 \neq \emptyset.$$

Dies ist ein Widerspruch, da α so gewählt war, dass $C_\alpha \cap S_\alpha \cap \eta_0 = \emptyset$ gilt. Damit folgt also $\{j(\alpha) \mid \alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|\} \subseteq \tau_{\eta_0}$.

Nun zeigen wir die andere Inklusion $\tau_{\eta_0} \subseteq \{j(\alpha) \mid \alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|\}$.

Sei $\beta \in \tau_{\eta_0}$ beliebig und sei C ein beliebiger club in η_0. Dann ist $S_\beta \cap \eta_0$ stationär in η_0

und es existiert ein $\xi \in S_\beta \cap C$. Da $\xi \in S_\beta \subseteq S^\kappa_\omega$ gilt, folgt $\mathrm{cf}(\xi) = \omega$. Sei $\overline{\xi}$ das Urbild von ξ unter j. Da

$$j((\overline{S}_\alpha \mid \alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|)) = (S_\alpha \mid \alpha < |V_{\gamma+\omega}|)$$

gilt, folgt aus der Elementarität von j, dass

$$\{\eta < \overline{\kappa} \mid \mathrm{cf}(\eta) = \omega\} = \bigcup\{\overline{S}_\alpha \mid \alpha < \overline{\kappa}\}.$$

Also existiert ein $\overline{\alpha} < \overline{\kappa}$ so, dass $\overline{\xi} \in \overline{S}_{\overline{\alpha}}$, da $\mathrm{cf}(\overline{\xi}) = \mathrm{cf}(\xi) = \omega$ gilt. Auf Grund der Elementarität von j gilt dann auch

$$\xi = j(\overline{\xi}) \in j(\overline{S}_{\overline{\alpha}}) = S_{j(\overline{\alpha})}.$$

Es folgt $\beta = j(\overline{\alpha})$, da $\xi \in S_\beta \cap S_{j(\overline{\alpha})}$ und $S_\beta \cap S_{j(\overline{\alpha})} = \emptyset$ für $\beta \neq j(\overline{\alpha})$ gilt. Damit folgt $\tau_{\eta_0} \subseteq \{j(\alpha) \mid \alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|\}$. □

Aus dieser Behauptung folgt, dass

$$\{j(\alpha) \mid \alpha < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|\} \in \mathrm{HOD} \cap V_\lambda,$$

da $(\tau_\eta \mid \eta < \kappa, \mathrm{cf}(\eta) > \omega) \in \mathrm{HOD} \cap V_\lambda$ gilt.
Sei ν das normale Maß auf $\mathcal{P}_{\overline{\delta}}(\overline{\gamma})$, welches durch j induziert wird. Das heißt es gilt

$$X \in \nu \Leftrightarrow j\,"\overline{\gamma} = \{j(\xi) \mid \xi < \overline{\gamma}\} \in j(X).$$

Dies ist ein normales Maß, da δ (und damit auch $\overline{\delta}$) superkompakt ist.
Setze $\mu = j(\nu)$. Es gilt $j(\mathcal{P}_{\overline{\delta}}(\overline{\gamma})) = \mathcal{P}_\delta(\gamma)$ und $\overline{\gamma} < \delta$ und daher $\{j(\xi) \mid \xi < \overline{\gamma}\} \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) = j(\mathcal{P}_{\overline{\delta}}(\overline{\gamma}))$. Außerdem gilt mit Eigenschaft (4) von j, dass

$$\{j(\xi) \mid \xi < \overline{\gamma}\} \in \mathrm{HOD} \cap V_\lambda \subseteq j(\mathrm{HOD} \cap V_{\overline{\lambda}}).$$

Damit folgt

$$\{j(\xi) \mid \xi < \overline{\gamma}\} \in j(\mathcal{P}_{\overline{\delta}}(\overline{\gamma})) \cap j(\mathrm{HOD} \cap V_{\overline{\lambda}}) = j(\mathcal{P}_{\overline{\delta}}(\overline{\gamma}) \cap \mathrm{HOD}) \cap V_\lambda \subseteq j(\mathcal{P}_{\overline{\delta}}(\overline{\gamma}) \cap \mathrm{HOD}).$$

Das heißt es gilt $\nu(\mathcal{P}_{\overline{\delta}}(\overline{\gamma}) \cap \mathrm{HOD}) = 1$. Auf Grund der Elementarität von j folgt, dass dann auch

$$\mu(\mathcal{P}_\delta(\gamma) \cap \mathrm{HOD}) = 1$$

gilt. Das heißt μ bezeugt, dass (i) gilt.
Um (ii) zu zeigen, sei δ nun sogar HOD-superkompakt. Das heißt es gilt nun, dass

$$\mathrm{HOD} \cap V_\lambda = j(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_\lambda = j(\mathrm{HOD} \cap V_\delta \cap V_{\overline{\lambda}}) = j(\mathrm{HOD} \cap V_{\overline{\lambda}}).$$

Sei $\pi \in V_{\overline{\lambda}} \cap \mathrm{HOD}$ eine Surjektion mit $\pi : \theta \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\overline{\gamma})) \cap \mathrm{HOD}$ für ein $\theta < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|$. Da $j(\mathrm{HOD} \cap V_{\overline{\lambda}}) = \mathrm{HOD} \cap V_\lambda$ gilt, folgt, dass $j(\pi) \in \mathrm{HOD} \cap V_\lambda$ eine Surjektion ist, für die gilt

$$j(\pi) : j(\theta) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\gamma)) \cap \mathrm{HOD}\,.$$

Es gilt $\tau_{\eta_0} = \{j(\xi) \mid \xi < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|\} \in \mathrm{HOD}$, also folgt

$$A := \{j(x) \mid x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\overline{\gamma})) \cap \mathrm{HOD}\} \in \mathrm{HOD},$$

denn $A = \{j(x) \mid x \in \mathrm{im}(\pi)\} = \{j(x) \mid x \in \pi"\theta\}$ für ein $\theta < |V_{\overline{\gamma}+\omega}|$. Daraus folgt $\nu \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{HOD}$, denn

$$\nu \cap \mathrm{HOD} = \{x \in \mathrm{HOD} \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(\overline{\gamma})) \mid \{j(\xi) \mid \xi < \overline{\gamma}\} \in j(x)\} \in \mathrm{HOD}\,.$$

Damit gilt dann auch $\mu \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{HOD}$, was für (ii) zu zeigen war. □

Aus dem Beweis dieses Satzes folgt der folgende Satz, den wir später ebenfalls benötigen werden.

Satz 21. *Sei δ eine superkompakte Kardinalzahl. Angenommen für alle λ existiert eine reguläre Kardinalzahl $\gamma > \lambda$ und eine Partition*

$$(T_\alpha \mid \alpha < \lambda) \in \mathrm{HOD}$$

von $\{\eta < \gamma \mid \mathrm{cf}(\eta) = \omega\}$ in stationäre Mengen. Dann existiert für alle γ ein normales, feines Maß μ auf $\mathcal{P}_\delta(\gamma)$ so, dass
(i) $\mu(\mathrm{HOD} \cap \mathcal{P}_\delta(\gamma)) = 1$ und
(ii) falls δ HOD-superkompakt ist, gilt $\mu \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{HOD}$.

Da wir die Existenz eines normalen, feinen Maßes mit obigen Eigenschaften häufiger benötigen, machen wir die folgende Definition.

Definition 22. *Sei N ein inneres Modell. Dann gilt*

$$o^N_{\mathrm{LONG}}(\delta) = \infty,$$

falls für alle $\lambda > \delta$ ein normales, feines Maß μ auf $\mathcal{P}_\delta(\lambda)$ so existiert, dass
(i) $\mu(N \cap \mathcal{P}_\delta(\lambda)) = 1$ und
(ii) $\mu \cap N \in N$.

Wir wollen nun in einem Lemma zeigen, dass in V_κ eine N-superkompakte Kardinalzahl existiert, wenn κ als riesige Kardinalzahl vorausgesetzt wird.

Definition 23. *Ein Kardinalzahl κ heißt* riesig, *falls eine elementare Einbettung*

$$j : V \to M$$

mit kritischem Punkt κ so existiert, dass ${}^{j(\kappa)}M \subset M$ gilt.

Um das oben erwähnte Lemma zu beweisen, benötigen wir das Konzept der Extender.

