Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Existenz und Anzahl universell sofischer Gruppen

Diplomarbeit

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Logik und Grundlagenforschung

Betreuung:
Prof. Dr. Dr. Katrin Tent

Eingereicht von:
Nora Christina Loges

Münster, Juli 2012

1 Einleitung

Die Klasse der sofischen Gruppen verbindet mehrere Gebiete der Mathematik, z.B. geometrische Gruppentheorie, dynamische Systeme und Operatoralgebren. Gromov bewies für sofische Gruppen Gottschalks Surjunktivitätsvermutung, durch diese Vermutung wurden die Gruppen erst motiviert. Dies stammt aus dem Bereich der dynamischen Systeme. Elek und Szabó bewiesen Kaplanskys Endlichkeitsvermutung für sofische Gruppen. Da noch keine Gruppen bekannt sind, die nicht sofisch sind, sind diese Ergebnisse um so faszinierender. Es gibt drei Wege, sofische Gruppen zu definieren, über lokale Approximation ihrer Cayley Graphen durch endliche gelabelte Graphen, über Approximation durch endliche symmetrische Gruppen zusammen mit der Hammingmetrik und als Untergruppen metrischer Ultraprodukte von Familien symmetrischer Gruppen. Diese Ultraprodukte heißen auch universell sofische Gruppen, da sie wieder sofische Gruppen sind. Von dieser Konstruktion werden wir die Existenz und die Anzahl solcher Gruppen zeigen.

Wir werden in der gesamten Arbeit die Kontinuum Hypothese kanonisch mit CH abkürzen. Die Gliederung der Arbeit sieht wie folgt aus:
Zu Beginn geben wir einen Überblick über einige Eigenschaften von Filtern und Ultrafiltern, da auf dieser Konstruktionen die ganze Diplomarbeit aufbaut. Wir werden nicht nur Ultraprodukte darüber definieren, aus denen später die universell sofischen Gruppen konstruiert werden, sondern Ultrafilter werden wir ebenfalls benötigen, um beweisen zu können, dass $2^{2^{\aleph_0}}$-viele nicht-isomorphe universell sofische Gruppen existieren, wenn CH nicht gilt. Weiter werden wir grundlegende Konzepte der Mengenlehre einführen, wie die der Clubs und stationären Mengen und Sätze aus diesem Bereich der Logik beweisen, die wir später in unseren Beweisen verwenden werden.
In dem Kapitel 2.2.2 werden wir Überdeckungseigenschaften von alternieréden Gruppen behandeln und den Satz 2.42 beweisen. Dieser besagt, dass eine nicht spezielle Konjugationsklasse in der vierten Potenz von $\mathrm{Alt}(n)$ schon die ganze Gruppe überdeckt. Der Satz ist ein nützliches Hilfsmittel, das wir später sowohl in dem Kapitel, in dem es um die Existenz universell sofischer Gruppen geht, als auch in dem Kapitel, in dem es um die Anzahl universell sofischer Gruppen geht, verwenden, um die Lemmata 3.15 und 4.32 zu beweisen.
In Kapitel 2.4 werden wir eine kurze Einführung in die Modelltheorie metrischer Strukturen geben, die auch stetige Logik der ersten Stufe (CFO) genannt wird. Wir stellen hier vor allem die Unterschiede zur "normalen Logik" erster Stufe (FOL) heraus. Die CFO kann als Erweiterung der FOL betrachtet werden, in dem die zugrunde liegende Metrik als die diskrete Metrik gesetzt wird. Somit ist es nicht weiter verwunderlich, dass die grundlegen-

den Resultate aus FOL in modifizierter Form für CFO gelten. Die für uns relevanten Sätze werden wir am Ende des Kapitels angeben, teilweise mit Beweis.
Wir beginnen den Mittelteil dieser Arbeit, mit dem Kapitel 2.4.6 über die Hammingmetrik. Diese bi-invariante Metrik wollen wir später verwenden, um die universell sofischen Gruppen zu konstruieren.
Auf die sofischen Gruppen werden wir danach nur kurz eingehen und ein paar Beispiele von Gruppen geben, die sofisch sind und bemerken, unter welchen Konstruktionen die Klasse abgeschlossen ist.
Die für uns interessante Aussage über sofische Gruppen ist, dass eine Gruppe genau dann sofisch ist, wenn sie sich in ein Ultraprodukt über symmetrischen Gruppen einbetten lässt.
Sei $\mathcal{U}$ ein nicht Hauptultrafilter auf ω und $G_{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathrm{Sym}(n)$ das metrische Ultraprodukt der endlichen symmetrischen Gruppen. Wir werden sehen, dass $G_{\mathcal{U}}$ einen eindeutigen maximalen Normalteiler $\mathcal{N}$ besitzt. Setze $S_{\mathcal{U}} = G_{\mathcal{U}}/\mathcal{N}$. Hierbei werden wir zeigen, dass die Konstruktion nicht von der Wahl des Ultrafilters abhängt, d.h. wenn wir eine sofische Gruppe schon in ein metrisches Ultraprodukt über einer Familie von $\mathrm{Sym}(n)$ einbetten können, dass wir die Gruppe dann schon in jedes metrische Ultraprodukt über symmetrischen Gruppen $\mathrm{Sym}(n)$ einbetten können. Aus diesem Grund heißt $S_{\mathcal{U}}$ auch universell sofische Gruppe.
Im letzten Teil der Arbeit zählen wir die Anzahl der universell sofischen Gruppen, hierbei müssen wir die zwei Fälle unterscheiden, ob CH gilt oder nicht.
Für den Fall, dass CH gilt, können wir die Anzahl der universell sofischen Gruppen gegenüber $2^{\aleph_0}$ abschätzen. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass die metrischen Ultraprodukte $\prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Sym}(n)$ alle saturiert sind und somit durch ihre Theorie der Logik der ersten Stufe eindeutig bestimmt sind. Daher existieren bis auf Isomorphie höchstens $2^{\aleph_0}$ metrische Ultraprodukte und deshalb gibt es höchstens $2^{\aleph_0}$ universell sofische Gruppen $S_{\mathcal{U}}$. Es ist derzeit noch nicht bewiesen, ob überhaupt 2 nicht-isomorphe universell sofische Gruppen existieren, wenn CH gilt.
Das Problem, die Anzahl der universell sofischen Gruppen zu bestimmen, wenn CH nicht gilt, erweist sich – wahrscheinlich etwas überraschend – als einfacher zu behandeln. In diesem Fall können wir die genaue Anzahl universell sofischer Gruppen bestimmen, nämlich $2^{2^{\aleph_0}}$. Den Beweis teilen wir in mehrere Aussagen auf. Wir beginnen mit fundamentalen Eigenschaften von Expandergraphen. Mit deren Hilfe sind wir in der Lage, zu zeigen, dass gewisse metrische Ultraprodukte $\prod_{\mathcal{D}} G_n$ über endlichen Gruppen als Zentralisatoren endlich erzeugter -Untergruppen von passend gewählten universell sofischen Gruppen dargestellt werden können. Konkret nehmen wir eine end-

lich erzeugte Untergruppe $\Gamma \leq S_{\mathcal{U}}$ und zeigen, dass der Zentralisator $C_{S_{\mathcal{U}}}(\Gamma)$ isomorph zu dem Ultraprodukt $\prod_{\mathcal{D}} \operatorname{Alt}(n)$ ist. Den Ultrafilter $\mathcal{U}$ konstruieren wir hierbei in Abhängigkeit von dem Ultrafilter $\mathcal{D}$. Damit haben wir unseren Fall auf den der alternierenden Gruppen reduziert.
Wir zeigen deshalb in Kapitel 4.2.2, wenn CH nicht gilt, dass dann $2^{2^{\aleph_0}}$-viele nicht-isomorphe Ultraprodukte über $\operatorname{Alt}(n)$ existieren. Dafür benötigen wir die Eigenschaft, dass die echten Normalteiler von $\prod_{\mathcal{D}} \operatorname{Alt}(n)$ linear geordnet sind. Wir werden sehen, dass eine inklusionserhaltende Abbildung zwischen den Normalteilern und der linearen Ordnung $L_{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}}\{1, \ldots, n\}/ \equiv_{\mathcal{U}}$ existiert. Die betrachtete lineare Ordnung $L_{\mathcal{U}}$ ist ein nichtleeres Anfangsstück des Nichtstandardmodells $\mathcal{M} = \prod_{\mathcal{U}} \omega$. Wir werden zeigen, dass es hiervon $2^{2^{\aleph_0}}$-viele verschiedene gibt, in dem wir "extrem" nicht-lineare Ordnungen konstruieren. Dies geschieht in Kapitel 4.2.4. Da wir vorher gesehen haben, dass die Ultraprodukte isomorph zu den linearen Ordnungen sind, haben wir damit gezeigt, dass es $2^{2^{\aleph_0}}$-viele nicht isomorphe Gruppen gibt, wenn CH nicht gilt.

Danksagung

Zuerst danke ich Frau Prof. Dr. Dr. Tent für die hilfreiche und engagierte Betreuung und das interessante Thema. Bedanken möchte ich mich auch bei vielen Kommilitonen für fachliche Gespräche oder auch praktische Hilfe. Namentlich möchte ich hier Dimitri Wegner und Christoph Winges erwähnen, die freundlicherweise korrekturgelesen haben. Vielen Dank dafür. Dimitri danke ich zusätzlich für seine Geduld und Ausdauer, mir alle meine LaTeX-Fragen zu beantworten. Auch Esther Engberding gilt ein besonderer Dank für ihre Aufmunterungen in den sehr unterhaltsamen, meistens mathefreien Pausen. Alle hier nicht Erwähnten wissen, dass auch sie gemeint sind. Schließlich danke ich noch meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, die mich in jeder Situation unterstützt haben und mir so den nötigen Rückhalt gaben.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, *Nora Christina Loges*, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht.

Münster, 23. Juli 2012

Vorname Nachname

Inhaltsverzeichnis

2 Grundlagen

2.1 Filter und Ultrafilter

In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über die Eigenschaften von Filtern und Ultrafiltern, die in der Diplomarbeit ein zentrales Konzept sind, da wir sie unter anderem bei der Definition von universell sofischen Gruppen verwenden. Darüber hinaus sind sie ein notwendiges Hilfsmittel, um nicht-isomorphe lineare Ordnungen zu konstruieren. Diese werden wir benötigen, um die Aussage zu zeigen, dass $2^{2^{\aleph_0}}$-viele nicht-isomorphe universell sofische Gruppen existieren, wenn CH nicht gilt. Die Definitionen, Sätze und Beweise in diesem Kapitel stammen aus dem Buch von Chang und Keisler [CK90], soweit es nicht anders angegeben ist.

Definition 2.1. Sei I eine nicht-leere Menge.

(i) D ist ein *Filter* auf I, wenn D eine nicht-leere Familie von Teilmengen von I ist, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

  (a) Aus $A, B \in D$ folgt $A \cap B \in D$.

  (b) Wenn $A \in D$ und $A \subseteq B \subseteq I$, dann ist $B \in D$ (diese Bedingung impliziert schon, dass $I \in D$ ist).

(ii) Der Filter D ist *trivial*, wenn $\emptyset \in D$. Wir betrachten nur nicht-triviale Filter, auch wenn nicht immer darauf hingewiesen wird.

(iii) Der Filter D auf I ist ein *Hauptultrafilter*, wenn für ein $A \subseteq I$ gilt $D = \{B \subseteq I \mid A \subseteq B\}$.

(iv) Sei E eine Teilmenge von $\mathcal{P}(I)$, der Potenzmenge von I. Der *durch E erzeugte Filter* ist der Schnitt D aller Filter auf I, die E enthalten:

$$D = \bigcap \{F \mid E \subseteq F \text{ und } F \text{ ist ein Filter auf } I\}.$$

Wir schreiben auch $[E]$ für das Erzeugnis von E.

(v) Der Filter D ist *λ-vollständig*, wenn eine Familie von Mengen $(A_i \mid i < \alpha < \lambda)$ in D impliziert, dass $\bigcap_{i<\alpha} A_i \in D$. (Nach Definition gilt somit, dass jeder Filter ω-vollständig ist.)

(vi) Ein Filter D ist *abzählbar unvollständig*, wenn er nicht ω^+-vollständig ist, also nicht abgeschlossen unter abzählbar unendlichen Schnitten ist. Jeder Ultrafilter, der kein Hauptultrafilter ist auf einer abzählbaren Menge, ist abzählbar unvollständig.

(vii) Der Filter D hat genau dann die *endliche Durchschnittseigenschaft*, wenn der Schnitt von jeder endlichen Anzahl von Elementen von D nicht leer ist.

(viii) Ein Filter $\mathcal{D}$ ist ein *Ultrafilter* auf I, wenn $\mathcal{D}$ auf I nicht trivial ist und für alle $A \subseteq I$ entweder $A \in \mathcal{D}$ oder $I \setminus A \in \mathcal{D}$ gilt.

(ix) Wenn $\mathcal{D}$ ein nicht Hauptultrafilter auf ω ist und $(r_n)_{n\in\omega}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, dann existiert eine eindeutige reelle Zahl l, so dass $\{n \in \omega \mid |r_n - l| < \varepsilon\} \in \mathcal{D}$ für alle $\varepsilon > 0$. Wir bezeichnen l als *Ultralimes* und wir schreiben $l = \lim_{\mathcal{D}} r_n$.

Beispiel. (i) $D = \{I\}$ ist ein Filter.