Definition 24. *Sei η eine Ordinalzahl $j : V_\eta \to M$ eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt κ. Sei $\hat{\eta}$ die kleinste Ordinalzahl, sodass $\eta \leq j(\hat{\eta})$ gilt. Für eine endliche Teilmenge $s \subseteq \eta$ setze*

$$E_s = \{X \subseteq [\hat{\eta}]^{|s|} \mid s \in j(X)\}.$$

Dann heißt die Menge

$$E = \{E_s \mid s \in [\eta]^{<\omega}\}$$

prä-Extender *der Länge η, der durch j gegeben ist.*
Zu jedem prä-Extender erhält man durch eine Ultrapotenzkonstruktion eine elementare Abbildung. Falls die Ultrapotenz von V mit E für einen prä-Extender E fundiert ist, heißt E Extender. *Falls $\eta > j(\kappa)$ gilt, heißt E langer Extender. Andernfalls gilt $\hat{\eta} = \kappa$ und E heißt kurzer Extender.*
Für einen Extender E bezeichnen wir mit

$$j_E : V \to M_E$$

die zugehörige elementare Abbildung. Weiter definieren wir folgende Notationen:

(*i*) CRT(E) *ist der kritische Punkt der zugehörigen elementaren Abbildung $j_E : V \to M_E$.*

(*ii*) LTH(E) *ist die Länge des Extenders.*

(*iii*) SPT(E) *ist die kleinste Ordinalzahl β so, dass $j_E(\beta) \geq \text{LTH}(E)$ gilt.*

(*iv*) $\rho(E) = \sup\{\eta \mid V_\eta \subseteq M_E\}$.

Bemerkung. Wir haben Extender bereit im Beweis von Lemma 12 gesehen. Bezeichne j die elementare Einbettung aus Lemma 12. Sei E der Extender der Länge $j(\gamma)$, der durch j gegeben ist. Dann ist die im Beweis konstruierte Abbildung j_E die zu E gehörige elementare Abbildung.

Lemma 25. *Sei κ eine riesige Kardinalzahl. Sei $N \subseteq V_\kappa$ und $\kappa \subseteq N$. Dann existiert ein $\delta < \kappa$ so, dass*

$$(V_\kappa, N) \models \text{„}\delta \textit{ ist } N\textit{-superkompakt"}.$$

Beweis. Da κ riesig ist, existiert eine elementare Einbettung

$$j : V \to M$$

mit kritischem Punkt κ so, dass $M^{j(\kappa)} \subseteq M$ gilt. Wir zeigen, dass

$$V_{j(\kappa)} = V^M_{j(\kappa)} \models \text{„}\kappa \text{ ist } j(N)\text{-superkompakt"}.$$

Sei $\lambda \in V_{j(\kappa)}$. Wegen ${}^{j(\kappa)}M \subset M$, gilt $j \restriction V_\lambda \in M$. Setze $Z = V^M_{j(\lambda)} \subset V_{j(\lambda)}$. Für $a \in [Z]^{<\omega}$ und $X \in [V_\lambda]^{<\omega}$ setze weiter

$$X \in E_a \Leftrightarrow a \in j(X).$$

Betrachte den Extender $E = (E_a \mid a \in [Z]^{<\omega})$.
Sei θ genügend groß und wähle $P \prec V_\theta$ so, dass

$$(E_a \mid a \in [Z]^{<\omega}) \in P$$

gilt und P abgeschlossen unter Folgen der Länge $|V_\lambda|$ ist. P kann so konstruiert werden, dass $|P| = 2^{|V_\lambda|} < j(\kappa)$ gilt.
Sei Q der transitive Kollaps von P und σ der zugehörige Isomorphismus. Dann ist Q abgeschlossen unter Folgen der Länge $|V_\lambda|$ und es gilt $V_\lambda \subset Q$.
Sei $\overline{E}$ das Urbild von E unter σ, das heißt gelte

$$\sigma((\overline{E}_a \mid a \in \overline{Z})) = (E_a \mid a \in Z).$$

Dann ist $\overline{E}$ ein Extender, da die Ultrapotenz von $V_{j(\kappa)}$ mit $\overline{E}$ über

$$l : [f, a]_{\overline{E}} \mapsto [f, \sigma(a)]_E$$

in die Ultrapotenz von $V_{j(\kappa)}$ mit E eingebettet werden kann. Letztere Ultrapotenz ist fundiert, da sie durch

$$k : [f, a]_E \mapsto j(f)(a)$$

in $V^M_{j(j(\kappa))}$ eingebettet werden kann. Außerdem gilt $\overline{E} \in V_{j(\kappa)}$, da $\overline{E} \in Q$ und $|P| < j(\kappa)$ gilt.
Aus $j \restriction V_\lambda \in V^M_{j(\lambda)} = Z$, folgt $j_{\overline{E}} \restriction V_\lambda \in \overline{Z}$. Wie im Beweis von Lemma 12 bezeugt $j_{\overline{E}}$ in $V_{j(\kappa)}$, dass κ superkompakt ist.
Es bleibt zu zeigen, dass

$$j_{\overline{E}}(j_{\overline{E}}(N) \cap V_\kappa) \cap V_\lambda = j_{\overline{E}}(N) \cap V_\lambda$$

gilt. Nach dem folgenden Argument gilt $j(j(N) \cap V_\kappa) \cap V_\lambda = j(N) \cap V_\lambda$: Da κ der kritische Punkt von j ist, gilt $j(N) \cap V_\kappa = N \cap V_\kappa$. Durch Anwenden von j folgt daraus $j(j(N) \cap V_\kappa) = j(N \cap V_\kappa)$. Das heißt es gilt

$$j(j(N) \cap V_\kappa) \cap V_\lambda = j(N \cap V_\kappa) \cap V_\lambda = j(N) \cap V_{j(\kappa)} \cap V_\lambda = j(N) \cap V_\lambda.$$

Da P abgeschlossen unter Folgen der Länge $|V_\lambda|$ ist, gilt $|V_\lambda|^+ \subset P$. Daraus folgt $\sigma \restriction |V_\lambda|^+ = \mathrm{id}$ und daher auch $l \restriction |V_\lambda|^+ = \mathrm{id}$.
Weiter gilt $k \restriction Z = \mathrm{id}$, da $Z = V^M_{j(\kappa)}$ gilt. Es gilt

$$j(N) = k \circ j_E(N) = k \circ l \circ j_{\overline{E}}(N).$$

Da $\mathrm{crit}(k \circ l) > \lambda$ gilt, folgt $j(N) \cap V_\lambda = j_{\overline{E}}(N) \cap V_\lambda$. Damit gilt insgesamt

$$j_{\overline{E}}(j_{\overline{E}}(N) \cap V_\kappa) \cap V_\lambda = j_{\overline{E}}(N) \cap V_\lambda.$$

Daher bezeugen $j_{\overline{E}}$ und κ nun, dass

$$V_{j(\kappa)} = V^M_{j(\kappa)} \models \text{„Es existiert ein } \delta < j(\kappa) \text{ so, dass } \delta\ j(N)\text{-superkompakt ist“}.$$

Mit der Elementarität von j folgt daraus die Behauptung.

□

Wir wollen nun zeigen, dass, falls die HOD-Vermutung gilt und δ eine HOD-superkompakte Kardinalzahl ist, für alle singulären Kardinalzahlen $\lambda > \delta$ die Nachfolgerkardinalzahl λ^+ in HOD richtig ausgerechnet wird. Dazu benötigen wir zunächst das folgende grundlegende Resultat von Solovay.

Satz 26. ***(von Solovay)***
Sei λ eine reguläre Kardinalzahl mit $\lambda > \delta$ und sei μ ein normales, feines Maß auf $\mathcal{P}_\delta(\lambda)$. Dann existiert ein $X \in \mu$ so, dass für alle $\sigma, \tau \in X$ gilt:

$$\textit{Falls } \sup(\sigma) = \sup(\tau) \textit{ gilt, dann folgt } \sigma = \tau.$$

Beweis. Da λ regulär ist und $\{\alpha < \lambda \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ stationär ist, existiert nach dem Satz von Solovay eine Partition

$$(S_\alpha \mid \alpha < \lambda)$$

von $\{\alpha < \lambda \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ in paarweise disjunkte stationäre Mengen. Für jedes $\eta < \lambda$ mit $\omega < \mathrm{cf}(\eta) < \delta$ sei

$$Z_\eta = \{\alpha < \eta \mid S_\alpha \cap \eta \text{ ist stationär in } \eta\}.$$

Setze weiter

$$X = \{Z_\eta \mid \eta < \lambda, \omega < \mathrm{cf}(\eta) < \delta \text{ und } \sup(Z_\eta) = \eta\}.$$

Dann gilt für alle $Z_\eta, Z_{\overline{\eta}} \in X$ mit $\sup(Z_\eta) = \sup(Z_{\overline{\eta}})$, dass

$$\eta = \sup(Z_\eta) = \sup(Z_{\overline{\eta}}) = \overline{\eta},$$

also $Z_\eta = Z_{\overline{\eta}}$.
Es bleibt daher zu zeigen, dass $X \in \mu$ gilt. Sei $j : V \to M$ die elementare Einbettung, die man durch Ultrapotenzkonstruktion aus μ erhält. Das heißt es gelten folgende Eigenschaften:

(1) Der kritische Punkt von j ist δ und es gilt $j(\delta) > \lambda$.