(ii) $D = \mathcal{P}(I)$ ist der *triviale Filter*.

(iii) $D = \{A \subseteq I \mid I \setminus A \text{ ist endlich}\}$ ist der *Fréchet-Filter* auf I.

Satz 2.2. *Sei E eine Teilmenge von $\mathcal{P}(I)$ und $D = [E]$. Dann gilt:*

1. *D ist ein Filter auf I.*

2. *D ist die Menge aller $A \in \mathcal{P}(I)$, so dass entweder $A = I$ ist oder für Mengen $B_1, \dots, B_n \in E$, $n \in \omega$ gilt, dass $B_1 \cap \dots \cap B_n \subseteq A$.*

3. *Der Filter D ist genau dann nicht trivial, wenn E die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt.*

Beweis. 1. folgt nach Definition.

Um 2. zu zeigen sei D' die Menge aller $X \in \mathcal{P}(I)$, so dass entweder gilt $X = I$ oder Mengen $Y_1, \dots, Y_n \in E$ existieren, so dass $Y_1 \cap \dots \cap Y_n \subseteq X$. Wir zeigen $D = D'$. Seien $X, X' \in D'$ und seien $Y_i, Y'_j \in E$ für $i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$ so gewählt, dass

$$Y_1 \cap \dots \cap Y_n \subseteq X,\ Y'_1 \cap \dots \cap Y'_m \subseteq X'.$$

Wenn $X \subseteq Z \subseteq I$, dann gilt

$$Y_1 \cap \dots \cap Y_n \subseteq Z,$$

so dass $Z \in D'$. Weiter ist

$$Y_1 \cap \dots \cap Y_n \cap Y'_1 \cap \dots \cap Y'_m \subseteq X \cap X',$$

also ist $X \cap X' \in D'$ und D' ist ein Filter auf I. Da $E \subseteq D'$, folgt $D \subseteq D'$. Betrachte nun einen beliebigen Filter F auf I, der E enthält. Dann ist $I \in F$. Für alle $B_1, \dots, B_n \in E$ gilt $B_1 \cap \dots \cap B_n \in F$. Damit gehört jede Obermenge $A \in \mathcal{P}(I)$, die $B_1 \cap \dots \cap B_n$ enthält, zu F. Also ist $D' \subseteq F$. Somit gilt auch $D' \subseteq D$, also insgesamt $D = D'$.

3. folgt aus 2. $\square$

Satz 2.3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{D}$ ist ein Ultrafilter auf I.*

2. *$\mathcal{D}$ ist ein maximaler echter Filter auf I. Das heißt, für einen Filter F mit $\mathcal{D} \subseteq F \subseteq \mathcal{P}(I)$ gilt entweder $\mathcal{D} = F$ oder $F = \mathcal{P}(I)$.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. Gelte 1. Dann ist $\emptyset \notin \mathcal{D}$, da $I \in \mathcal{D}$ und $\emptyset = I \setminus I$. Folglich ist $\mathcal{D}$ ein echter Filter. Sei F ein beliebiger Filter auf I, der $\mathcal{D}$ enthält. Wenn $X \in F$ und $X \notin \mathcal{D}$ ist, dann gilt $I \setminus X \in \mathcal{D}$, somit ist $I \setminus X \in F$ und $\emptyset = X \cap (I \setminus X) \in F$. Damit ist $F = \mathcal{P}(I)$. Sonst ist $\emptyset \notin F$ und $F \subseteq \mathcal{D}$ und somit ist $F = \mathcal{D}$.
2. $\Rightarrow$ 1. Gelte 2. Betrachte eine beliebige Menge $X \in \mathcal{P}(I)$. Dann kann nicht $X \in \mathcal{D}$ und $I \setminus X \in \mathcal{D}$ gelten, da sonst $\emptyset \in \mathcal{D}$ wäre und somit $\mathcal{D}$ nicht echt wäre. Es genügt nun zu zeigen, dass wenn $I \setminus X \notin \mathcal{D}$, dann ist $X \in \mathcal{D}$. Sei $I \setminus X \notin \mathcal{D}$. Setze $E = \mathcal{D} \cup \{X\}$ und $F = [E]$. Betrachte $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ und setze $Z = Y_1 \cap \cdots \cap Y_n$. Da $\mathcal{D}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist, bekommen wir entweder $Z \in \mathcal{D}$ oder $Z = Y \cap X$ für ein $Y \in \mathcal{D}$. Im ersten Fall ist $Z \neq \emptyset$, da $\emptyset \notin \mathcal{D}$. Im zweiten Fall gilt ebenfalls $Z \neq \emptyset$, denn sonst wäre $Y \cap X = \emptyset$ daher $Y \subseteq I \setminus X$, folglich wäre $I \setminus X \in \mathcal{D}$. Somit ist in beiden Fällen $Z \neq \emptyset$. Nach Satz 2.2 ist $\emptyset \notin F$. Das bedeutet, dass F ein echter Filter ist, der $\mathcal{D}$ enthält, also ist nach Voraussetzung $F = \mathcal{D}$. Somit gilt $E \subseteq \mathcal{D}$ und $X \in \mathcal{D}$. $\square$

Satz 2.4. *Wenn $E \subseteq \mathcal{P}(I)$ und E die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, dann existiert ein Ultrafilter $\mathcal{D}$ auf I, so dass $E \subseteq \mathcal{D}$.*

Beweis. Sei $F = [E]$. Der Filter F enthält nicht die leere Menge und ist somit echt. Wenn C eine nicht-leere aufsteigende Kette echter Filter auf I ist, dann ist $\bigcup C$ ein echter Filter auf I. Des Weiteren gilt, wenn $\mathcal{D} \in C$ ist und E enthält, dann enthält $\bigcup C$ ebenfalls E. Mit dem Lemma von Zorn folgt, dass die Menge $\mathcal{E}$, aller echten Filter auf I, die E enthalten, ein maximales Element besitzt. Dieses sei $\mathcal{D}$. Dann ist $E \subseteq \mathcal{D}$. Der Filter $\mathcal{D}$ ist maximal auf I. Sei $\mathcal{D}'$ ein echter Filter, der $\mathcal{D}$ enthält, dann ist $E \subseteq \mathcal{D}'$ und somit gehört $\mathcal{D}'$ zu $\mathcal{E}$, also ist $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. Damit ist $\mathcal{D}$ nach Satz 2.3 ein Ultrafilter. $\square$

Korollar 2.5. *Jeder echte Filter auf I kann zu einem Ultrafilter auf I erweitert werden.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 2.4, da jeder nicht-triviale Filter die endliche Durchschnittseigenschaft erfüllt. $\square$

Bemerkung 2.6. Nicht Hauptultrafilter enthalten keine endliche Mengen. In allen nicht Hauptultrafiltern auf abzählbar unendlichen Mengen ist somit der Fréchet-Filter enthalten.

Satz 2.7. *Wenn I eine unendliche Menge der Kardinalität α ist, dann existieren $2^{2^{\aleph_0}}$-viele nicht Hauptultrafilter auf I.*

Beweis. Für den Beweis siehe [BS69] Chapter 6, Theorem 1.5. $\square$

2.2 Grundlagen aus der Mengenlehre

In diesem Kapitel führen wir die Begriffe und Sätze aus der Mengenlehre ein, die wir im Laufe der Arbeit benutzen. Hierbei beziehen wir uns auf das Buch von Jech [Jec03] und das Vorlesungsskript von Ziegler [Zie92].

2.2.1 Clubs und stationäre Mengen

Definition 2.8. Sei $\alpha > 0$ eine Limesordinalzahl. Wir sagen, dass eine aufsteigenden β-Folge $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \beta \rangle$ für eine Limesordinalzahl β *kofinal* in α ist, wenn $\lim_{\xi \to \beta} \alpha_\xi = \alpha$. Analog liegt $A \subseteq \alpha$ *kofinal* in α, wenn $\sup A = \alpha$. Wenn α eine unendliche Limesordinalzahl ist, dann ist die *Kofinalität* von α

$$\begin{aligned}\mathrm{cf}(\alpha) = {} & \text{die kleinste Limesordinalzahl } \beta \text{, so dass eine aufsteigende} \\ & \beta\text{-Folge } \langle \alpha_\xi \mid \xi < \beta \rangle \text{ existiert mit } \lim_{\xi \to \beta} \alpha_\xi = \alpha.\end{aligned}$$

Proposition 2.9. *Es gilt:*

- $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$.
- *Wenn B kofinal in α ist, ist* $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(B)$.
- *α hat eine abgeschlossene, kofinale Teilmenge vom Ordnungstyp* $\mathrm{cf}(\alpha)$.
- $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$.

Beweis. Für den Beweis siehe [Zie92], Lemma 7.1. □

Definition 2.10. Eine unendliche Kardinalzahl κ heißt *regulär*, wenn $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ und *singulär*, wenn $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.

Bemerkung 2.11. Kofinalitäten sind reguläre Kardinalzahlen. Unendliche Nachfolgerkardinalzahlen κ^+ sind regulär. Singuläre Kardinalzahlen sind Suprema von regulären Kardinalzahlen.

Für das restliche Kapitel sei eine unendliche Kardinalzahl κ mit überabzählbarer Kofinalität festgehalten.

Definition 2.12. Eine unbeschränkte und abgeschlossene Teilmenge C von κ heißt *Club* (von closed unbounded).

Beispiel. (i) Bezeichne On die Klasse der Ordinalzahlen. In On ist eine unbeschränkte und abgeschlossene Klasse von Ordinalzahlen ein Club.

(ii) Für unbeschränkte Mengen A in κ ist die Menge der Häufungspunkte $A' = \{\alpha < \kappa \mid \alpha = \sup(\kappa \cap \alpha)\}$ in A ein Club.

(iii) Die Menge $\{\alpha < \kappa \mid \operatorname{cf}(\alpha) = \omega\}$ ist ein Club.

Satz 2.13. *Der Durchschnitt zweier Clubs ist wieder ein Club.*

Beweis. Seien C und D Clubs. Es genügt zu zeigen, dass $C \cap D$ unbeschränkt ist, da $C \cap D$ abgeschlossen ist. Sei α aus κ. Da C unbeschränkt ist, existiert ein $\alpha_1 > \alpha$ mit $\alpha_1 \in C$. Mit gleichem Argument bekommen wir ein $\beta_1 > \alpha_1$ mit $\beta_1 \in D$. Wir konstruieren nun eine aufsteigende Folge

$$\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots$$

wobei $\alpha_i \in C$ und $\beta_i \in D$. Sei $\delta < \kappa$ der Limes der Folge, dann gilt $\sup_{i<\omega} \alpha_i = \sup_{i<\omega} \beta_i = \delta$. Somit liegt δ sowohl in C als auch in D, folglich ist $\delta \in C \cap D$ und $\delta > \alpha$. $\square$

Satz 2.14. *Der Durchschnitt von weniger als* $\operatorname{cf}(\kappa)$*-vielen Clubs ist wieder ein Club.*

Beweis. Sei $\mu < \operatorname{cf}(\kappa)$ eine Kardinalzahl und $(C_\alpha \mid \alpha < \mu)$ eine Familie von Clubs. Wir zeigen induktiv, dass der Durchschnitt D der Clubs C_α unbeschränkt ist.

Für endliche μ folgt dies unmittelbar aus Satz 2.13.

Sei nun μ unendlich und $\gamma < \kappa$. Sei $D_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} C_\beta$. Die D_α sind nach Induktionsvoraussetzung unbeschränkt. Wir definieren nun rekursiv eine Funktion $f\colon \mu \to \kappa$ durch

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \min\{\epsilon \in D_\alpha \mid{}& \epsilon \text{ ist größer als } \gamma, \\ & \epsilon \text{ ist größer als alle Elemente von } f[\alpha]\}. \end{aligned}$$

$f[\alpha]$ kann nicht kofinal in κ sein, also ist f wohldefiniert. Da μ eine Limeszahl ist, ist $\delta = \sup_{\alpha<\mu} f(\alpha) = \sup_{\beta<\alpha<\mu} f(\alpha)$ für alle $\beta < \mu$, folglich ist δ Supremum von Elementen aus C_β. Somit ist δ größer als γ und liegt schon in allen C_β. $\square$

Definition 2.15. Sei $(A_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ eine Familie von Teilmengen von κ. Der *Diagonaldurchschnitt* der A_α ist definiert als:

$$\Delta_{\alpha<\kappa} A_\alpha = \left\{ \alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta \right\}.$$

Satz 2.16. *Wenn κ regulär (und überabzählbar) ist, dann ist der Diagonaldurchschnitt von einer Familie $(C_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ von Clubs wieder ein Club.*

Beweis. Wir bezeichnen mit D den Diagonaldurchschnitt der C_α.

Wir zeigen zuerst die Abgeschlossenheit:

Sei $\alpha = \sup(D \cap \alpha) < \kappa$ eine Limeszahl. Sei $\beta < \alpha$ fest gewählt. Die Ordinalzahlen aus D, die zwischen β und α liegen, haben α als Supremum. Diese Ordinalzahlen liegen aber alle in C_β, somit liegt auch α in C_β, also liegt α auch in D.

Es bleibt zu zeigen, dass D unbeschränkt ist:

Aus Satz 2.14 folgt, dass wir eine monoton wachsenden Funktion $f\colon \omega \to \kappa$ konstruieren können, mit beliebig vorgegebenem $f(0)$, so dass $f(n+1) \in \bigcap_{\beta < f(n)} C_\beta$ für alle n. Damit liegt das Supremum der $f(n)$ schon in D, und es folgt die Behauptung. □

Definition 2.17. Eine Teilmenge $S \subseteq \kappa$ heißt *stationär*, wenn sie jeden Club schneidet.

Bemerkung 2.18. Die Sätze über Clubs gelten in dualer Form für nicht-stationäre Mengen:

- Für zwei nicht-stationäre Mengen ist die Vereinigung nicht stationär.
- Für weniger als $\mathrm{cf}(\kappa)$- viele nicht-stationäre Mengen ist die Vereinigung nicht stationär.
- Für eine Familie $(A_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ von nicht-stationären Mengen ist die Diagonalvereinigung $\left\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta\right\}$ nicht stationär.

Definition 2.19. Sei S eine stationäre Teilmenge der überabzählbaren, regulären Kardinalzahl κ. Eine Funktion $f\colon S \to \kappa$ heißt *regressiv*, wenn $f(\alpha) < \alpha$ für alle $\alpha \in S$.

Satz 2.20 (Fodor)**.** *Sei κ überabzählbar und regulär. Sei S eine stationäre Teilmenge von κ und $f\colon S \to \kappa$ regressiv. Dann ist f auf einer stationären Teilmenge T von S konstant.*

Beweis. Sei S die Diagonalvereinigung der $A_\alpha = \{\beta \in S \mid f(\beta) = \alpha\}$. Eine der Mengen A_α muss nach Bemerkung 2.18 Punkt 3 schon stationär sein, weil S nach Voraussetzung stationär ist. □

Satz 2.21 (Solovay)**.** *Jede überabzählbare, reguläre Kardinalzahl κ lässt sich in κ-viele disjunkte, stationäre Mengen zerlegen.*

Beweis. Sei

$$S = \{\alpha < \kappa \mid \operatorname{cf}(\alpha) = \omega\}$$

die Menge der Limeszahlen in κ, die Kofinalität ω haben. Die Menge S ist stationär. Da alle Elemente in S Kofinalität ω haben, können wir für alle $\alpha \in S$ eine aufsteigende Folge $(\delta_i^\alpha)_{i<\omega}$ wählen, die gegen α konvergiert.
Sei $\beta < \kappa$ fest gewählt. Wir betrachten die stationäre Menge $S \backslash \beta$. Für jedes $\alpha \in S \backslash \beta$ gibt es eine Stelle $n(\alpha)$ in der aufsteigenden Folge $(\delta_i^\alpha)_{i<\omega}$ mit $\delta_{n(\alpha)}^\alpha > \beta$. Nach Bemerkung 2.18 Punkt 2 existiert ein n_β, so dass wir folgende stationäre Menge

$$R_\beta = \{\alpha \in (S \setminus \beta) \mid n(\alpha) = n_\beta\}$$

bekommen. Wir wenden den Satz von Fodor 2.20 auf die regressive Funktion $\alpha \mapsto \delta_{n_\beta}^\alpha$ an. Dieser liefert eine stationäre Teilmenge S_β von R_β, auf der die regressive Funktion konstant einen Wert δ^β annimmt.
Die Menge der vorkommenden δ^β ist kofinal in κ, da immer $\delta^\beta > \beta$ gilt. Sie hat also die Mächtigkeit κ, da κ als regulär vorausgesetzt war. Es existiert daher eine κ-mächtige Teilmenge I von κ, für die alle δ^β $(\beta \in I)$ verschieden sind.
Wir finden ein n, so dass die Menge $J = \{\beta \in I \mid n_\beta = n\}$ die Mächtigkeit κ hat, da $\operatorname{cf}(\kappa) > \omega$. Für $\beta, \beta' \in J$ gilt nun $S_\beta \cap S_{\beta'} = \emptyset$. Denn für $\alpha \in S_\beta$ folgt $\delta_n^\alpha = \delta^\beta$. □

Korollar 2.22. *Jedes κ mit überabzählbarer Kofinalität lässt sich in $\operatorname{cf}(\kappa)$-viele disjunkte stationäre Teilmengen zerlegen.*

Beweis. Siehe [Zie92], Folgerung 8.7. □

Bemerkung 2.23. Sei C ein Club in κ. Alle stationären Teilmengen von κ haben einen nicht-leeren Schnitt mit C. Somit kann κ nicht mehr als $|C| = \operatorname{cf}(\kappa)$-viele stationäre Teilmengen besitzen.

2.2.2 Der Satz von Ramsey

Den folgenden anschaulichen Beweis des Satzes von Ramsey übernehmen wir aus dem Buch von Tent und Ziegler [TZ12].
Wir schreiben $[A]^n = \{b \subseteq A \mid |b| = n\}$ für die Menge aller n-elementigen Teilmengen einer Menge A.

Bemerkung 2.24 (Schubfachprinzip)**.** Sei A eine unendliche Menge und $f\colon A \to m$ eine Funktion von A in die natürliche Zahl m. Dann ist A auf einer unendliche Teilmenge von A konstant. Der folgende Satz von Ramsey ist eine Verallgemeinerung dieses Prinzips für n-elementige Teilmengen.

Satz 2.25 (Ramsey). *Sei A eine unendliche Menge, $n \in \omega$. Partitioniere die Menge $[A]^n$ aller n-elementigen Teilmengen von A in Teilmengen $C_1, \ldots, C_k$ für $k \in \omega$. Dann existiert eine unendliche Teilmenge von A, deren n-elementige Teilmengen alle zu demselben C_i gehören.*

Beweis. Betrachte die Partitionierung als Färbung auf $[A]^n$. Wir suchen eine unendliche Teilmenge B von A, die einfarbig auf $[B]^n$ ist. Wir zeigen dies durch eine Induktion nach n.

Für $n = 1$ ist dies gerade das Schubfachprinzip.

Der Satz gelte für n beliebig aber fest.

Sei $a_0 \in A$. Dann induziert jede Färbung auf $[A]^{n+1}$ eine Färbung der n-elementigen Teilmengen von $A' = A \setminus \{a_0\}$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine einfarbige unendliche Teilmenge B_1 auf A', mit der induzierten Färbung. Folglich haben alle $(n+1)$-elementigen Teilmengen von A, die aus a_0 und n Elementen von B_1 bestehen, dieselbe Farbe. Wähle nun $a_1 \in B_1$. Mit dem gleichen Argument finden wir eine unendliche Teilmenge B_2 von B_1 mit gleicher Eigenschaft. Induktiv konstruieren wir eine unendlich absteigende Folge $A = B_0 \supset B_1 \supset \ldots$ und eine Folge von Elementen $a_i \in B_i \setminus B_{i+1}$, so dass die Farbe jeder $(n+1)$-elementigen Teilmenge $\{a_{i(0)}, \ldots a_{i(n)}\}$ mit $i(0) < \cdots < i(n)$, nur von dem Wert von $i(0)$ abhängt. Nach dem Schubfachprinzip existieren unendlich viele Werte von $i(0)$, für die die Farbe dieselbe ist. Diese $a_{i(0)}$'s sind dann die gesuchte einfarbige Menge. $\square$

2.3 Überdeckungstheoreme von Brenner

In diesem Kapitel führen wir einige Sätze aus dem Artikel [Bre78] von Brenner ein, auf die wir später in Beweisen zurückgreifen. Die grundlegenden Definitionen und Sätze folgen der Darstellung von [Sco87].

Definition 2.26. Sei G eine endliche, nicht-abelsche, einfache Gruppe und C eine Konjugationsklasse in G. Die Potenz C^ν ist induktiv definiert durch

$$C^0 = 1,\ C^1 = C,\ C^\nu = C^{\nu-1}C = CC^{\nu-1}$$

wobei $CD = \{\alpha\beta \mid \alpha \in C, \beta \in D\}$.

Satz 2.27. *Wenn (G, M) eine Permutationsgruppe von endlichem Grad ist und $g \in G$, dann ist g das Produkt von paarweise verschiedenen Zykel. Die Zykelzerlegung ist bis auf Reihenfolge und 1-Zykel eindeutig.*

Beweis. Die Behauptung ist offensichtlich für $|M| = 1$.
Wir führen den Beweis induktiv über die Kardinalität von M. Sei $g \in G$, $x_1 \in M$. Dann existieren ein $i \in \omega$ und unterschiedliche Elemente $x_1, \ldots, x_n$ von M, so dass

$$x_1 g = x_2,\ x_2 g = x_3, \ldots, x_{i-1} g = x_i,\ x_i g = x_1.$$

Dies gilt, da M endlich und g injektiv ist. Betrachte nun $g|_{M\backslash\{x_1,\ldots,x_i\}}$. Dies ist eine Permutation, wenn $M\backslash\{x_1, \ldots, x_i\} \neq \emptyset$. Nach I.V. ist $g|_{M\backslash\{x_1,\ldots,x_i\}}$ das Produkt $c_2 \ldots c_m$ paarweise verschiedener Zykel und $g = (x_1, \ldots, x_i)c_2 \ldots c_m$. Damit existiert eine Zykelzerlegung. In einer Zerlegung von g muss aber der Zykel, der x_1 enthält, schon $(x_1, \ldots, x_i)$ sein, somit ist die Zerlegung auch eindeutig. $\square$

Als erstes erläutern wir die Struktur der Konjugationsklassen in den symmetrischen Gruppen $\mathrm{Sym}(n)$ und den alternierenden Gruppen $\mathrm{Alt}(n)$.

Definition 2.28. Zwei Permutationen $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(n)$ haben dieselbe *Zykelstruktur*, wenn ihre Zerlegung in disjunkte Zykel für alle $r \in \omega$ dieselbe Anzahl an r-Zykel besitzt.

Lemma 2.29. *Zwei Permutationen sind genau dann in* $\mathrm{Sym}(n)$ *konjugiert, wenn sie dieselbe (kanonische) Zykelstruktur haben.*

Für den Beweis zeigen wir erst ein Hilfslemma. Dieses haben wir aus dem Buch von Rotman [Rot95] übernommen.

Behauptung 2.30. *Wenn $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(n)$, dann hat $\alpha\beta\alpha^{-1}$ dieselbe Zykelstruktur wie β.*

Beweis der Behauptung 2.30. Sei π die Permutation, die wir erhalten, wenn wir α auf die Elemente von β anwenden.
Wenn β ein Element i festhält, dann hält π $\alpha(i)$ fest, wenn $\alpha(i)$ ein 1-Zykel ist, aber

$$\alpha\beta\alpha^{-1}(\alpha(i)) = \alpha\beta(i) = \alpha(i).$$

Somit bewegt $\alpha\beta\alpha^{-1}$ $\alpha(i)$ nicht.
Wenn β das Element i bewegt, z.B. $\beta(i) = j$, dann sei die vollständige Zerlegung von β gegeben durch

$$\beta = \gamma_1\gamma_2 \dots (\dots i\ j \dots) \dots \gamma_t.$$

Wenn $\alpha(i) = k$ und $\alpha(j) = l$, dann gilt $\pi\colon k \mapsto l$, aber

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\colon k \mapsto i \mapsto j \mapsto l,$$

also ist $\alpha\beta\alpha^{-1}(k) = \pi(k)$. Somit stimmen π und $\alpha\beta\alpha^{-1}$ auf allen $\alpha(i) = k$ überein, da α surjektiv ist, ist $\pi = \alpha\beta\alpha^{-1}$. □

Beweis von Lemma 2.29. Mit der Behauptung folgt somit direkt, dass konjugierte Permutationen dieselbe Zykelstruktur haben.
Für die Rückrichtung definiere eine Permutation $\gamma \in \mathrm{Sym}(n)$ wie folgt: Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(n)$ mit derselben Zykelstruktur. Stelle α und β in kanonischer disjunkter Zykelstruktur dar und sortiere die Zykel der Größe nach. Das Element γ schickt jetzt alle Elemente aus α auf die entsprechende Position in der Zerlegung von β. Haben beispielsweise α, β folgende Zerlegungen:

$$\begin{aligned}\alpha &= \gamma_1\gamma_2 \dots (\dots i\ j \dots) \dots \gamma_t\\ \beta &= \delta_1\delta_2 \dots (\dots k\ l \dots) \dots \delta_t.\end{aligned}$$

Dann ist $\gamma(i) = k, \gamma(j) = l$. Damit ist γ eine Permutation und jedes i zwischen 1 und n tritt genau einmal auf. Mit der Behauptung ist $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$, also konjugiert.

□

Beispiel. Seien α und β wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}\alpha &= (2\ 3\ 1)(4\ 5)(6)\\ \beta &= (5\ 6\ 2)(3\ 1)(4).\end{aligned}$$

Dann ist $\gamma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix} = (125)(364)$. Die Permutation γ ist nicht eindeutig.

Korollar 2.31. *Eine Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ (und folglich ihre Klasse) liegt genau dann in $\mathrm{Alt}(n)$, wenn σ eine gerade Anzahl (oder Null) an Orbits von geradem Grad hat.*

Bemerkung 2.32. Sei $f_\sigma \colon \{1, \ldots, n\} \to \omega$ eine Funktion, für die gilt $f_\sigma(i) = \#(i\text{-Zykel})$. Wir schreiben $[f_\sigma]$ oder $[f_\sigma(1), \ldots, f_\sigma(n)]$ für die Zykelzerlegung des Elements $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$, dies bedeutet, dass σ genau $f_\sigma(i)$-viele i-Zykel für alle $1 \leq i \leq n$ besitzt. Wir identifizieren die Konjugationsklassen der $\mathrm{Sym}(n)$ im Folgenden mit der obigen Zerlegung.