(2) $\{j(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \in M$.

(3) Für alle $Y \subseteq \mathcal{P}_\delta(\lambda)$ gilt:

$$Y \in \mu \Leftrightarrow \{j(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \in j(Y).$$

Setze $\eta = \sup\{j(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$. Dann gilt $\eta < j(\lambda)$, da $\eta \leq j(\lambda)$ und $\lambda < j(\lambda)$ gilt, wobei $j(\lambda)$ regulär ist. Außerdem gilt $\mathrm{cf}(\eta) \leq \lambda < j(\delta)$.
$S_\alpha \subseteq \{\alpha < \lambda \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ ist für alle $\alpha < \lambda$ stationär in λ. Daher existiert eine Partition

$$(T_\alpha \mid \alpha < j(\lambda))$$

von $\{\xi < j(\lambda) \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$ in paarweise disjunkte stationäre Mengen mit $j(S_\alpha) = T_{j(\alpha)}$ für $\alpha < \lambda$. Weiter ist $\{j(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ ω-abgeschlossen und unbeschränkt in η. Daher gilt für alle $\alpha < \lambda$

$$M \vDash \text{„} j(S_\alpha) \cap \eta \text{ ist stationär in } \eta\text{”}.$$

Das heißt es gilt

$$\{j(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} = \{\alpha < \eta \mid M \vDash \text{„}T_\alpha \cap \eta \text{ ist stationär in } \eta\text{”}\}$$

und daher $\{j(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \in j(X)$. Damit gilt $X \in \mu$.

□

Nun können wir das folgende Resultat zeigen.

Satz 27. *Sei N ein inneres Modell. Es gelte $o^N_{\text{LONG}}(\delta) = \infty$. Dann gilt:*

(i) Sei $a \in [\text{Ord}]^{<\delta}$. Dann existiert ein $b \in [\text{Ord}]^{<\delta} \cap N$ so, dass $a \subseteq b$ gilt.

(ii) Sei $\gamma > \delta$ und γ eine reguläre Kardinalzahl in N. Dann gilt $|\gamma| = \text{cf}(\gamma)$.

(iii) Sei $\lambda > \delta$ und λ eine singuläre Kardinalzahl. Dann ist λ in N eine singuläre Kardinalzahl und $\lambda^+ = (\lambda^+)^N$.

Beweis. (i) Sei $a \in [\text{Ord}]^{<\delta}$. Wähle λ so, dass $a \in \mathcal{P}_\delta(\lambda)$. Da $o^N_{\text{LONG}}(\delta) = \infty$ gilt, existiert ein feines Maß μ so, dass $N \cap \mathcal{P}_\delta(\lambda) \in \mu$. Insbesondere gilt

$$\hat{a} = \{d \in \mathcal{P}_\delta(\lambda) \mid a \subseteq d\} \in \mu.$$

Mit $N \cap \mathcal{P}_\delta(\lambda) \in \mu$, folgt $\hat{a} \cap N \cap \mathcal{P}_\delta(\lambda) \in \mu$. Insbesondere ist diese Menge nicht leer, daher existiert ein $b \in \hat{a} \cap N \cap \mathcal{P}_\delta(\lambda)$. Für dieses b gilt, dass $b \in N \cap \mathcal{P}_\delta(\lambda) \subseteq N \cap [\text{Ord}]^{<\delta}$ und $a \subseteq b$.

(ii) Sei $\gamma > \delta$ eine reguläre Kardinalzahl in N. Weiter sei μ ein normales, feines Maß auf $\mathcal{P}_\delta(\gamma)$ so, dass

(1) $\mu(N \cap \mathcal{P}_\delta(\gamma)) = 1$ und

(2) $\mu \cap N \in N$.

Nach dem vorigen Satz von Solovay, angewendet in N, existiert eine Menge $X \in \mu \cap N$ so, dass für alle $\sigma, \tau \in X$ mit $\sup(\sigma) = \sup(\tau)$ schon $\sigma = \tau$ folgt.
Angenommen es gilt $\text{cf}(\gamma) < |\gamma|$.

Behauptung 1. Es gilt $\text{cf}(\gamma) \geq \delta$.

Beweis. Angenommen es existiert ein $a \in \mathcal{P}_\delta(\gamma)$ mit $\sup a = \gamma$, das heißt $\text{cf}(\gamma) < \delta$. Nach (i) existiert dann ein $b \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \cap N$ mit $a \subseteq b$. Insbesondere gilt dann also auch $\sup b = \gamma$. Da $b \in N$ gilt, folgt

$$N \vDash \text{„ cf}(\gamma) < \delta\text{”}.$$

Im Widerspruch dazu gilt allerdings

$$N \vDash \text{„ cf}(\gamma) = \gamma > \delta\text{”},$$

da γ regulär in N ist.

□

Sei ν das Maß auf γ, welches durch μ induziert wird. Das heißt für alle $A \subseteq \gamma$ gilt

$$A \in \nu \Leftrightarrow \{\sigma \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \mid \sup(\sigma) \in A\} \in \mu.$$

Sei $C \subseteq \gamma$ club in γ. Dann gilt die folgende Behauptung.

Behauptung 2. $\{\sigma \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \mid \sup(\sigma) \in C\}$ ist club in $\mathcal{P}_\delta(\gamma)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass diese Menge abgeschlossen ist. Dazu sei $\lambda \leq \delta$ eine Limesordinalzahl und $\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}$ eine aufsteigende Kette aus $\{\sigma \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \mid \sup(\sigma) \in C\}$. Setze

$$\sigma = \sup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\} = \bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}.$$

1. Fall: σ ist beschränkt, das heißt es existiert ein $\overline{\xi} \in \bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}$ mit $\xi < \overline{\xi}$ für alle $\xi \in \sigma = \bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}$. Dann gilt

$$\sup(\sigma) = \sup(\bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}) = \overline{\xi}.$$

   Da $\overline{\xi} \in \bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}$, gilt $\overline{\xi} \in \sigma_{\overline{\eta}}$ für ein $\overline{\eta} < \lambda$. Weiter gilt $\xi < \overline{\xi}$ für alle $\xi \in \sigma_{\overline{\eta}}$. Daher folgt

$$\overline{\xi} = \sup(\sigma_{\overline{\eta}}) \in C,$$

   da $\sigma_{\overline{\eta}} \in \{\sigma \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \mid \sup(\sigma) \in C\}$. Damit folgt $\sup(\sigma) = \overline{\xi} \in C$.
2. Fall: σ ist unbeschränkt, das heißt für alle $\xi \in \bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}$ existiert ein $\overline{\xi} \in \bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}$ mit $\xi < \overline{\xi}$. Wir zeigen, dass dann

$$\sup(\sigma) = \sup(\{\sup(\sigma_\eta) \mid \eta < \lambda\})$$

   gilt. Sei $x \in \sup(\sigma) = \bigcup(\bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\})$. Dann existiert ein $a \in \bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}$ mit $x \in a$. Weiter existiert ein $\overline{\eta} < \lambda$ mit $a \in \sigma_{\overline{\eta}}$. Also gilt $a \subseteq \bigcup \sigma_{\overline{\eta}} = \sup(\sigma_{\overline{\eta}})$. Damit folgt $x \in \sup(\sigma_{\overline{\eta}})$, also

$$x \in \bigcup\{\sup(\sigma_\eta) \mid \eta < \lambda\} = \sup(\{\sup(\sigma_\eta) \mid \eta < \lambda\}.$$

   Das heißt es gilt $\sup(\sigma) \subseteq \sup(\{\sup(\sigma_\eta) \mid \eta < \lambda\})$.
   Sei nun $x \in \bigcup\{\sup(\sigma_\eta) \mid \eta < \lambda\}$, also $x \in \sup(\sigma_{\overline{\eta}}) = \bigcup \sigma_{\overline{\eta}}$ für ein $\overline{\eta} < \lambda$. Dann existiert ein $b \in \sigma_{\overline{\eta}}$ mit $x \in b$. Es gilt

$$b \in \bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}.$$

   Da $\bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}$ als unbeschränkt vorausgesetzt ist, existiert ein $\overline{b} \in \bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\}$ mit $b < \overline{b}$, das heißt $b \in \overline{b}$. Daher folgt $b \in \bigcup(\bigcup\{\sigma_\eta \mid \eta < \lambda\})$. Das heißt es gilt $x \in b \in \sup(\sigma)$. Da $\sup(\sigma)$ transitiv ist, folgt $x \in \sup(\sigma)$ und damit $\sup(\{\sup(\sigma_\eta) \mid \eta < \lambda\}) \subseteq \sup(\sigma)$.
   Insgesamt gilt nun $\sup(\sigma) = \sup(\{\sup(\sigma_\eta) \mid \eta < \lambda\})$. Da $\sup(\sigma_\eta) \in C$ für alle $\eta < \lambda$ gilt und C abgeschlossen ist, folgt also $\sup(\sigma) \in C$.

Da in beiden Fällen $\sup(\sigma) \in C$ gilt, folgt

$$\sigma \in \{\sigma \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \mid \sup(\sigma) \in C\}.$$

Also ist $\{\sigma \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \mid \sup(\sigma) \in C\}$ abgeschlossen.
Es bleibt zu zeigen, dass diese Menge unbeschränkt ist. Dazu sei $\beta \in \mathcal{P}_\delta(\gamma)$. Sei $\{\beta_\eta \in \gamma \mid \eta < \lambda\}$ mit $\lambda \leq \delta$ eine Aufzählung von β. Da C unbeschränkt in γ ist, existiert für alle $\beta_\eta \in \gamma$ ein $\overline{\beta}_\eta \in C$ mit $\beta_\eta \leq \overline{\beta}_\eta$. Setze

$$\overline{\beta} = \beta \cup \{\overline{\beta}_\eta \mid \eta < \lambda\}.$$

Dann gilt $\beta \subseteq \overline{\beta}$ und $\overline{\beta} \in \{\sigma \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \mid \sup(\sigma) \in C\}$, da $\overline{\beta} \in \mathcal{P}_\delta(\gamma)$ und

$$\sup(\overline{\beta}) = \sup(\{\overline{\beta}_\eta \mid \eta < \lambda\}) \in C,$$

weil $\overline{\beta}_\eta \in C$ für alle $\eta < \lambda$ gilt und C abgeschlossen ist.
Also ist $\{\sigma \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \mid \sup(\sigma) \in C\}$ unbeschränkt in $\mathcal{P}_\delta(\gamma)$ und es folgt die Behauptung. □

Da jedes normale, feine Maß auf $\mathcal{P}_\delta(\gamma)$ alle Mengen enthält, die club in $\mathcal{P}_\delta(\gamma)$ sind, gilt

$$\{\sigma \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \mid \sup(\sigma) \in C\} \in \mu$$

und daher $C \in \nu$.
Da $\mathrm{cf}(\gamma) < |\gamma|$ gilt, existiert eine Menge A, die club in γ ist, mit $|A| = \mathrm{cf}(\gamma)$. Das heißt es existiert ein $A \in \nu$ mit $|A| = \mathrm{cf}(\gamma)$. Dann gilt

$$\{\sigma \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \mid \sup(\sigma) \in A\} \in \mu.$$

Sei X die Menge aus dem Satz von Solovay. Da $X \in \mu$ gilt, folgt

$$B := \{\sigma \in X \mid \sup(\sigma) \in A\} \in \mu.$$

Aus $|A| = \mathrm{cf}(\gamma)$ und $B \subseteq X$ folgt, dass $|B| \leq \mathrm{cf}(\gamma)$ gilt. Mit $\delta \leq \mathrm{cf}(\gamma)$ folgt weiter, dass $|\bigcup B| \leq \mathrm{cf}(\gamma)$. Aus der Annahme $\mathrm{cf}(\gamma) < |\gamma|$, folgt $\bigcup B \subsetneq \gamma$.
Daher existiert ein $\xi < \gamma$ mit $\xi \notin \bigcup B$. Da μ ein feines Maß ist, gilt

$$\hat{\xi} := \{\sigma \in \mathcal{P}_\delta(\gamma) \mid \{\xi\} \subseteq \sigma\} \in \mu.$$

Also folgt $B \cap \hat{\xi} \in \mu$, was insbesondere bedeutet, dass die Menge $B \cap \hat{\xi}$ nicht leer ist. Sei daher $\sigma \in B \cap \hat{\xi}$. Dann gilt $\xi \in \sigma$, da $\sigma \in \hat{\xi}$. Da außerdem $\sigma \in B$ gilt, folgt $\xi \notin \sigma$, da $\xi \notin \bigcup B$. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch.

(iii) Sei $\lambda > \delta$ eine singuläre Kardinalzahl. Angenommen λ wäre in N regulär. Dann gilt mit *(ii)*, dass $|\lambda| = \mathrm{cf}(\lambda)$. Da λ eine Kardinalzahl ist, bedeutet dies, dass $\lambda = \mathrm{cf}(\lambda)$, also dass λ regulär ist. Dies ist ein Widerspruch, da λ als singulär vorausgesetzt war.

Angenommen es gilt $(\lambda^+)^N < \lambda^+$. Da $(\lambda^+)^N$ in N eine reguläre Kardinalzahl ist, folgt mit *(iii)*

$$\mathrm{cf}((\lambda^+)^N) = |(\lambda^+)^N| = \lambda.$$

Dies ist ein Widerspruch, da die Kofinalität einer Ordinalzahl immer regulär ist.

$\square$

Korollar 28. (HOD**-Vermutung)**
Sei δ eine HOD*-superkompakte Kardinalzahl und sei $\lambda > \delta$ eine singuläre Kardinalzahl. Dann gilt*

$$(\lambda^+)^{\mathrm{HOD}} = \lambda^+.$$

Das heißt der Nachfolger von λ wird in HOD *richtig berechnet.*

3.2 Äquivalenzen zur HOD-Vermutung

Nachdem wir nun dieses erste Ziel gezeigt haben, wollen wir, unter der Annahme, dass es eine erweiterbare Kardinalzahl (siehe Definition 11) gibt, einige Aussagen finden, die zur HOD-Vermutung äquivalent sind. Dazu benötigen wir zunächst einige grundlegende Resultate.

Lemma 29. *Sei N ein inneres Modell. Weiter sei $\delta < \kappa$, $|V_\kappa| = \kappa$ und μ ein normales, feines Maß auf $\mathcal{P}_\delta(\kappa)$ so, dass*

(i) $\mu(N \cap \mathcal{P}_\delta(\kappa)) = 1$ *und*

(ii) $\mu \cap N \in N$.

Sei $j : V \to M$ die elementare Einbettung, die durch die Ultrapotenz von V mit μ erzeugt wird. Dann gilt

$$j(N \cap V_\delta) \cap V_\kappa = N \cap V_\kappa.$$

Das heißt, falls $o^N_{\mathrm{LONG}}(\delta) = \infty$ gilt, ist δ N-superkompakt.

Beweis. Da $|V_\kappa| = \kappa$ gilt, folgt $|V_\kappa^N|^N = \kappa$. Sei $\pi : \kappa \to V_\kappa \cap N$ eine Bijektion mit $\pi \in N$. Weiter sei für alle $X \subseteq \kappa$

$$N_X = \{\pi(\alpha) \mid \alpha \in X\}$$

die Teilmenge von $V_\kappa \cap N$, welche X kodiert.

Behauptung 1. Es gilt $\{X \in \mathcal{P}_\delta(\kappa) \mid N \cap V_{\mathrm{otp}(X)} \cong N_X\} \in \mu$.

Beweis. Es gilt, dass $\mu \cap N$ in N ein normales, feines Maß auf $\mathcal{P}_\delta(\kappa)$ ist und dass $\pi \in N$. Daher existiert in N eine elementare Einbettung

$$j_{\mu\cap N} : N \to \mathrm{Ult}(N; \mu \cap N).$$

Damit gilt die Behauptung genau dann, wenn

$$j_{\mu\cap N}{}''\kappa \in j_{\mu\cap N}(\{X \in \mathcal{P}_\delta(\kappa) \mid N \cap V_{\mathrm{otp}(X)} \cong N_X\})$$

gilt. Da offensichtlich $N \cap V_\kappa \cong j_{\mu\cap N}"(N \cap V_\kappa)$ gilt und

$$\begin{aligned}\{j_{\mu\cap N}(\pi)(\alpha) \mid \alpha \in j_{\mu\cap N}"\kappa\} &= \{j_{\mu\cap N}(\pi)(j_{\mu\cap N}(\alpha)) \mid \alpha < \kappa\} \\ &= \{j_{\mu\cap N}(\pi(\alpha)) \mid \alpha < \kappa\} \\ &= j_{\mu\cap N}"(N \cap V_\kappa),\end{aligned}$$

folgt, dass

$$N \cap V_\kappa \cong \{j_{\mu\cap N}(\pi)(\alpha) \mid \alpha \in j_{\mu\cap N}"\kappa\}.$$

Daher gilt

$$j_{\mu\cap N}"\kappa \in j_{\mu\cap N}(\{X \in \mathcal{P}_\delta(\kappa) \mid N \cap V_{\mathrm{otp}(X)} \cong N_X\})$$

und damit die Behauptung. □

Aus der Behauptung folgt nun, dass

$$j"\kappa \in j(\{X \in \mathcal{P}_\delta(\kappa) \mid N \cap V_{\mathrm{otp}(X)} \cong N_X\}$$

gilt. Das heißt, dass

$$j(N) \cap V_\kappa \cong \{j(\pi)(\alpha) \mid \alpha \in j"\kappa\}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\{j(\pi)(\alpha) \mid \alpha \in j"\kappa\} &= \{j(\pi)(j(\alpha)) \mid \alpha < \kappa\} \\ &= \{j(\pi(\alpha)) \mid \alpha < \kappa\} \\ &= j"(V_\kappa \cap N),\end{aligned}$$

daher folgt

$$j(N) \cap V_\kappa \cong j"(V_\kappa \cap N) \cong N \cap V_\kappa.$$

Da diese Mengen beide transitiv sind, folgt aus der Isomorphie schon Gleichheit und damit, da $j(\delta) > \kappa$ gilt, wie behauptet

$$j(N \cap V_\delta) \cap V_\kappa = j(N) \cap V_\kappa = N \cap V_\kappa.$$

□

Wir benötigen nun erneut das Konzept der Extender.