Lemma 2.33. *Eine Konjugationsklasse $[f_\sigma]$ von $\mathrm{Sym}(n)$ besteht genau dann aus geraden Permutationen, wenn $\sum_i f_\sigma(2i)$ gerade ist.*

Beweis. Dies folgt daraus, dass eine Permutation genau dann gerade ist, wenn die Anzahl der Zykel gerader Länge in der Zykelzerlegung ebenfalls gerade ist. □

Lemma 2.34. *Wenn $[f_\sigma]$ eine Konjugationsklasse in $\mathrm{Sym}(n)$ ist, dann ist*

$$\#([f_\sigma]) = \frac{n!}{(\prod i^{f_\sigma(i)})(\prod(f_\sigma(i)!))},$$

das heißt, die Anzahl der Elemente in der Konjugationsklasse ist genau der Index des Zentralisators von σ in $\mathrm{Sym}(n)$.

Beweis. Es gibt $n!$ Möglichkeiten n Elemente als Produkt von $f_\sigma(1)$ 1-Zykel, gefolgt von $f_\sigma(2)$ 2-Zykel,..., gefolgt von $f_\sigma(n)$ n-Zykel zu schreiben. Aus vielen folgt dieselbe Permutation. Insbesondere kann jeder i-Zykel an jeder der i Stellen anfangen. (Beispiel $(123) = (231) = (312)$). Also gibt es $i^{f_\sigma(i)}$ Wege $f_\sigma(i)$ i-Zykel einer gegebenen Permutation zuschreiben. Dies sind die erlaubten Änderungen. Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel. Für $\mathrm{Sym}(5)$ erhalten wir die folgenden Konjugationsklassen:

$$[5,0,0,0,0], [3,1,0,0,0], [2,0,1,0,0], [1,0,0,1,0], [1,2,0,0,0], [0,0,0,0,1], [0,1,1,0,0].$$

Nach obigem Satz haben die Konjugationsklassen $1, 10, 20, 30, 15, 24, 20$ Elemente. Die Klassen $[3,1,0,0,0], [1,0,0,1,0]$ und $[0,1,1,0,0]$ sind ungerade. Die Summe der Anzahl Elemente der geraden Klassen beträgt 60, gleiches gilt für die Summe über die ungeraden Klassen.

Lemma 2.35. *Sei $[f_\sigma]$ eine gerade Klasse in $\mathrm{Sym}(n)$. Dann gilt eine der beiden folgenden Aussagen:*

1. *Wenn $f_\sigma(2i) > 0$ oder $f_\sigma(2i+1) > 1$ für ein i, dann ist $[f_\sigma]$ eine Konjugationsklasse in* $\mathrm{Alt}(n)$.

2. *Sonst ist $[f_\sigma]$ die Vereinigung von zwei gleichgroßen Klassen in* $\mathrm{Alt}(n)$.

Beweis. Sei $\sigma \in [f_\sigma]$. Dann ist

$$\#(C(\sigma) \text{ in } \mathrm{Alt}(n)) = [\mathrm{Alt}(n) : \mathrm{Alt}(n) \cap Z(\sigma)],$$

wobei auf der linken Seite die Anzahl der Konjugierten von σ in $\mathrm{Alt}(n)$ steht und $Z(\sigma)$ den Zentralisator von σ in $\mathrm{Sym}(n)$ bezeichnet.
Wenn $Z(\sigma) \nsubseteq \mathrm{Alt}(n)$, dann ist die rechte Seite gleich

$$[\mathrm{Alt}(n)Z(\sigma) : Z(\sigma)] = [\mathrm{Sym}(n) : Z(\sigma)] = \#(C(\sigma) \text{ in } \mathrm{Sym}(n)),$$

sonst ist $Z(\sigma) \subseteq \mathrm{Alt}(n)$ und dann folgt:

$$[\mathrm{Alt}(n) : \mathrm{Alt}(n) \cap Z(\sigma)] = \frac{[\mathrm{Sym}(n) : Z(\sigma)]}{2}$$

und

$$\#(C(\sigma) \text{ in } \mathrm{Alt}(n)) = \frac{\#(C(\sigma) \text{ in } \mathrm{Sym}(n))}{2}.$$

Folglich genügt es zu zeigen, dass $Z(\sigma) \subseteq \mathrm{Alt}(n)$ genau dann gilt, wenn alle $f(2i) = 0$ und alle $f(2i+1) = 0$ oder 1 sind, dies folgt aus Korollar 2.31.

Wenn $f(2i) > 0$ gilt, dann ist $\sigma = \rho\tau$, wobei ρ ein $(2i)$-Zykel ist und τ die Punkte festhält, die von ρ bewegt werden (also sind die Zykel disjunkt), somit ist $\rho\tau = \tau\rho$, so dass $\rho\sigma = \sigma\rho$, also ist ρ eine ungerade Permutation in $Z(\sigma)$. Folglich gilt $Z(\sigma) \nsubseteq \mathrm{Alt}(n)$.

Wenn $f(2i+1) > 1$ gilt, dann ist $\sigma = (1 \dots 2i+1)(1' \dots (2i+1)')\tau = \rho\rho'\tau$, wobei τ die Punkte festhält, die von ρ oder ρ' bewegt werden. Dann ist $(11')(22') \dots (2i+1(2i+1)')$ eine ungerade Permutation in $Z(\sigma)$.

Wenn schließlich alle $f(2i) = 0$ und alle $f(2i+1) = 0$ oder 1 sind, dann gilt nach Lemma 2.34

$$\#(C(\sigma)) = \frac{n!}{j},$$

wobei j ungerade ist, so dass $\#(Z(\sigma))$ ungerade ist. Folglich ist jedes Element von $Z(\sigma)$ von ungerader Ordnung. Da jede ungerade Permutation von gerader Ordnung ist, ist $Z(\sigma) \subseteq \mathrm{Alt}(n)$. □

Beispiel. Wir greifen obiges Beispiel der $\mathrm{Sym}(5)$ wieder auf und betrachten die 4 geraden Klassen.

$$[2,0,1,0,0],[1,2,0,0,0],[5,0,0,0,0],[0,0,0,0,1].$$

Mit dem gerade gezeigten Satz zerfällt nur die letzte Klasse in $\mathrm{Alt}(5)$. In $\mathrm{Alt}(5)$ existieren folglich die 5 Konjugationsklassen:

$$[2,0,1,0,0],[1,2,0,0,0],[5,0,0,0,0],[0,0,0,0,1]_1,[0,0,0,0,1]_2$$

mit $20, 15, 1, 12$ und 12 Elementen.

Definition 2.36. Sei C_σ die Konjugationsklasse von σ in $\mathrm{Sym}(n)$. Eine Permutation $\sigma \in \mathrm{Alt}(n)$ heißt *speziell*, wenn C_σ in zwei Konjugationsklassen in $\mathrm{Alt}(n)$ zerfällt.

Dies tritt genau dann auf, wenn die Zykel von σ unterschiedliche ungerade Länge haben.

Lemma 2.37. *Sei $n > 5$, $n = l(1) + \cdots + l(r)$, $r > 1$, $1 < l(i) \leq n$ eine Partition von n in r Summanden, die alle größer als 1 sind. Sei $C_{l(1),\ldots,l(r)}$ die zugehörige Konjugationsklasse in* $\mathrm{Sym}(n)$. *(Wir identifizieren die Konjugationsklasse, mit obiger Zerlegung.)*

1. *Wenn n ungerade ist, enthält $C^2_{l(1),\ldots,l(r)}$ alle n-Zykel.*
2. *Wenn $n = 2m$ gerade ist, dann enthält $C^2_{l(1),\ldots,l(r)}$ die Konjugationsklasse C^2_m in* $\mathrm{Alt}(n)$, *das heißt Zykel der Form $(x_1 \ldots x_m)(y_1 \ldots y_m)$.*

Beweis. Wir machen eine direkte Konstruktion.
Setze $k(i) = \sum_{j=1}^{i} l(j)$, $P = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_r$, wobei

- $\sigma_1 = (1, 2, \ldots, k(1))$,
- $\sigma_2 = (k(1) + 1, \ldots, k(2))$, ...
- $\sigma_i = (k(i-1) + 1, \ldots, k(i))$, ...
- $\sigma_r = (k(r-1) + 1, \ldots, k(r))$.

Definiere Q über P, indem jeweils die Endelemente jedes Zykels getauscht werden, folglich ist $Q = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_r$, so dass

- $\tau_1 = (1, 2, \ldots k(1) - 1, k(1) + 1)$,
- $\tau_2 = (k(1), k(1) + 2, \ldots, k(2) - 1, k(2) + 1)$, ...

- $\tau_i = (k(i-1), k(i-1)+2, \ldots, k(i)-1, k(i)+1)$, ...
- $\tau_r = (k(r-1), k(r-1)+2, \ldots, k(r))$,
- $Q = \beta^{-1}P\beta$, $\beta = (k(1), k(1)+1)(k(2), k(2)+1)\ldots(k(r-1), k(r-1)+1)$.

Dann hat PQ die gewünschte Form. Damit ist das Lemma für gerade n bewiesen.
Wenn n ungerade ist, ist klar, dass $C^2_{l(1),\ldots,l(r)}$ n-Zykel enthält. Aber ein äußerer Automorphismus von $\mathrm{Alt}(n)$ liefert alle n-Zykel. $\square$

Beispiel. Wir geben je ein Beispiel für eine ungerade und eine gerade Zahl.

- Sei $n = 7$. Wir betrachten die Zerlegung $7 = 3+2+2$. Dann ist $k(1) = 3$, $k(2) = 5$, $k(3) = 7$, woraus sich $\sigma_1 = (123)$, $\sigma_2 = (45)$ und $\sigma_3 = (67)$ ergibt. Das Produkt der σ_i ergibt den Zykel $P = (123)(45)(67)$. Q berechnet sich aus $\beta^{-1}P\beta$, wobei $\beta = (34)(56)$ ist. Hieraus folgt $Q = (124)(36)(57)$ und somit errechnen wir für $PQ = (1473265)$ einen 7-Zykel.

- Als Beispiel für eine gerade Zahl wählen wir $n = 8 = 3+2+3$. Für P und Q ergibt sich $P = (123)(45)(678)$, $Q = (124)(36)(578)$ und somit ist $PQ = (1475)(2683)$.

Definition 2.38. Sei σ eine Permutation in $\mathrm{Alt}(n)$. Wir unterscheiden zwischen nicht-trivialen Zykeln τ_i, den Orbits und trivialen Zykeln ρ_i, den 1-Zykel. Wir schreiben $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k \rho_1 \ldots \rho_s$. Der *orbitale Überschuss* von σ ist $\sum_{i=1}^{k}(|\tau_i| - 2) - s$.

Lemma 2.39. *Sei* $\sigma \in \mathrm{Alt}(n)$ *und habe nicht-negativen orbitalen Überschuss. Für* $n > 5$ *gilt:*

1. *Wenn* n *ungerade ist, dann ist jeder* n*-Zykel ein Produkt von zwei Konjugierten von* σ*.*

2. *Wenn* n *gerade ist, dann ist jede Permutation mit zugehöriger Konjugationsklasse* C^2_m *für* $m = \frac{1}{2}n$ *ein Produkt von zwei Konjugierten von* σ*.*

Beweis. Sei σ gegeben, konstruiere ρ aus σ wie in Beweis von Lemma 2.37. Dann ersetze die überschüssigen Elemente in einem oder in allen τ_i durch die Elemente $k(r)+1, \ldots, n$, die nicht explizit in σ erwähnt werden. Bilde ρ_1 aus ρ wie folgt:

$\rho_1 = \gamma^{-1}\rho\gamma$,

$\gamma = (1, k(r)+1)(2, k(r)+2)\dots(k(1)-1,\dots)(k(1)+1,\dots)\dots.$

Damit ist $\sigma\rho_1$ ein n-Zykel, wenn n ungerade ist und das Produkt zweier disjunkter $(\frac{1}{2})n$-Zykel, wenn n gerade ist. $\square$

Bemerkung 2.40. Wenn r ungerade ist und $\sigma \in \mathrm{Alt}(n)$, dann gehören σ und ρ zur selben Klasse in $\mathrm{Alt}(n)$.
Wenn r gerade ist, gilt dieselbe Aussage, außer wenn σ zu einer speziellen Klasse in $\mathrm{Alt}(n)$ gehört.
Des Weiteren gehören ρ, ρ_1 zur selben Klasse in $\mathrm{Alt}(n)$, wenn diese keine spezielle Klasse ist.

Lemma 2.41.

1. *Wenn C keine spezielle Konjugationsklasse in $\mathrm{Alt}(n)$ ist, dann ist $CC \supset 1$.*

2. *Wenn C eine beliebige Konjugationsklasse in $\mathrm{Alt}(n)$ ist, dann ist $CC \supset C$.*

Beweis.

1. Wenn C keine spezielle Konjugationsklasse ist, dann zerfällt C nicht in zwei verschiedene Konjugationsklassen in $\mathrm{Alt}(n)$ und somit ist für jedes Element das zugehörige Inverse in C. Daraus folgt die Behauptung.