Lemma 30. *Sei N ein inneres Modell. Angenommen es gilt $o^N_{\mathrm{LONG}}(\delta) = \infty$. Sei $\gamma > \delta$ mit $|V_\gamma| = \gamma$ und $a \in V_\gamma$. Dann existiert eine elementare Einbettung*

$$j : V_{\overline{\gamma}+\omega} \to V_{\gamma+\omega}$$

mit kritischem Punkt $\overline{\delta}$ so, dass für den Extender E der Länge γ, der durch j gegeben ist, folgendes gilt:

(i) $j(\overline{\delta}) = \delta$,

(ii) *es existiert ein $\overline{a} \in V_\delta$ so, dass $j((\overline{a}, \overline{\gamma})) = (a, \gamma)$,*

(iii) $j(N \cap V_{\overline{\gamma}}) = N \cap V_\gamma$ *und*
(iv) $E \cap N \in N$.

Beweis. Sei $\kappa > \gamma$ eine Kardinalzahl mit $|V_\kappa| = \kappa$ und μ ein normales, feines Maß auf $\mathcal{P}_\delta(\kappa)$ so, dass
(1) $\mu(N \cap \mathcal{P}_\delta(\kappa)) = 1$ und
(2) $\mu \cap N \in N$.
Sei $j : V \to M$ die elementare Einbettung, die durch die Ultrapotenz von V mit μ gegeben ist. Es gilt $j \upharpoonright V_{\gamma+\omega} \in M$, denn $M^\kappa \subseteq M$. Wir können daher

$$j \upharpoonright V_{\gamma+\omega} : V_{\gamma+\omega} \to V^M_{j(\gamma)+\omega}$$

als Abbildung in M auffassen. Sei

$$j^* : M \to \overline{M}$$

die elementare Einbettung mit $j \upharpoonright V_{\gamma+\omega} = j^* \upharpoonright V_{\gamma+\omega}$, die durch eine Ultrapotenzkonstruktion in M mit $j \upharpoonright V_{\gamma+\omega}$ entsteht.
Aus Lemma 29 folgt, dass

$$j(N \cap V_\delta) \cap V_\kappa = N \cap V_\kappa$$

gilt. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} N \cap V_\gamma &= N \cap V_\kappa \cap V_\gamma \\ &= j(N \cap V_\delta) \cap V_\kappa \cap V_\gamma \\ &= j(N) \cap V_{j(\delta)} \cap V_\kappa \cap V_\gamma \\ &= j(N) \cap V_\gamma. \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Lemma 20 folgt nun, dass j^* bezeugt, dass dieses Lemma für $(j(\gamma), j(a))$ und $j(N)$ in N gilt. Außerdem gilt $E \cap N \in N$, da $\mu \cap N \in N$.

□

Für den nächsten Satz, benötigen wir die folgende Definition.

Definition 31. *Für eine unendliche, reguläre Kardinalzahl κ sei H_κ die Menge aller erblich $< \kappa$-großen Mengen. Das heißt*

$$H_\kappa = \{x \mid |\mathrm{TC}(x)| < \kappa\}.$$

Satz 32. *Sei N ein inneres Modell. Weiter gelte $o^N_{\mathrm{LONG}}(\delta) = \infty$. Sei $\gamma > \delta$ eine Kardinalzahl in N. Sei M eine transitive Menge und*

$$j : (H_{\gamma^+})^N \to M$$

eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt größer oder gleich δ. Sei $\lambda \leq j(\gamma)$ mit $\mathcal{P}(\lambda) \cap M \subseteq N$. Außerdem sei F der N-prä-Extender der Länge λ, der durch j gegeben ist. Dann gilt $F \in N$.

Beweis. Sei F der N-prä-Extender der Länge λ, der durch j gegeben ist. Das heißt

$$F = \{F_a \mid a \in [\lambda]^{<\omega}\}$$

mit

$$F_a = \{X \mid a \in j(X)\}.$$

Sei $\kappa > \gamma$ so, dass $|V_\kappa| = \kappa$ und $j \in V_\kappa$ gilt. Nach Lemma 30 mit $a = (\lambda, M, j)$ und κ existieren

$$\overline{\delta} < \overline{\gamma} \leq \overline{\lambda} < \overline{\kappa} < \delta$$

und eine elementare Einbettung

$$\pi : V_{\overline{\kappa}+1} \to V_{\kappa+1}$$

mit kritischem Punkt $\overline{\delta}$ so, dass
(1) $\pi(\overline{\delta}) = \delta$ und $\pi(\overline{\lambda}) = \lambda$,
(2) $\pi(\overline{M}) = M$ und $\pi(\overline{j}) = j$,
(3) $\pi(N \cap V_{\overline{\kappa}}) = N \cap V_\kappa$ und
(4) $\pi \restriction (N \cap V_{\overline{\kappa}+1}) \in N$
für eine transitive Menge $\overline{M} \in N$ und eine elementare Einbettung

$$\overline{j} : (H_{\overline{\gamma}^+})^N \to \overline{M}$$

mit $\overline{j} \in V_{\overline{\kappa}}$ gilt. Sei

$$\overline{F} = \{\overline{F}_s \mid s \in [\overline{\lambda}]^{<\omega}\}$$

der N-prä-Extender der Länge $\overline{\lambda}$, der durch $\overline{j}$ gegeben ist. Das heißt es gilt $\pi(\overline{F}) = F$. Wir zeigen nun, dass $\overline{F} \in N$ gilt. Dazu sei $s \in [\overline{\lambda}]^{<\omega}$ und $a \in \mathcal{P}([\overline{\gamma}]^{|s|}) \cap N$. Dann gilt per Definition $a \in \overline{F}_s$ genau dann, wenn $s \in \overline{j}(a)$ gilt. Da π elementar ist, gilt dies genau dann, wenn $\pi(s) \in \pi(\overline{j}(a)) = \pi(\overline{j})(\pi(a))$ gilt. Aus $\pi(\overline{j}) = j$, folgt nun

$$a \in \overline{F}_s \text{ genau dann, wenn } \pi(s) \in j(\pi(a)).$$

Sei E der N-Extender der Länge κ, der durch π gegeben ist. Insbesondere ist E fundiert. Dies folgt genauso wie in Behauptung 2 von Lemma 12.
Es gilt $E \restriction \gamma = \{E_s \mid s \in [\gamma]^{<\omega}\} \in (H_{\gamma^+})^N$. Wir können also

$$H = j(E \restriction \gamma) \restriction \lambda$$

definieren. Wegen $\pi(\overline{\kappa}) = \kappa$ und $\overline{\kappa} < \delta$, gilt

$$\mathrm{SPT}(E) = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \pi(\beta) \geq \kappa\} < \delta \leq \mathrm{crit}(j).$$

Da außerdem $\mathcal{P}(\lambda) \cap M \subseteq N$ gilt, folgt, dass $H \in N$ gilt und dass H ein prä-Extender der Länge λ in N ist. Es gilt

$$N \cap V_\delta = N \cap V_\kappa \cap V_\delta = \pi(N \cap V_{\overline{\kappa}}) \cap \pi(V_{\overline{\delta}}) = \pi(N \cap V_{\overline{\kappa}} \cap V_{\overline{\delta}}) \subseteq M$$

und $\mathrm{SPT}(H) \leq \mathrm{SPT}(E) < \delta$.
Angenommen $\mathrm{Ult}(N;H)$ ist nicht fundiert. Dann existiert ein $f : \omega \to \lambda$ mit $f \in N$ so, dass die Folge

$$(H_{f \restriction k} \mid k < \omega)$$

nicht fundiert ist. Da $\mathrm{SPT}(H) \leq \mathrm{SPT}(E) < \delta \leq \mathrm{crit}(j)$ und $H = j(E \restriction \gamma) \restriction \lambda$ gilt, muss ein $g : \omega \to \gamma$ mit $g \in N$ so existieren, dass

$$(E_{g \restriction k} \mid k < \omega) = (H_{f \restriction k} \mid k < \omega)$$

gilt. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass E fundiert ist.
Daher ist $\mathrm{Ult}(N;H)$ fundiert und H ist ein Extender in N. Sei

$$j_H : N \to \mathrm{Ult}(N;H)$$

die zugehörige elementare Einbettung. Sei $s \in [\overline{\lambda}]^{<\omega}$ und $a \in \mathcal{P}([\overline{\gamma}]^{|s|}) \cap N$. Dann gilt $j(a) = a$, weil $a \in V_\delta$ und $\delta \leq \mathrm{crit}(j)$ gilt. Mit der Definition von H folgt nun, dass

$$j(\pi(a)) \cap \lambda^{|s|} = j_H(j(a)) \cap \lambda^{|s|} = j_H(a) \cap \lambda^{|s|}.$$