2. Für die zweite Behauptung siehe [Bre73].

$\square$

Satz 2.42. *Sei C keine spezielle Klasse in $\mathrm{Alt}(n)$ mit orbitalem Überschuss ≥ -1. Dann ist $C^4 = \mathrm{Alt}(n)$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus den vorigen Lemmata. $\square$

2.4 Modelltheorie für metrische Strukturen

Die Einführung in die Modelltheorie für metrische Strukturen orientiert sich an dem Artikel von Ben Yaacov, Bernstein, Henson und Usvyatsov [BYBHU08].

2.4.1 Metrische Strukturen

Definition 2.43. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dieser Raum ist *beschränkt*, wenn eine reelle Zahl B existiert, so dass $d(x, y) \leq B$ ist für alle $x, y \in M$. Wir schreiben $diam(M, d)$ für das Infimum. Ein *gleichmäßiges Stetigkeitsmaß* ist eine beliebige Funktion $\Delta\colon (0, 1] \to (0, 1]$. Seien (M, d) und (M', d') metrische Räume und $f\colon M \to M'$ eine Funktion. Dann heißt f *gleichmäßig stetig* bzgl. der Funktion Δ, wenn für alle $\varepsilon \in (0, 1]$ und alle $x, y \in M$ gilt

$$d(x, y) < \Delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Wir nennen f *gleichmäßig stetig*, wenn f ein gleichmäßiges Stetigkeitsmaß besitzt.

Sei (M, d) ein vollständiger, beschränkter metrischer Raum. Ein *Prädikat* auf M ist eine gleichmäßig stetige Funktion von M^n $(n \geq 1)$ in ein beschränktes Intervall in $\mathbb{R}$. Eine *Funktion* auf M ist eine gleichmäßig stetige Funktion von M^n $(n \geq 1)$ nach M. In beiden Fällen beschreibt n die Stelligkeit des Prädikates bzw. der Funktion.

Definition 2.44. Eine *metrische Struktur* $\mathcal{M}$ auf dem metrischen Raum (M, d) besteht aus einer Familie $(R_i \mid i \in I)$ von Prädikaten auf M, einer Familie $(F_j \mid j \in J)$ von Funktionen auf M und einer Familie unterschiedlicher Elemente $(a_k \mid k \in K)$ von M. Wir schreiben solche metrischen Strukturen als

$$\mathcal{M} = (M, R_i, F_j, a_k \mid i \in I, j \in J, k \in K).$$

Jede dieser Indexmengen darf leer sein. Wenn alle leer sind, dann ist $\mathcal{M}$ der beschränkte metrische Raum (M, d) selbst.

Definition 2.45. Die zu $\mathcal{M}$ gehörige *Signatur* $\mathcal{L}$ einer Sprache ist die Menge der Prädikats-, Funktions- und Konstantensymbolen und der dazugehörigen Stelligkeiten.

Wir schreiben $P^{\mathcal{M}}$ für R, $f^{\mathcal{M}}$ für F und $c^{\mathcal{M}}$ für a.
Diesbezüglich ist $\mathcal{L}$ identisch zu einer Signatur in der Modelltheorie erster Stufe. Das reicht allerdings nicht aus, wir benötigen folgende zusätzliche Eigenschaften für metrische Strukturen.

Bemerkung 2.46. Jedes Prädiaktssymbol muss ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall I_P reeller Zahlen und ein gleichmäßiges Stetigkeitsmaß Δ_P berücksichtigen. Diese müssen die Bedingungen erfüllen, dass $P^{\mathcal{M}}$ nur Werte in I_P annimmt und Δ_P muss ein gleichmäßiges Stetigkeitsmaß für $P^{\mathcal{M}}$ sein. Genauso muss für jede Funktion f ein gleichmäßiges Stetigkeitsmaß Δ_f gegeben sein und dies muss ein gleichmäßiges Stetigkeitsmaß für $f^{\mathcal{M}}$ sein. Es muss zusätzlich eine nicht-negative reelle Zahl $D_{\mathcal{L}}$ für $\mathcal{L}$ existieren, so dass $diam(M, d) \leq D_{\mathcal{L}}$ ist.

Definition 2.47. Wenn diese Bedingungen alle erfüllt sind und die Prädikats-, Funktions- und Konstantensymbole von $\mathcal{L}$ genau mit den Prädikaten, Funktionen und unterschiedlichen Elementen von $\mathcal{M}$ übereinstimmen, dann nennen wir $\mathcal{M}$ eine *$\mathcal{L}$-Struktur*.

Wir schreiben manchmal, wenn keine Verwechslung entstehen kann, $d^{\mathcal{M}}$ für die Metrik d. Dies ist konsistent mit der Notation der Interpretation in $\mathcal{M}$ des nicht-logischen Symbols d von $\mathcal{L}$. Außerdem ist es zweckdienlich, dieselbe Notation „d“ für das logische Symbol der Metrik und dessen Interpretation in $\mathcal{M}$ zu verwenden.

2.4.2 Formeln und Interpretationen

In diesem Abschnitt stellen wir die Unterschiede der Syntax und Semantik der Logik erster Stufe und der metrischen Strukturen heraus.

Definition 2.48. Die *logischen Symbole* von $\mathcal{L}$ enthalten ein Symbol d für die Metrik des zugrundeliegenden metrischen Raumes. Formal ist dies äquivalent zu einem Prädikatssymbol der Stelligkeit 2. Die logischen Symbole enthalten ebenfalls eine unendliche Menge $V_{\mathcal{L}}$ von Variablen. Die restlichen logischen Symbole bestehen aus einem Symbol für jede stetige Funktion $u\colon [0,1]^n \to [0,1]$, $n \geq 1$, und den Symbolen inf und sup. Die stetigen Funktionen übernehmen die Rolle der Junktoren und die Symbole inf und sup sind die Quantoren.

Definition 2.49. Sei $\mathcal{L}$ fest gewählt. *Terme* von $\mathcal{L}$ werden induktiv gebildet, genau wie in der Logik der ersten Stufe. *Atomformeln* von $\mathcal{L}$ sind Ausdrücke der Form $P(t_1, \ldots, t_n)$, wobei P ein n-stelliges Prädikatsymbol von $\mathcal{L}$ ist und $t_1, \ldots, t_n$ $\mathcal{L}$-Terme sind, genauso $d(t_1, \ldots, t_n)$, indem $t_1, \ldots, t_n$ $\mathcal{L}$-Terme sind. Die *$\mathcal{L}$-Formeln* der Sprache werden ebenfalls induktiv gebildet.

Definition 2.50. Sei $t(x_1, \ldots, x_n)$ ein $\mathcal{L}(M)$-Term. Wir definieren die *Interpretation von t* in $\mathcal{M}$ als eine Funktion $t^{\mathcal{M}}\colon M^n \to M$, genau wie in der Logik der ersten Stufe. Jedem $\mathcal{L}(M)$-Satz σ weisen wir einen Wert in $\mathcal{M}$ zu.

Dieser Wert ist eine reelle Zahl im Intervall $[0,1]$ und wir schreiben dafür $\sigma^{\mathcal{M}}$. Die Definition erfolgt induktiv über den Formelaufbau:

(i) $(d(t_1, t_2))^{\mathcal{M}} = d^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, t_2^{\mathcal{M}})$,

(ii) für jedes n-stellige Prädikatsymbol P von $\mathcal{L}$ und allen $t_1, \dots, t_n$ ist

$$(P(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{M}} = P^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}}),$$

(iii) für jede stetige Funktion $u\colon [0,1]^n \to [0,1]$ und für jeden $\mathcal{L}(M)$-Satz $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ist

$$(u(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^{\mathcal{M}} = u(\sigma_1^{\mathcal{M}}, \dots, \sigma_n^{\mathcal{M}}),$$

(iv) für jede $\mathcal{L}(M)$-Formel $\varphi(x)$ ist

$$(\sup_x \varphi(x))^{\mathcal{M}} = \sup\left\{\varphi(a)^{\mathcal{M}} \mid a \in M\right\} \in [0,1],$$

(v) für jede $\mathcal{L}(M)$-Formel $\varphi(x)$ ist

$$(\inf_x \varphi(x))^{\mathcal{M}} = \inf\left\{\varphi(a)^{\mathcal{M}} \mid a \in M\right\} \in [0,1].$$

Das gleichmäßige Stetigkeitsmaß hängt nicht von $\mathcal{M}$ ab, sondern nur von den Daten, die durch die Signatur $\mathcal{L}$ gegeben werden.

Definition 2.51. Die *Klasse der $\mathcal{L}$-Formeln* ist die kleinste Klasse von Ausdrücken, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Atomformeln von $\mathcal{L}$ sind $\mathcal{L}$-Formeln
- Wenn $u\colon [0,1]^n \to [0,1]$ stetig ist und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ $\mathcal{L}$-Formeln sind, dann ist $u(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel.
- Wenn φ eine $\mathcal{L}$-Formel ist und x eine Variable, dann sind $\sup_x \varphi$ und $\inf_x \varphi$ $\mathcal{L}$-Formeln.

Definition 2.52. Eine *$\mathcal{L}$-Bedingung* E ist ein formaler Ausdruck der Form $\varphi = 0$, wobei φ eine $\mathcal{L}$-Formel ist. E heißt *geschlossen*, wenn φ ein $\mathcal{L}-$Satz ist. Wenn $x_1, \dots, x_n$ unterschiedliche Variablen sind, dann schreiben wir eine $\mathcal{L}$-Bedingung als $E(x_1, \dots, x_n)$, um auszudrücken, dass sie die Form $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ hat und $x_1, \dots, x_n$ sind alle freien Variablen, die in der Formel vorkommen. Wenn E eine $\mathcal{L}(M)$-Bedingung $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ ist und $a_1, \dots, a_n \in M$, dann sagen wir E ist wahr für $a_1, \dots, a_n$ in $\mathcal{M}$ und schreiben $\mathcal{M} \models E[a_1, \dots, a_n]$, wenn $\varphi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Wir führen nun noch einige abkürzende Schreibweisen ein, auf die wir im weiteren Verlauf der Arbeit zurückgreifen.

Bemerkung 2.53. Wenn φ und ψ Formeln sind, schreiben wir $\varphi = \psi$ als Abkürzung für die Bedingung $|\varphi - \psi| = 0$ ($u\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ definiert durch $u(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|$ ist ein Junktor). Jede reelle Zahl $r \in [0,1]$ ist ein Junktor, Ausdrücke der Form $\varphi = r$ betrachten wir also als Bedingungen für $\mathcal{L}$-Formeln φ und $r \in [0,1]$. Sei $\dot{-}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ der Junktor

$$\dot{-}(t_1, t_2) = \max(t_1 - t_2, 0) = \begin{cases} t_1 - t_2 & \text{wenn } t_1 \geq t_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schreiben gewöhnlich $t_1 \dot{-} t_2$ anstatt $\dot{-}(t_1, t_2)$. Wir schreiben $\varphi \leq \psi$ und $\psi \leq \varphi$ als Abkürzung für die Bedingung $\varphi \dot{-} \psi = 0$. In der $[0,1]$-wertigen Logik können die Bedingungen $\varphi \leq \psi$ als Familie von Implikationen betrachtet werden von der Bedingung $\psi \leq r$ zu der Bedingung $\varphi \leq r$ für alle $r \in [0,1]$.

In metrischen Strukturen haben wir alle modelltheoretischen Konzepte und Sätze zur Verfügung, wie beispielsweise Theorien, Modelle, logische Konsequenzen, elementare Äquivalenz oder den Satz von Tarski-Vaught und den Satz von Łos. Wir werden später auf die Sätze, die wir explizit benutzen noch genauer eingehen und teilweise die Beweise präsentieren.

2.4.3 Pseudometrische Räume

Sei (M_0, d_0) ein pseudometrischer Raum, das heißt M_0 ist eine Menge und $d_0\colon M_0 \times M_0 \to \mathbb{R}$ ist eine Pseudometrik. Als Pseudometrik erfüllt d_0 die folgenden Bedingungen:

(i) $d_0(x,x) = 0$,

(ii) $d_0(x,y) = d_0(y,x) \geq 0$,

(iii) $d_0(x,z) \leq d_0(x,y) + d_0(y,z)$,

für alle $x, y, z \in M_0$.
Aus der zweiten Bedingung folgt implizit, dass $d_0(x,y) = 0$ sein darf, auch wenn x und y unterschiedlich sind.
Wir definieren eine Äquivalenzrelation E auf M_0, indem wir

$$E(x,y) \Leftrightarrow d_0(x,y) = 0$$

setzen. Die Pseudometrik d_0 ist nach der Dreiecksungleichung E-invariant. Sei $\pi\colon M_0 \to M$ die Quotientenabbildung bzgl. E, somit ist $\pi(x)$ die Äquivalenzklasse von x für alle $x \in M_0$. Hieraus können wir jetzt eine Metrik d auf

M definieren, indem wir $d(\pi(x), \pi(y)) = d_0(x, y)$ für alle $x, y \in M_0$ setzen. Dann ist (M, d) ein metrischer Raum und π ist eine isometrische Funktion von (M_0, d_0) nach (M, d). Der metrische Quotientenraum (M, d) wird somit durch (M_0, d_0) induziert.
Genauso wie bei metrischen Räumen definieren wir die Stetigkeit einer Funktion zwischen zwei pseudometrischen Räumen (M_0, d_0) und (M'_0, d'_0) über ein gleichmäßiges Stetigkeitsmaß Δ. Wir bekommen also eine wohldefinierte Quotientenabbildung $f \colon M \to M'$, zwischen den Quotientenräumen indem wir $f(\pi(x)) = \pi'(f_0(x))$ setzen für alle $x \in M_0$. Des Weiteren ist f gleichmäßig stetig mit dem gleichmäßigen Stetigkeitsmaß Δ.

2.4.4 Prästrukturen

Definition 2.54. Sei $\mathcal{L}$ eine feste Signatur für metrische Strukturen und (M_0, d_0) ein pseudometrischer Raum mit $diam(M, d) \leq D_{\mathcal{L}}$. Eine *$\mathcal{L}$-Prästruktur* $\mathcal{M}_0$ auf dem Raum (M_0, d_0) ist eine Struktur, für die die Bedingungen aus Bemerkung 2.46 in analoger Weise gelten.

Definition 2.55. Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Prästruktur und $(M, d^{\mathcal{M}})$ der zugrunde liegende pseudometrische Raum, $A \subseteq M$. Wir erweitern $\mathcal{L}$ zu einer *$\mathcal{L}(A)$-Signatur*, indem wir für jedes Element $a \in A$ neue Konstantensymbole $c(a)$ zu $\mathcal{L}$ hinzufügen. Wir erweitern die Interpretation, die durch $\mathcal{M}$ gegeben wird in kanonischer Weise, indem wir die Interpretation von $c(a)$ als Interpretation von a selber setzen für alle $a \in A$. Terme, und Funktionen werden genau so gebildet wie bei metrischen Strukturen.

Bemerkung 2.56. Die Konzepte, die wir oben für metrische Strukturen betrachtet haben, haben wir genauso für Prästrukturen zur Verfügung.

2.4.5 Konstruktion metrischer Räume aus pseudometrischen Räumen

Metrische Räume werden oft als Quotienten von pseudometrischen Räumen oder als deren Vervollständigung konstruiert. Das gleiche gilt für metrische Strukturen. Wir definieren nun die Semantik der stetigen Logik für Prästrukturen, da wir später die universell sofischen Gruppen als Quotienten von metrischen Prästrukturen betrachten werden.

Definition 2.57. Sei $\mathcal{M}_0$ eine $\mathcal{L}$-Prästruktur. Sei (M, d) der metrische Quotientenraum induziert durch den pseudometrischen Raum (M_0, d_0) mit der Quotientenabbildung $\pi \colon M_0 \to M$:

- Für jedes n-stellige Prädikatssymbol P von $\mathcal{L}$ definieren wir $P^{\mathcal{M}}$ von M^n nach I_P durch $P^{\mathcal{M}}(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) = P^{\mathcal{M}_0}(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in M_0$.

- Für jedes n-stellige Funktionssymbol f von $\mathcal{L}$ definieren wir $f^{\mathcal{M}}$ von M^n nach M durch $f^{\mathcal{M}}(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) = f^{\mathcal{M}_0}(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in M_0$.

- Für jedes Konstantensymbol c von $\mathcal{L}$ definieren wir $c^{\mathcal{M}} = \pi(c^{\mathcal{M}_0})$.

Somit ist $(M, d) = diam(M_0, d_0)$. Dies definiert eine $\mathcal{L}$-Prästruktur $\mathcal{M}$ auf dem (nicht notwendigerweise vollständigen) metrischen Raum (M, d).

Schließlich definieren wir noch eine *$\mathcal{L}$-Struktur* $\mathcal{N}$, indem wir die Vervollständigung von $\mathcal{M}$ betrachten.

Definition 2.58. Sei (N, d) ein vollständiger Raum, der eine Vervollständigung von (M, d) ist. Die zugehörige Struktur definieren wir in kanonischer Weise (dies ist möglich, da die Prädikate und Funktionen, die durch $\mathcal{M}$ gegeben sind, gleichmäßig stetig sind):

- Für jedes n-stellige Prädikatssymbol P von $\mathcal{L}$ definiert $P^{\mathcal{N}}$ von N^n nach I_P die eindeutige Funktion, die $P^{\mathcal{M}}$ erweitert und stetig ist.

- Für jedes n-stellige Funktionssymbol f von $\mathcal{L}$ definiert $f^{\mathcal{N}}$ von N^n nach N die eindeutige Funktion, die $f^{\mathcal{M}}$ erweitert und stetig ist.

- Für jedes Konstantensymbol c von $\mathcal{L}$ definieren wir $c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{M}}$.

Damit ist $\mathcal{N}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

Bemerkung 2.59. Hier noch ein paar Eigenschaften von Abbildungen metrischer Strukturen:

- Jede elementare Abbildung von einer metrischen Struktur in eine andere ist abstandserhaltend.

- Die Familie elementarer Abbildungen ist abgeschlossen unter Komposition und Bildung von Inversen.

- Jeder Isomorphismus zwischen metrischen Strukturen ist eine elementare Einbettung.

2.4.6 Metrische Ultraprodukte

Sei $((M_i, d_i) \mid i \in I)$ eine Familie beschränkter metrischer Räume mit $diam(M_i, d_i) \leq D_{\mathcal{L}}$ für alle $i \in I$. Sei $\mathcal{D}$ ein Ultrafilter auf I. Definiere eine Funktion auf dem kartesischen Produkt $\prod_{i \in I} M_i$ durch

$$d(x, y) = \lim_{\mathcal{D}} d_i(x_i, y_i),$$

wobei $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I}$. Dieser Ultralimes nimmt einen Wert im Intervall $[0, D_{\mathcal{L}}]$ an. Die Funktion d ist eine Pseudometrik auf $\prod_{i \in I} M_i$. Für $x, y \in \prod_{i \in I} M_i$ definieren wir $x \sim_{\mathcal{D}} y$ durch $d(x, y) = 0$. Dann ist $\sim_{\mathcal{D}}$ eine Äquivalenzrelation, wir definieren

$$\left(\prod_{i \in I} M_i\right)_{\mathcal{D}} = \left(\prod_{i \in I} M_i\right) / \sim_{\mathcal{D}} .$$

Die Pseudometrik d auf $(\prod_{i \in I} M_i)$ induziert eine Metrik auf dem Quotientenraum, für diese Metrik schreiben wir ebenfalls d.

Definition 2.60. Der Raum $(\prod_{i \in I} M_i)_{\mathcal{D}}$ mit der induzierten Metrik d ist das *metrische Ultraprodukt von* $((M_i, d_i) \mid i \in I)$. Für die Äquivalenzklasse von $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ unter $\sim_{\mathcal{D}}$ schreiben wir $((x_i)_{i \in I})_{\mathcal{D}}$.

Definition 2.61. Seien $((M_i, d_i) \mid i \in I)$ und $((M_i', d_i') \mid i \in I)$ Familien metrischer Räume mit $diam(M_i, d_i), diam(M_i', d_i') \leq D_{\mathcal{L}}$ für alle $i \in I$. Sei $n \geq 1$ fest gewählt und seien $f_i \colon M_i^n \to M_i'$ gleichmäßig stetige Funktionen für alle $i \in I$. Sei $\Delta \colon (0, 1] \to (0, 1]$ ein gleichmäßiges Stetigkeitsmaß für alle Funktionen f_i. Sei $\mathcal{D}$ ein Ultrafilter auf I, dann definieren wir eine Funktion

$$\left(\prod_{i \in I} f_i\right)_{\mathcal{D}} : \left(\prod_{i \in I} M_i\right)_{\mathcal{D}}^n \to \left(\prod_{i \in I} M_i'\right)_{\mathcal{D}}$$

wie folgt. Wenn $(x_i^k)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ für jedes $k = 1, \ldots, n$, dann definieren wir

$$\left(\prod_{i \in I} f_i\right)_{\mathcal{D}} \left(\left((x_i^1)_{i \in I}\right)_{\mathcal{D}}, \ldots, ((x_i^n)_{i \in I})_{\mathcal{D}}\right) = \left(\left(f_i\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right)\right)_{i \in I}\right)_{\mathcal{D}} .$$

Behauptung 2.62. *Dies definiert eine gleichmäßig stetige Funktion, die ebenfalls Δ als gleichmäßiges Stetigkeitsmaß besitzt.*

Beweis. O.B.d.A. sei $n = 1$. Sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Sei der Abstand von $((x_i)_{i \in I})_{\mathcal{D}}$ und $((y_i)_{i \in I})_{\mathcal{D}} < \Delta(\varepsilon)$ im Ultraprodukt $(\prod_{i \in I} M_i)_{\mathcal{D}}$. Es muss also ein $A \in \mathcal{D}$ existieren, so dass $d_i(x_i, y_i) < \Delta(\varepsilon)$ für alle $i \in A$. Da Δ ein gleichmäßiges Stetigkeitsmaß für alle f_i ist, folgt $d'_i(f_i(x_i), f_i(y_i)) \leq \varepsilon$ für alle $i \in A$. Folglich muss der Abstand im Ultraprodukt $(\prod_{i\in I} M'_i)_{\mathcal{D}}$ zwischen $((f_i(x_i))_{i\in I})_{\mathcal{D}}$ und $((f_i(y_i))_{i\in I})_{\mathcal{D}} \leq \varepsilon$ sein. Damit ist $(\prod_{i\in I} f_i)_{\mathcal{D}}$ wohldefiniert und hat Δ als gleichmäßiges Stetigkeitsmaß. □

Sei $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ eine Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen mit den zugrunde liegenden metrischen Räumen (M_i, d_i), die alle den uniform beschränkten Durchmesser $D_{\mathcal{L}}$ für $diam(M_i, d_i)$ besitzen. Sei $\mathcal{D}$ ein Ultrafilter auf I. Da eine gemeinsame Schranke $D_{\mathcal{L}}$ der metrischen Räume gegeben ist, können wir ihr metrisches Ultraprodukt bilden und dies ist wieder eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$.

Definition 2.63. Sei das Ultraprodukt $M = (\prod_{i\in I} M_i)_{\mathcal{D}}$ metrischer Räume der zugrunde liegende Raum von $\mathcal{M}$. Für jedes Prädikatssymbol P von $\mathcal{L}$ ist die Interpretation von P in $\mathcal{M}$ gegeben durch das Ultraprodukt der Funktionen

$$P^{\mathcal{M}} = \left(\prod_{i\in I} P^{\mathcal{M}_i}\right)_{\mathcal{D}},$$

das M^n auf $[0,1]$ abbildet. Für jedes Funktionssymbol f von $\mathcal{L}$ ist die Interpretation von f in $\mathcal{M}$ gegeben durch das Ultraprodukt der Funktionen

$$f^{\mathcal{M}} = \left(\prod_{i\in I} f^{\mathcal{M}_i}\right)_{\mathcal{D}},$$

welche M^n auf M abbildet. Für jedes Konstantensymbol c von $\mathcal{L}$, ist die Interpretation von c in $\mathcal{M}$ gegeben durch

$$c^{\mathcal{M}} = \left(\left(c^{\mathcal{M}_i}\right)_{i\in I}\right)_{\mathcal{D}}.$$

$\mathcal{M}$ ist eine wohldefinierte $\mathcal{L}$-Struktur. $\mathcal{M}$ ist das *metrische Ultraprodukt* der Familie $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ und wir schreiben

$$\mathcal{M} = \left(\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)_{\mathcal{D}}.$$

Wir zeigen nun ein paar grundlegende Sätze der Modelltheorie für metrische Strukturen, auf die wir im weiteren Verlauf der Arbeit zurückgreifen.

Satz 2.64 (Fundamentalsatz)**.** *Sei $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ eine Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen mit uniform beschränktem Durchmesser. Sei $\mathcal{D}$ ein Ultrafilter auf I*

und $\mathcal{M}$ das metrische Ultraprodukt von $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$. Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel. Wenn $a_k = \left(\left(a_i^k\right)_{i\in I}\right)_{\mathcal{D}}$ Elemente von $\mathcal{M}$ sind für $k = 1, \ldots, n$, dann

$$\varphi^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = \lim_{\mathcal{D}} \varphi^{\mathcal{M}_i}\left(a_i^1, \ldots, a_i^n\right).$$

Beweis. Der Beweis ist eine Induktion nach der Komplexität von φ. □

Satz 2.65 (Kompaktheitssatz)**.** *Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und $\mathcal{C}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen. Sei T endlich erfüllbar in $\mathcal{C}$. Dann existiert ein Ultraprodukt von Strukturen aus $\mathcal{C}$, welches ein Modell von T ist.*

Beweis. Sei I die Menge aller endlichen Teilmengen von T. Sei $i \in I$, $i = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Nach Voraussetzung existiert eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}_i$ in $\mathcal{C}$, so dass $\mathcal{M}_i \models E_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$.
Für alle $E \in T$, sei $S(E)$ die Menge aller $i \in I$, so dass $E \in I$. Die Menge $\{S(E) \mid E \in T\}$ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft, damit folgt, dass ein Ultrafilter $\mathcal{D}$ auf I existiert, der diese Familie enthält.
Sei $\mathcal{M} = \left(\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)_{\mathcal{D}}$. Wenn $i \in S(E)$ ist, dann gilt $\mathcal{M}_i \models E$. Damit folgt, dass $\mathcal{M} \models E$ für alle $E \in T$. □

Definition 2.66. Für jede Menge Σ von $\mathcal{L}$-Bedingungen sei Σ^+ die Menge aller Bedingungen $\varphi \leq 1/n$, so dass $\varphi = 0$ ein Element von Σ ist und $n \geq 1$.