Insgesamt gilt also für alle $s \in [\overline{\lambda}]^{<\omega}$ und alle $a \in \mathcal{P}([\overline{\gamma}]^{|s|}) \cap N$, dass

$$\begin{aligned} a \in \overline{F}_s &\Leftrightarrow \pi(s) \in j(\pi(a)) \\ &\Leftrightarrow \pi(s) \in j(\pi(a)) \cap \lambda^{|s|} \\ &\Leftrightarrow \pi(s) \in j_H(a) \cap \lambda^{|s|} \\ &\Leftrightarrow \pi(s) \in j_H(a) \\ &\Leftrightarrow a \in H_{\pi(s)}. \end{aligned}$$

Das heißt es gilt $\overline{F} \in N$, da $H \in N$ gilt. Aus $\pi(\overline{F}) = F$ und $\pi \restriction (N \cap V_{\overline{\kappa}+1}) \in N$, folgt schließlich $F \in N$. □

Aus diesem Resultat, lassen sich nun leicht die folgenden Sätze ableiten.

Satz 33. *Sei N ein inneres Modell. Weiter gelte $o^N_{\mathrm{LONG}}(\delta) = \infty$. Sei $\gamma > \delta$ eine Kardinalzahl in N. Sei $M \in N$ eine transitive Menge und*

$$j : (H_{\gamma^+})^N \to M$$

eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt $\kappa \geq \delta$. Dann gilt $j \in N$.

Beweis. Sei $\lambda = j(\gamma)$. Wegen $M \in N$ gilt auch $\mathcal{P}(\lambda) \cap M \subseteq N$. Mit Satz 32 folgt, dass $F \in N$ gilt, wobei F der N-prä-Extender der Länge λ ist, der durch j gegeben ist. Daraus folgt $j \in N$. □

Satz 34. *Sei N ein inneres Modell. Weiter gelte $o^N_{\mathrm{LONG}}(\delta) = \infty$. Sei $\gamma > \delta$ eine Kardinalzahl in N. Sei*

$$j : (H_{\gamma^+})^N \to (H_{j(\gamma)^+})^N$$

eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt $\kappa \geq \delta$. Dann gilt $j \in N$.

Beweis. Da $(H_{j(\gamma)^+})^N \in N$ eine transitive Menge ist, folgt die Behauptung aus Satz 33. □

Satz 35. *Sei N ein inneres Modell. Weiter gelte $o^N_{\mathrm{LONG}}(\delta) = \infty$. Sei $\gamma > \delta$ eine Ordinalzahl und*

$$j : N \cap V_{\gamma+1} \to N \cap V_{j(\gamma)+1}$$

eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt $\kappa \geq \delta$. Dann gilt $j \in N$.

Beweis. Für alle Ordinalzahlen $\gamma \geq \omega$ gilt

$$V_{\gamma+1} \cong H_{|V_\gamma|^+}.$$

Daher folgt

$$N \cap V_{\gamma+1} \cong N \cap H_{|V_\gamma|^+} = (H_{|V_\gamma|^+})^N$$

und

$$N \cap V_{j(\gamma)+1} \cong N \cap H_{|V_{j(\gamma)}|^+} = (H_{|V_{j(\gamma)}|^+})^N.$$

Da diese Mengen transitiv sind, folgt aus der Isomorphie schon Gleichheit und es gilt $j \in N$ nach Satz 34. □

Um die Aussagen formulieren zu können, die, unter der Annahme, dass es eine erweiterbare Kardinalzahl gibt, äquivalent zur HOD-Vermutung sind, benötigen wir die folgenden Definitionen.

Definition 36. *Eine Kardinalzahl δ heißt Woodin-Kardinalzahl, falls für jedes $A \subseteq V_\delta$ ein $\kappa < \delta$ so existiert, dass für alle $\lambda < \delta$ eine elementare Einbettung*

$$j : V \to M$$

mit folgenden Eigenschaften existiert:

(*i*) $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$,
(*ii*) $V_\lambda \subseteq M$ *und*
(*iii*) $j(A) \cap V_\lambda = A \cap V_\lambda$.

Definition 37. *Sei $\mathcal{E}$ eine Menge von Extendern. Dann bezeugt $\mathcal{E}$, dass δ eine Woodin-Kardinalzahl ist, falls für jedes $A \subseteq V_\delta$ ein $\kappa < \delta$ so existiert, dass für alle $\lambda < \delta$ ein $E \in \mathcal{E}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:*

(*i*) $\mathrm{CRT}(E) = \kappa$, $j_E(\kappa) > \lambda$,
(*ii*) $\rho(E) \geq \lambda$ *und*
(*iii*) $j_E(A) \cap V_\lambda = A \cap V_\lambda$.

Definition 38. HOD *ist ein geeignetes Extender-Modell bei δ, falls folgendes gilt:*

(i) $o^{\mathrm{HOD}}_{\mathrm{LONG}}(\delta) = \infty$

(ii) Es existiert eine Folge $(E_\alpha \mid \alpha < \delta)$ von Extendern in V_δ, die bezeugt, dass δ eine Woodin-Kardinalzahl in V ist, so, dass

$$(E_\alpha \cap \mathrm{HOD} \mid \alpha < \delta) \in \mathrm{HOD}$$

und so, dass $\rho(E_\alpha) = \mathrm{LTH}(E_\alpha)$ für alle $\alpha < \delta$ gilt.

Nun können wir das folgende zentrale Ergebnis formulieren.

Satz 39. *Sei δ eine erweiterbare Kardinalzahl. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) HOD *ist ein geeignetes Extender-Modell bei δ.*

(ii) Es existiert eine reguläre Kardinalzahl $\kappa \geq \delta$ so, dass κ in HOD *nicht messbar ist.*

(iii) Die HOD*-Vermutung gilt.*

(iv) Es existiert eine reguläre Kardinalzahl $\kappa \geq \delta$ und eine Partition

$$(S_\alpha \mid \alpha < \delta) \in \mathrm{HOD}$$

von $\{\eta < \kappa \mid \mathrm{cf}(\eta) = \omega\}$ in paarweise disjunkte stationäre Mengen.

Beweis. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Es gilt $o^{\mathrm{HOD}}_{\mathrm{LONG}}(\delta) = \infty$. Sei $\lambda > \delta$ eine singuläre Kardinalzahl. Nach Korollar 28 gilt

$$\lambda^+ = (\lambda^+)^{\mathrm{HOD}}.$$

Angenommen $\lambda^+ = (\lambda^+)^V$ wäre messbar in HOD. Dann gilt

$$(\lambda^+)^{\mathrm{HOD}} < (\lambda^+)^V,$$

was ein Widerspruch zu obiger Aussage ist.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Sei I die Klasse aller regulären Kardinalzahlen γ, sodass ein $\eta > \gamma$ existiert mit

(1.1) $V_\eta \models \mathrm{ZFC}$ und

(1.2) $V_\eta \models$ „γ ist nicht ω-stark messbar in HOD".

Dann sind die Kardinalzahlen aus I auch in V nicht ω-stark messbar in HOD, wie die folgende Behauptung zeigt.

Behauptung 1. Falls $\gamma \in I$ gilt, dann ist γ nicht ω-stark messbar in HOD.

Beweis. Sei η ein beliebiger Zeuge für $\gamma \in I$. Angenommen γ ist ω-stark messbar in HOD. Dann existiert ein $\lambda < \gamma$ so, dass folgendes gilt:

(2.1) $(2^\lambda)^{\mathrm{HOD}} < \gamma$ und

(2.2) es existiert keine Partition

$$(S_\alpha \mid \alpha < \lambda) \in \mathrm{HOD}$$

von $\{\xi < \gamma \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$ in stationäre Mengen.

Es gilt $(\mathrm{HOD})^{V_\eta} \subset \mathrm{HOD}$, also folgt $(2^\lambda)^{(\mathrm{HOD})^{V_\eta}} \leq (2^\lambda)^{\mathrm{HOD}} < \gamma$. Außerdem existiert keine Partition

$$(S_\alpha \mid \alpha < \lambda) \in (\mathrm{HOD})^{V_\eta} \subset \mathrm{HOD}$$

von $\{\xi < \gamma \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$ in stationäre Mengen. Dies steht im Widerspruch zu Bedingung (1.2). □

Sei $\kappa \geq \delta$ eine reguläre Kardinalzahl, die nicht messbar in HOD ist. Wie in Behauptung 1 in Satz 16 gezeigt wurde, ist κ dann nicht ω-stark messbar in HOD. Also ist κ nicht ω-stark messbar in $(\mathrm{HOD})^{V_\eta}$ für alle genügend großen η, da eine Partition in HOD auch schon in $(\mathrm{HOD})^{V_\eta}$ enthalten ist, falls η groß genug ist.
Sei $\alpha > \delta$. Da δ erweiterbar ist, existiert eine elementare Einbettung

$$j : V_{\alpha+1} \to V_{j(\alpha)+1}$$

mit $j(\delta) > \alpha$. Aus der Erweiterbarkeit von δ folgt außerdem, dass die stark unerreichbaren Kardinalzahlen unterhalb von δ kofinal in δ sind, da jede erweiterbare Kardinalzahl superkompakt, also insbesondere messbar, ist. Da j elementar ist, folgt nun, dass die stark unerreichbaren Kardinalzahlen unterhalb von $j(\delta)$ kofinal in $j(\delta)$ sind. Das heißt es existiert eine stark unerreichbare Kardinalzahl oberhalb von α. Da α beliebig gewählt war, existiert eine echte Klasse von stark unerreichbaren Kardinalzahlen.
Damit gilt $\kappa \in I$, da für ein genügend großes, stark unerreichbares η gilt
(3.1) $V_\eta \vDash \mathrm{ZFC}$ und
(3.2) $V_\eta \vDash$ „κ ist nicht ω-stark messbar in HOD“.
Wir wollen nun zeigen, dass I eine echte Klasse ist. Dazu zeigen wir die folgende Behauptung.

Behauptung 2. $I \cap \delta$ ist kofinal in δ.

Beweis. Sei $\gamma < \delta$ eine stark unerreichbare Kardinalzahl. Dann gilt für alle $\lambda < \gamma$, dass $(2^\lambda)^{(\mathrm{HOD})^{V_\eta}} \leq 2^\lambda < \gamma$. Da $\kappa \in I$ gilt, existiert eine Partition

$$(S_\alpha \mid \alpha < \lambda) \in (\mathrm{HOD})^{V_\eta}$$

von $\{\xi < \kappa \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$ in stationäre Mengen. Dann ist

$$(S'_\alpha \mid \alpha < \lambda') = (S_\alpha \cap \gamma \mid \alpha < \lambda) \in (\mathrm{HOD})^{V_\eta}$$

für ein $\lambda' \leq \lambda$ eine Partition von $\{\xi < \gamma \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$ in stationäre Mengen. Also gilt $\gamma \in I$.
Da die Menge aller stark unerreichbaren Kardinalzahlen unterhalb von δ kofinal in δ ist, ist auch $I \cap \delta$ kofinal in δ. □

Sei $\alpha > \delta$ groß genug, sodass

$$V_{\alpha+1} \vDash \text{„}\forall \gamma \in I \cap \delta\ \exists \eta : V_\eta \vDash \mathrm{ZFC} \wedge \gamma \text{ ist nicht } \omega\text{-stark messbar in } (\mathrm{HOD})^{V_\eta}\text{”}.$$

Da δ erweiterbar ist, existiert eine elementare Abbildung

$$j : V_{\alpha+1} \to V_{j(\alpha)+1}$$

mit kritischem Punkt δ und $j(\delta) > \alpha$. Damit folgt

$V_{j(\alpha)+1} \models$ „$\forall\gamma \in j(I \cap \delta)\ \exists\eta : V_\eta \models \mathrm{ZFC} \wedge \gamma$ ist nicht ω-stark messbar in $(\mathrm{HOD})^{V_\eta}$".

Aus der Elementarität von j folgt außerdem, dass $j(I \cap \delta)$ kofinal in $j(\delta)$ ist. Es existiert also ein $\gamma > \alpha$ so, dass ein η existiert mit

(4.1) $V_\eta \models \mathrm{ZFC}$ und

(4.2) $V_\eta \models$ „γ ist nicht ω-stark messbar in HOD“.

Das heißt es gilt $\gamma \in I$. Da $\alpha < \gamma$ beliebig gewählt war, folgt, dass I eine echte Klasse ist. Damit gilt die HOD-Vermutung.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* Da die HOD-Vermutung gilt, existiert eine echte Klasse von überabzählbaren, regulären Kardinalzahlen κ, die nicht ω-stark messbar in HOD sind. Wähle κ aus dieser Klasse so, dass κ eine starke Limeskardinalzahl ist.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)* δ ist als erweiterbare Kardinalzahl vorausgesetzt. Nach Lemma 12 ist δ daher auch HOD-superkompakt. Wir zeigen zunächst, dass ein solches δ nicht die kleinste HOD-superkompakte Kardinalzahl sein kann.

Behauptung 3. Es existiert ein normaler Ultrafilter U über δ so, dass

$$\{\alpha < \delta \mid \alpha \text{ ist HOD-superkompakt}\} \in U.$$

Insbesondere ist δ nicht die kleinste HOD-superkompakte Kardinalzahl.

Beweis. Da δ erweiterbar ist, existiert eine elementare Abbildung

$$j : V_{\delta+1} \to V_{j(\delta)+1}$$

mit kritischem Punkt δ. Sei U der normale Ultrafilter, der durch j erzeugt wird. Das heißt es gilt

$$X \in U \Leftrightarrow j\,\text{"}\delta \in j(X).$$

$j(\delta)$ ist eine unerreichbare Kardinalzahl. Außerdem gilt, da δ erweiterbar ist,

$$(\mathrm{HOD})^{V_\delta} = \mathrm{HOD} \cap V_\delta.$$

Es gilt daher

$$\begin{aligned} V_{j(\delta)+1} \models\ &\text{„}\delta \text{ ist } \gamma\text{-superkompakt (bezeugt durch } k) \\ &\wedge k(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_\gamma = \mathrm{HOD} \cap V_\gamma \text{ für } \delta \leq \gamma < j(\delta)\text{"}. \end{aligned}$$

Das heißt

$$\begin{aligned} A := \{\alpha < \delta \mid\ &\alpha \text{ ist } \gamma\text{-superkompakt (bezeugt durch } k) \\ &\wedge k(\mathrm{HOD} \cap V_\alpha) \cap V_\gamma = \mathrm{HOD} \cap V_\gamma \text{ für } \alpha \leq \gamma < \delta\} \in U. \end{aligned}$$

Da δ HOD-superkompakt ist, sind auch alle $\alpha \in A$ HOD-superkompakt. Also ist

$$\{\alpha < \delta \mid \alpha \text{ ist HOD-superkompakt}\} \in U.$$

Insbesondere ist diese Menge nicht leer und es existiert eine HOD-superkompakte Kardinalzahl $\alpha < \delta$. □

Wir wollen zeigen, dass HOD ein geeignetes Extender-Modell bei δ ist. Dafür müssen wir zunächst zeigen, dass $o^{\mathrm{HOD}}_{\mathrm{LONG}}(\delta) = \infty$ gilt.

Behauptung 4. Wenn $\delta_0 \leq \delta$ HOD-superkompakt ist, dann gilt $o^{\mathrm{HOD}}_{\mathrm{LONG}}(\delta_0) = \infty$.

Beweis. Sei $\kappa \geq \delta \geq \delta_0$ eine reguläre Kardinalzahl, sodass eine Folge

$$(S_\alpha \mid \alpha < \delta) \in \mathrm{HOD}$$

von paarweise disjunkten stationären Teilmengen von $\{\eta < \kappa \mid \mathrm{cf}(\eta) = \omega\}$ existiert. Ein solches κ existiert nach Bedingung (iv).
Wir wollen $\theta > \kappa$ so wählen, dass die folgende Eigenschaft gilt:

$$\mathrm{HOD} \cap \mathcal{P}(\kappa) = (\mathrm{HOD})^{V_\theta} \cap \mathcal{P}(\kappa).$$

Dazu wählen wir $\theta > \kappa$ genügend groß mit der Eigenschaft

$$\mathrm{HOD} \cap V_\theta = (\mathrm{HOD})^{V_\theta}.$$

Da δ erweiterbar ist, existiert eine elementare Einbettung

$$j : V_{\theta+1} \to V_{j(\theta)+1}$$

mit kritischem Punkt δ so, dass $j(\delta) > \kappa$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} V_{\theta+1} \models \text{„}&\forall\lambda < \delta\ \exists\kappa > \lambda \text{ regulär so, dass eine Partition} \\ &(S_\alpha \mid \alpha < \lambda) \in \mathrm{HOD} \text{ von } \{\eta < \kappa \mid \mathrm{cf}(\eta) = \omega\} \text{ in} \\ &\text{paarweise disjunkte stationäre Teilmengen existiert”.} \end{aligned}$$