Korollar 2.67. *Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und $\mathcal{C}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen. Sei T^+ endlich erfüllbar in $\mathcal{C}$. Dann existiert ein Ultraprodukt von Strukturen von $\mathcal{C}$, welches ein Modell von T ist.*

Definition 2.68. Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und $\Sigma = \Sigma(x_j \mid j \in J)$ eine Menge von $\mathcal{L}$-Bedingungen, wobei die x_j freie Variablen sind. Σ und T sind *konsistent*, wenn für jede endliche Teilmenge F von Σ ein Modell $\mathcal{M}$ von T existiert und Elemente $a_j \in M$, so dass für jede Bedingung E in F gilt $\mathcal{M} \models E[a]$. Wobei a ein geeignetes, endliches Tupel der a_j für die freien Variablen der Bedingungen in F bezeichnet.

Definition 2.69. Sei $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ eine Menge von $\mathcal{L}$-Bedingungen und $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Wir sagen, dass $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathcal{M}$ *erfüllbar* ist, wenn Elemente $a_1, \ldots, a_n$ von $\mathcal{M}$ existieren, so dass $\mathcal{M} \models \Gamma[a_1, \ldots, a_n]$.

Definition 2.70. Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und κ eine unendliche Kardinalzahl. Die Struktur $\mathcal{M}$ ist *κ-saturiert*, wenn für alle $A \subseteq M, |A| < \kappa$, jede Menge von Bedingungen $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ von $\mathcal{L}(A)$ in $(\mathcal{M}, a)_{a\in A}$ erfüllbar ist.

Satz 2.71. *Sei $\mathcal{L}$ eine Signatur und $|\mathcal{L}| = \omega$, $\mathcal{D}$ sei ein abzählbar unvollständiger Ultrafilter auf einer Menge I. Dann gilt für jede Familie $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ von L-Strukturen mit uniform beschränktem Durchmesser, dass $\left(\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)_{\mathcal{D}}$ ω_1-saturiert ist.*

Beweis. O.B.d.A. zeigen wir, dass $\left(\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)_{\mathcal{D}}$ die Bedingung in Definition 2.70 für $\mathcal{L}(A)$-Bedingungen in einer Variablen erfüllt. Wir behaupten also: Wenn $A \subseteq \left(\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)_{\mathcal{D}}$ abzählbar und $\Gamma(x)$ eine Menge von $\mathcal{L}(A)$-Bedingungen ist, so dass jede endliche Teilmenge von $\Gamma(x)$ in $\left(\left(\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)_{\mathcal{D}}, a\right)_{a\in A}$ erfüllbar ist, dann ist die komplette Menge $\Gamma(x)$ in $\left(\left(\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)_{\mathcal{D}}, a\right)_{a\in A}$ erfüllbar. Für alle $a \in A$ wähle

$$u(a) = (u_i(a))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i,$$

so dass $a = \left((u_i(a))_{i\in I}\right)_{\mathcal{D}}$. Es gilt

$$\left(\left(\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)_{\mathcal{D}}, a\right)_{a\in A} = \left(\prod_{i\in I} (\mathcal{M}_i, u_i(a))_{a\in A}\right)_{\mathcal{D}}.$$

Da $\mathcal{L}$ eine beliebige abzählbare Signatur und A abzählbar ist, genügt es, die folgende leichtere Aussage zu zeigen:
Wenn $\Gamma(x)$ eine Menge von $\mathcal{L}(A)$-Bedingungen ist und jede endliche Teilmenge von $\Gamma(x)$ in $\left(\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)_{\mathcal{D}}$ erfüllbar ist, dann ist $\Gamma(x)$ in $\left(\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)_{\mathcal{D}}$ erfüllbar.
Da $\mathcal{L}$ abzählbar ist, können wir die $\mathcal{L}$-Bedingungen aufzählen als

$$\Gamma(x) = \{\varphi_n(x) = 0 \mid n \in \omega\}.$$

Da $\mathcal{D}$ ein abzählbar unvollständiger Ultrafilter ist, finden wir eine absteigende Kette von Elementen von $\mathcal{D}$

$$I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots,$$

so dass $\bigcap_{k\in\omega} I_k = \emptyset$. Setze $X_0 = I$ und für alle positiven Zahlen k definiere

$$X_k = I_k \cap \left\{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \inf_x \max(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \leq \frac{1}{k+1} \right\}.$$

Da

$$\left(\prod \mathcal{M}_i\right)_{\mathcal{D}} \models \inf_x \max(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = 0,$$

folgt mit dem Fundamentalsatz 2.64, dass $X_k \in \mathcal{D}$. Wir bekommen somit eine absteigende Kette $X_k \supseteq X_{k+1}$ für alle $k \in \omega$ und $\bigcap_{k\in\omega} X_k = \emptyset$, so dass für alle $i \in I$ ein maximales $k(i)$ existiert, so dass $i \in X_{k(i)}$. Nun definieren wir ein Element $a = (a(i))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$, so dass

$$\left(\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i \right)_{\mathcal{D}} \models \Gamma \left[(a)_{\mathcal{D}} \right].$$

Wenn $k(i) = 0$ ist, für $i \in I$, dann setze $a(i)$ als beliebiges Element in $\mathcal{M}_i$, sonst wähle $a(i)$, so dass

$$\mathcal{M}_i \models \left\{ \max(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k(i)}) \leq \frac{1}{k(i)} \right\} [a(i)].$$

Wenn $k \in \omega$ und $i \in X_k$, so ist $k \leq k(i)$ und somit gilt

$$\mathcal{M}_i \models \left(\varphi_k \leq \frac{1}{k(i)} \right) [a(i)] .$$

Wiederum mit dem Fundamentalsatz 2.64 folgt nun, dass

$$\left(\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i \right)_{\mathcal{D}} \models \Gamma \left[(a)_{\mathcal{D}} \right].$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Die Signaturen $\mathcal{L}$, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit betrachten, erfüllen $D_{\mathcal{L}} = 1$ und $I_P = [0, 1]$ für jedes Prädikatssymbol.

3 Existenz sofischer und universell sofischer Gruppen

In diesem Kapitel geben wir die Metrik an, die wir benutzen, um die universell sofischen Gruppen zu konstruieren. Die grundlegenden Definitionen der Hammingmetrik und die daraus folgenden Sätze über das Verhältnis des Abstands zweier Punkte übernehmen wir aus dem Buch von Ceccherini-Silberstein und Coornaert [CSC10]. Für die Einführung der universell sofischen Gruppe und den danach bewiesenen Resultaten folgen wir der Darstellung von Elek und Szabó [ES05], bis auf Satz 3.19 und das daraus folgende Korollar 3.21. Dies sind Bemerkungen aus dem Überblicksartikel von Pestov [Pes08], die dort allerdings nicht bewiesen werden. Wir werden die Sätze später zeigen mit Hilfe der Aussage aus Satz 3.20, die wir ebenfalls beweisen.

3.1 Die Hammingmetrik

Definition 3.1. Für eine natürliche Zahl d bezeichnen wir mit $\mathrm{Sym}(d)$ die *vollständige symmetrische Gruppe* auf der Menge $\{1, 2, \ldots, d\}$ (wir benutzen die Linkswirkung). Für alle $\alpha \in \mathrm{Sym}(d)$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Fix}(\alpha)$ die Menge $\{i \mid \alpha(i) = i\}$ aller *Fixpunkte von* α. Mit $\#_t\alpha$ bezeichnen wir die *Anzahl der* t*-Zykel* in α und mit $\#_{\mathrm{fix}}\alpha$ die *Anzahl der Fixpunkte*, hierbei gilt $\#_1\alpha = \#_{\mathrm{fix}}\alpha$. Der *Träger* von α ist die Menge

$$\mathrm{supp}(\alpha) = \{i \mid \alpha(i) \neq i\} = \{1, 2, \ldots, d\} \setminus \mathrm{Fix}(\alpha).$$

Damit erhalten wir

$$|\,\{i \mid \alpha(i) \neq i\}\,| = d - \#_{\mathrm{fix}}(\alpha) \tag{3.1}$$

Definition 3.2. Eine Metrik d auf einer Gruppe G heißt *linksinvariant* (bzw. *rechtsinvariant*), wenn $d(hg_1, hg_2) = d(g_1, g_2)$ (bzw. $d(g_1h, g_2h) = d(g_1, g_2)$) gilt für alle $g_1, g_2, h \in G$. Eine Metrik die sowohl links- als auch rechtsinvariant ist, heißt *bi-invariant*.

Als nächstes betrachten wir die Abbildung $d_{hamm}\colon \mathrm{Sym}(d)\times\mathrm{Sym}(d) \to \mathbb{R}$, den sogenannten *Hammingabstand*, der definiert wird durch

$$d_{hamm}(\alpha, \beta) = \frac{|\,\{i \mid \alpha(i) \neq \beta(i)\}\,|}{d} \tag{3.2}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(d)$. Die Menge $\{i \mid \alpha(i) \neq \beta(i)\} = \{i \mid i \neq \alpha^{-1}\beta(i)\}$ ist der Träger von $\alpha^{-1}\beta$, so dass mit (3.1) folgt, dass

$$d_{hamm}(\alpha, \beta) = 1 - \frac{\#_{\mathrm{fix}}(\alpha^{-1}\beta)}{d} \tag{3.3}$$

Proposition 3.3. *Sei $\{1, 2, \ldots, d\}$ gegeben. Dann ist d_{hamm} eine bi-invariante Metrik auf* $\mathrm{Sym}(d)$*.*

Beweis. Nach der Definition des Hammingabstandes gilt $d_{hamm}(\sigma, \tau) \geq 0$ und $d_{hamm}(\sigma, \tau) = d_{hamm}(\tau, \sigma)$ für alle $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(d)$. Des Weiteren gilt die Gleichung $d_{hamm}(\sigma, \tau) = 0$ genau dann, wenn $\sigma(i) = \tau(i)$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, dies ist genau dann der Fall, wenn $\sigma = \tau$. Wähle nun $\sigma, \tau, \rho \in \mathrm{Sym}(d)$. Wenn $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ $\sigma(i) \neq \tau(i)$ erfüllt, dann gilt entweder $\sigma(i) \neq \rho(i)$ oder $\tau(i) \neq \rho(i)$. Damit bekommen wir folgende Inklusion:

$$\{i \in d \mid \sigma(i) \neq \tau(i)\} \subseteq \{i \in d \mid \sigma(i) \neq \rho(i)\} \cup \{i \in d \mid \tau(i) \neq \rho(i)\}\,.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
d_{hamm}(\sigma, \tau) &= \frac{1}{d} |\, \{i \in d \mid \sigma(i) \neq \tau(i)\} \,| \\
&\leq \frac{1}{d} |\, \{i \in d \mid \sigma(i) \neq \rho(i)\} \cup \{i \in d \mid \tau(i) \neq \rho(i)\} \,| \\
&\leq \frac{1}{d} \left(|\, \{i \in d \mid \sigma(i) \neq \rho(i)\} \,| + |\, \{i \in d \mid \tau(i) \neq \rho(i)\} \,| \right) \\
&= d_{hamm}(\sigma, \rho) + d_{hamm}(\tau, \rho) \\
&= d_{hamm}(\sigma, \rho) + d_{hamm}(\rho, \tau).
\end{aligned}$$

Damit erfüllt d_{hamm} die Dreiecksungleichung, also ist d_{hamm} eine Metrik auf $\mathrm{Sym}(d)$. Es bleibt zu zeigen, dass d_{hamm} bi-invariant ist. Dazu seien $\sigma, \tau, \beta \in \mathrm{Sym}(d)$. Da β bijektiv ist, bekommen wir

$$\{i \in d \mid \beta\sigma(i) \neq \beta\tau(i)\} = \{i \in d \mid \sigma(i) \neq \tau(i)\}\,.$$

Damit folgt, dass

$$\begin{aligned}
d_{hamm}(\beta\sigma, \beta\tau) &= \frac{1}{d} |\, \{i \in d \mid \beta\sigma(i) \neq \beta\tau(i)\} \,| \\
&= \frac{1}{d} |\, \{i \in d \mid \sigma(i) \neq \tau(i)\} \,| \\
&= d_{hamm}(\sigma, \tau)
\end{aligned}$$

Also ist d_{hamm} links-invariant. Andererseits gilt aber auch, dass

$$\{i \in d \mid \sigma\beta(i) \neq \tau\beta(i)\} = \beta^{-1} \left(\{i \in d \mid \sigma(i) \neq \tau(i)\} \right),$$

woraus folgt, dass

$$
\begin{aligned}
d_{hamm}(\sigma\beta, \tau\beta) &= \frac{1}{d} |\, \{i \in d \mid \sigma\beta(i) \neq \tau\beta(i)\} \,| \\
&= \frac{1}{d} |\beta^{-1} \left(\{i \in d \mid \sigma(i) \neq \tau(i)\}\right) | \\
&= \frac{1}{d} |\, \{i \in d \mid \sigma(i) \neq \tau(i)\} \,| \\
&= d_{hamm}(\sigma, \tau).
\end{aligned}
$$

Somit ist d_{hamm} auch rechts-invariant. □

Definition 3.4. Sei $d \in \omega$. Die bi-invariante Metrik d_{hamm} heißt die *(normierte) Hammingmetrik* auf $Sym(d)$.