Da j elementar ist folgt diese Aussage in $V_{j(\theta)+1}$.

$$\begin{aligned} V_{j(\theta)+1} \models \text{„}&\forall\lambda < j(\delta)\ \exists\gamma > \lambda \text{ regulär so, dass eine Partition} \\ &(T_\alpha \mid \alpha < \lambda) \in \mathrm{HOD} \text{ von } \{\eta < \gamma \mid \mathrm{cf}(\eta) = \omega\} \text{ in} \\ &\text{paarweise disjunkte stationäre Teilmengen existiert”.} \end{aligned}$$

Da $(\mathrm{HOD})^{V_{j(\theta)+1}} \subseteq \mathrm{HOD}$ gilt, gibt es in V für alle $\lambda < j(\delta)$ eine reguläre Kardinalzahl $\gamma > \lambda$ und eine Partition

$$(T_\alpha \mid \alpha < \lambda) \in \mathrm{HOD}$$

von $\{\eta < \gamma \mid \mathrm{cf}(\eta) = \omega\}$ in paarweise disjunkte stationäre Mengen. Da j so gewählt werden kann, dass $j(\delta)$ beliebig groß ist, folgt mit Satz 21, dass $o^{\mathrm{HOD}}_{\mathrm{LONG}}(\delta_0) = \infty$ gilt. □

Es bleibt zu zeigen, dass Bedingung (ii) aus Definiton 38 für δ erfüllt ist. Dazu sei δ_0 die kleinste HOD-superkompakte Kardinalzahl. Das heißt nach Behauptung 3 gilt $\delta_0 < \delta$.
Sei $A \subset V_\delta$ mit $A \in \mathrm{HOD}$ und sei η genügend groß mit

$$(\mathrm{HOD})^{V_\eta} = \mathrm{HOD} \cap V_\eta.$$

Da δ erweiterbar ist, existiert ein η' und eine elementare Abbildung

$$k : V_\eta \to V_{\eta'}$$

mit kritischem Punkt δ und $k(\delta) > \eta$. Sei

$$j := k \restriction V_{\delta+2}.$$

Dann gilt $j \in V_{\eta'}$. Weiter gilt $k(A) \cap \delta = A$, da δ der kritische Punkt von k ist. Durch das Anwenden von k, beziehungsweise j, folgt, dass

$$j(k(A) \cap \delta) = k(A)$$

gilt.

Behauptung 5. Es gilt $\mathrm{HOD} \cap V_{\delta+1} = (\mathrm{HOD})^{V_{\eta'}} \cap V_{\delta+1}$.

Beweis. Es gilt

$$k(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_{\delta+1} = (\mathrm{HOD})^{V_{\eta'}} \cap V_{k(\delta)} \cap V_{\delta+1}.$$

Es reicht also $k(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_{\delta+1} = \mathrm{HOD} \cap V_{\delta+1}$ zu zeigen. Wir zeigen die folgende, etwas stärkere, Aussage

$$k(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_\eta = \mathrm{HOD} \cap V_\eta.$$

Da δ erweiterbar ist, gilt $\mathrm{HOD} \cap V_\delta = (\mathrm{HOD})^{V_\delta}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} k(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_\eta &= k((\mathrm{HOD})^{V_\delta}) \cap V_\eta \\ &= (\mathrm{HOD})^{V_{k(\delta)}} \cap V_\eta \\ &\subseteq \mathrm{HOD} \cap V_{k(\delta)} \cap V_\eta \\ &= \mathrm{HOD} \cap V_\eta. \end{aligned}$$

Da η so gewählt war, dass $(\mathrm{HOD})^{V_\eta} = \mathrm{HOD} \cap V_\eta$ gilt, folgt die andere Inklusion wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{HOD} \cap V_\eta \cap V_\eta &= (\mathrm{HOD})^{V_\eta} \cap V_\eta \\ &\subseteq (\mathrm{HOD})^{V_{k(\delta)}} \cap V_\eta \\ &= k((\mathrm{HOD})^{V_\delta}) \cap V_\eta \\ &= k(\mathrm{HOD} \cap V_\delta) \cap V_\eta. \end{aligned}$$

□

Wendet man k auf die Aussage in Behauptung 5 an, so erhält man

$$(\mathrm{HOD})^{V_{\eta'}} \cap V_{k(\delta)+1} = j((\mathrm{HOD})^{V_{\eta'}} \cap V_{\delta+1}).$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} V_{\eta'} \models \text{„}\exists\overline{\delta} < k(\delta)\ \exists j : V_{\overline{\delta}+2} \to V_{k(\delta)+2} \text{ mit } \operatorname{crit}(j) = \overline{\delta} \\ \wedge \mathrm{HOD} \cap V_{k(\delta)+1} = j(\mathrm{HOD} \cap V_{\overline{\delta}+1}) \\ \wedge j(k(A) \cap \overline{\delta}) = k(A)\text{"}. \end{aligned}$$

Es folgt aus der Elementarität von j, dass

$$\begin{aligned} V_{\eta} \models \text{„}\exists\overline{\delta} < \delta\ \exists j : V_{\overline{\delta}+2} \to V_{\delta+2} \text{ mit } \operatorname{crit}(j) = \overline{\delta} \\ \wedge \mathrm{HOD} \cap V_{\delta+1} = j(\mathrm{HOD} \cap V_{\overline{\delta}+1}) \\ \wedge j(A \cap \overline{\delta}) = A\text{"}. \end{aligned}$$

Für dieses $\overline{\delta}$ und das dazugehörige j gilt nun in V, dass
(1) $j(A \cap \overline{\delta}) = A$,
(2) $j(\mathrm{HOD} \cap V_{\overline{\delta}+1}) = \mathrm{HOD} \cap V_{\delta+1}$ und
(3) $j \restriction (\mathrm{HOD} \cap V_{\overline{\delta}+1}) \in \mathrm{HOD}$.
Bedingung (1) folgt direkt aus der Aussage $V_\eta \models$ „$j(A \cap \overline{\delta}) = A$". Bedingung (2) ergibt sich aus der entsprechenden Aussage in V_η mit der Rechnung

$$\begin{aligned} j(\mathrm{HOD} \cap V_{\overline{\delta}+1}) &= j(\mathrm{HOD} \cap V_\eta \cap V_{\overline{\delta}+1}) \\ &= j((\mathrm{HOD})^{V_\eta} \cap V_{\overline{\delta}+1}) \\ &= (\mathrm{HOD})^{V_\eta} \cap V_{\delta+1} \\ &= \mathrm{HOD} \cap V_\eta \cap V_{\delta+1} \\ &= \mathrm{HOD} \cap V_{\delta+1}, \end{aligned}$$

da η so gewählt war, dass $(\mathrm{HOD})^{V_\eta} = \mathrm{HOD} \cap V_\eta$ gilt. Nach Satz 35 gilt für alle $\gamma > \delta_0$, da $o^{\mathrm{HOD}}_{\mathrm{LONG}}(\delta_0) = \infty$ gilt, dass, falls

$$j_0 : \mathrm{HOD} \cap V_{\gamma+1} \to \mathrm{HOD} \cap V_{j(\gamma)+1}$$

eine elementare Einbettung mit $\operatorname{crit}(j_0) \geq \delta_0$ ist, dann $j_0 \in \mathrm{HOD}$. Damit folgt Bedingung (3).
Sei E der zu j gehörige Extender der Länge $\delta + 2$. Das heißt für $s \in [\delta + 2]^{<\omega}$ sei

$$E_s = \{A \subseteq [\overline{\delta}]^{|s|} \mid s \in j(A)\}$$

und

$$E = \{E_s \mid s \in [\delta + 2]^{<\omega}\}.$$

Dann gilt $\rho(E) = \delta + 2 = \mathrm{LTH}(E)$, da $j : V_{\bar{\delta}+2} \to V_{\delta+2}$. Daher folgt aus obiger Argumentation, dass eine Folge

$$(E_\alpha \mid \alpha < \delta)$$

von Extendern in V_δ, die bezeugt, dass δ in V eine Woodin Kardinalzahl ist, so existiert, dass

$$(E_\alpha \cap \mathrm{HOD} \mid \alpha < \delta) \in \mathrm{HOD}$$

gilt und $\rho(E_\alpha) = \mathrm{LTH}(E_\alpha)$ für alle $\alpha < \delta$ erfüllt ist. Damit ist HOD ein geeignetes Extender-Modell bei δ.

$\square$

Literaturverzeichnis

[Jec03] T.J. Jech. *Set Theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003.

[Kan09] A. Kanamori. *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2009.

[Kun80] K. Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Company, 1980.

[Woo10] W. H. Woodin. Suitable Extender Models I. *Journal of Mathematical Logic*, 10:101–339, 2010.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Sandra Uhlenbrock, dass ich diese Masterarbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.