Definition 3.5. Seien $k, d_1, \ldots, d_k \in \omega$. Wir setzen $D_i := \{1, 2, \ldots, d_i\}$ für $i = 1, \ldots, k$. Wir betrachten das kartesische Produkt $D = D_1 \times \cdots \times D_k$ und definieren den Gruppenhomomorphismus $\Phi\colon \prod_{i=1}^k \mathrm{Sym}(D_i) \to \mathrm{Sym}(D)$ durch $\Phi(\alpha)(j) = (\alpha_1(j_1), \alpha_2(j_2), \ldots, \alpha_k(j_k))$ für alle $j = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ mit $j_i \in D_i,\ i = 1, \ldots, k$ und $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \prod_{i=1}^k \mathrm{Sym}(D_i)$.

Proposition 3.6. *Mit obiger Notation bekommen wir*

$$
d_{hamm}(\Phi(\alpha), \Phi(\beta)) = 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - d_{hamm}(\alpha_i, \beta_i)) \tag{3.4}
$$

für alle $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq k}$ und $\beta = (\beta_i)_{1 \leq i \leq k}$ in $\prod_{i=1}^k \mathrm{Sym}(D_i)$.

Beweis. Es gilt, wenn $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq k} \in \prod_{i=1}^k \mathrm{Sym}(D_i)$, dann haben wir $\mathrm{Fix}(\Phi(\alpha)) = \prod_{i=1}^k \mathrm{Fix}(\alpha_i)$ und somit gilt

$$
\begin{aligned}
d_{hamm}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Sym}(D)}, \Phi(\alpha)) &= 1 - \frac{\#_{\mathrm{fix}}\Phi(\alpha)}{|D|} \\
&= 1 - \frac{\prod_{i=1}^k \#_{\mathrm{fix}}\alpha_i}{\prod_{i=1}^k |D_i|} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{k} \frac{\#_{\mathrm{fix}}\alpha_i}{|D_i|} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - d_{hamm}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Sym}(D_i)}, \alpha_i)).
\end{aligned}
$$

Folglich gilt für alle $\alpha = (\alpha_i)_{1\leq i\leq k},\ \beta = (\beta_i)_{1\leq i\leq k} \in \prod_{i=1}^k \mathrm{Sym}(D_i)$:

$$\begin{aligned} d_{hamm}(\Phi(\alpha), \Phi(\beta)) &= d_{hamm}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Sym}(D)}, \Phi(\alpha)^{-1}\Phi(\beta)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - d_{hamm}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Sym}(D_i)}, \alpha_i^{-1}\beta_i)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - d_{hamm}(\alpha_i, \beta_i)). \end{aligned}$$

Die erste und letzte Gleichung folgen aus der Links-Invarianz von d_{hamm}. $\square$

Korollar 3.7. *Seien $k, d \in \omega$. Setze $D := \{1, \ldots, d\}$. Betrachte den Homomorphismus $\Psi\colon \mathrm{Sym}(D) \to \mathrm{Sym}(D^k)$ definiert durch $\Psi(\alpha)(j_1, j_2, \ldots, j_k) = (\alpha(j_1), \alpha(j_2), \ldots, \alpha(j_k))$ für alle $\alpha \in \mathrm{Sym}(D)$ und $j_1, j_2, \ldots, j_k \in D$. Dann gilt*

$$d_{hamm}(\Psi(\alpha), \Psi(\beta)) = 1 - (1 - d_{hamm}(\alpha, \beta))^k$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(D)$.

Bemerkung 3.8. Als Spezialfälle betrachte wir die k-fache disjunkte Vereinigung und das k-fache direkte Produkt. Sei $k \in \omega$, dann identifizieren wir die *k-fache disjunkte Vereinigung* $\coprod^k\{1, 2, \ldots, d\}$ mit der Menge $\{1, 2, \ldots, kd\}$ und das *k-fache direkte Produkt* $\prod^k\{1, 2, \ldots, d\}$ mit der Menge $\{1, 2, \ldots, d^k\}$. Dies induziert die Homomorphismen $\coprod^k\colon \mathrm{Sym}(d) \to \mathrm{Sym}(kd)$ und $\prod^k\colon \mathrm{Sym}(d) \to \mathrm{Sym}(d^k)$. Für die Anzahl der Fixpunkte gilt analoges, wie im Beweis der Prop 3.6:

$$\#_{\mathrm{fix}}(\coprod^k \alpha) = k \cdot \#_{\mathrm{fix}}\alpha \quad \text{und} \quad \#_{\mathrm{fix}}(\prod^k \alpha) = (\#_{\mathrm{fix}}\alpha)^k$$

für alle $k \in \omega$ und $\alpha \in \mathrm{Sym}(d)$.

3.2 Sofische Gruppen

Definition 3.9. Eine Gruppe Γ heißt *sofisch*, wenn für jede reelle Zahl $0 < \varepsilon < 1$ und jede endliche Teilmenge $F \subseteq \Gamma$ eine natürliche Zahl n existiert und eine Abbildung $\varphi_n\colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(n)$, die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $\#_{\mathrm{fix}}(\varphi_n(e)\varphi_n(f)\varphi_n(ef)^{-1}) \geq (1 - \varepsilon)n$ für je zwei Elemente $e, f \in F$.

(ii) $\varphi_n(1) = 1$.

(iii) $\#_{\mathrm{fix}}\varphi_n(e) \leq \varepsilon n$ für jedes $1 \neq e \in F$.

(Eine Abbildung, die diese Bedingungen erfüllt, heißt auch (F,ε)-*beinahe Homomorphismus.*)

Lemma 3.10. *Untergruppen sofischer Gruppen sind wieder sofisch.*

Beweis. Sei Γ eine sofische Gruppe und H eine Untergruppe von G. Sei $F \subseteq H$ endlich und $\varepsilon > 0$. Da Γ sofisch ist, existiert ein (F,ε)-beinahe Homomorphismus $\varphi\colon G \to \mathrm{Sym}(n)$. Die Einschränkung auf die Untergruppe H ist wieder ein (F,ε)-beinahe Homomorphismus. Somit ist H ebenfalls sofisch. $\square$

Bemerkung 3.11. Endliche Gruppen und residuell amenable Gruppen sind sofisch. Außerdem ist die Klasse der sofischen Gruppen abgeschlossen unter den folgenden Konstruktionen:

- direkte Produkte, inverse Limites, direkte Limites, freie Produkte,
- Erweiterungen durch amenable Gruppen: Wenn $N \triangleleft G$, N sofisch und G/N amenabel ist, dann ist G sofisch.

Beweis. Siehe Elek und Szabó [ES06]. $\square$

3.3 Universell sofische Gruppen

Wir zeigen im Folgenden, dass es eine weitere Definition von sofischen Gruppen über Ultraprodukte gibt, die äquivalent zu obiger Definition ist. Hierbei kommt es nicht auf die Wahl des Ultrafilters an. Damit sind wir in der Lage zu beweisen, dass sofische Gruppen in beliebige Ultraprodukte über symmetrischen Gruppen eingebettet werden können.

Definition 3.12. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer Menge I und $\tau\colon I \to \omega$ eine Funktion mit der Eigenschaft $\lim_{\mathcal{U}} \tau = \infty$. Wir betrachten das direkte Produkt $\prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$ und für Elemente $\tilde{\pi} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$ und Indizes $i \in I$ bezeichnet $\tilde{\pi}(i) \in \mathrm{Sym}(\tau(i))$ die i-te Komponente von $\tilde{\pi}$. Wir definieren den *Anteil der t-Zykel* und den *Anteil der Fixpunkte* von $\tilde{\pi}$ durch die Formeln:

$$\#_t\tilde{\pi} = \lim_{\mathcal{U}} \frac{\#_t\tilde{\pi}(i)}{\tau(i)} \quad \text{und} \quad \#_{\text{fix}}\tilde{\pi} = \lim_{\mathcal{U}} \frac{\#_{\text{fix}}\tilde{\pi}(i)}{\tau(i)}.$$

Wir definieren hierüber die *Quotientengruppe*:

$$S_{\mathcal{U},\tau} = \prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i)) \Big/ \left\{ \tilde{\pi} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i)) \mid \#_{\text{fix}}\tilde{\pi} = 1 \right\}.$$

Für Elemente $\pi \in S_{\mathcal{U},\tau}$ wählen wir einen Repräsentanten $\tilde{\pi} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$ und definieren den Anteil der t-Zykel und der Fixpunkte, über $\#_t\pi = \#_t\tilde{\pi}$ und $\#_{\text{fix}}\pi = \#_{\text{fix}}\tilde{\pi}$.

Bemerkung 3.13. In der nächsten Proposition zeigen wir, dass dies wohldefiniert ist. Die so entstandene Quotientengruppe heißt auch universell sofische Gruppe und ist gerade das metrische Ultraprodukt über den $\mathrm{Sym}(\tau(n))$, welches wir in Kapitel 2.4 eingeführt haben.

Sei $\mathcal{N} := \left\{\tilde{\pi} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i)) \mid \#_{\mathrm{fix}}\tilde{\pi} = 1\right\}$.

Proposition 3.14. *Seien $I, \mathcal{U}, \tau$ wie in der vorigen Definition gewählt. Dann gilt:*

1. *Die Untergruppe $\mathcal{N}$ von dem Produkt $\prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$ ist ein Normalteiler, also ist $S_{\mathcal{U},\tau}$ wohldefiniert.*

2. *Der Anteil der t-Zykel und Fixpunkte eines Elementes $\pi \in S_{\mathcal{U},\tau}$ hängt nicht von den gewählten Repräsentanten $\tilde{\pi}$ ab. Somit ist $\#_t\pi$ und $\#_{\mathrm{fix}}\pi$ wohldefiniert auf $S_{\mathcal{U},\tau}$.*

3. *Die Funktion $\#_t$ ist eine konjugationsinvariante Funktion auf $S_{\mathcal{U},\tau}$ und $\sum_{t=1}^{\infty} t\cdot\#_t\pi \leq 1$ für alle Elemente $\pi \in S_{\mathcal{U},\tau}$. Des Weiteren gilt, wenn P_t eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen ist, die $\sum_{t=1}^{\infty} t \cdot P_t \leq 1$ erfüllt, dann existiert ein Element $\pi \in S_{\mathcal{U},\tau}$, dass $\#_t\pi = P_t$ für alle t erfüllt.*

4. *Die Konjugationsklassen von $S_{\mathcal{U},\tau}$ sind durch ihre $\#_t$ Invarianten eindeutig bestimmt, das heißt Elemente $\pi, \rho \in S_{\mathcal{U},\tau}$ sind genau dann konjugiert, wenn $\#_t\pi = \#_t\rho$ für alle t.*

5. *Jede nicht-triviale Konjugationsklasse erzeugt die Gruppe $S_{\mathcal{U},\tau}$. Folglich ist es eine einfache Gruppe. Daraus folgt dann, dass $\mathcal{N}$ ein maximaler Normalteiler ist.*

Beweis von 1. und 2. Die Anzahl der t-Zykel ist eine konjugationsinvariante Funktion auf der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(d)$, folglich sind $\#_t$ und $\#_{\mathrm{fix}}$ konjugationsinvariante Funktionen auf $\prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$. Für Permutationen $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(d)$ sind solche t-Zykel von α, die vollständig in der Fixpunktmenge von β liegen, ebenfalls t-Zykel der Komposition $\alpha\beta$, also ist $\#_t(\alpha\beta) \geq \#_t\alpha + \#_{fix}\beta - d$. Folglich ist $\#_t(\tilde{\pi}\tilde{\rho}) \geq \#_t\tilde{\pi} + \#_{\mathrm{fix}}\tilde{\rho} - 1$ für alle $\tilde{\rho}, \tilde{\pi} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$. Damit ist $\mathcal{N}$ ein Normalteiler und für alle $\tilde{\rho} \in \mathcal{N}$ und alle $\tilde{\pi} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$ gilt

$$\begin{aligned}\#_t(\tilde{\pi}\tilde{\rho}) &\geq \#_t\tilde{\pi} + \#_{\mathrm{fix}}\tilde{\rho} - 1 = \#_t\tilde{\pi} = \#_t(\tilde{\pi}\tilde{\rho}\tilde{\rho}^{-1}) \\ &\geq \#_t(\tilde{\pi}\tilde{\rho}) + \#_{\mathrm{fix}}\tilde{\rho}^{-1} - 1 = \#_t(\tilde{\pi}\tilde{\rho}).\end{aligned}$$

Also gilt $\#_t(\tilde{\pi}\tilde{\rho}) = \#_t\tilde{\pi}$. Damit gilt dann, dass der Anteil der t-Zykel und der Anteil der Fixpunkte wohldefiniert auf $\prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))/\mathcal{N} = S_{\mathcal{U},\tau}$ ist. □

Beweis von 3. Da $\#_t$ und $\#_{\text{fix}}$ konjugationsinvariante Funktionen auf der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(\tau(i))$ sind, sind sie ebenfalls konjugationsinvariante Funktionen auf $\prod_{i\in I}\mathrm{Sym}(\tau(i))$. Mit 1. und 2. folgt, dass dies ebenfalls für $S_{\mathcal{U},\tau}$ gilt. Es ist bekannt, dass für $\alpha \in \mathrm{Sym}(d)$ gilt, dass $\sum_{t=1}^{\infty} t\cdot \#_t\alpha = d$ ist, daraus folgt $\sum_{t=1}^{\infty} t\cdot \#_t\pi \leq 1$ für alle $\pi \in S_{\mathcal{U},\tau}$. (Beachte, dass lim endlich additiv und monoton ist, aber nicht unendlich additiv.) Sei nun P_t eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen, so dass $\sum_{t=1}^{\infty} t\cdot P_t \leq 1$ ist. Für jeden Index $i \in I$ bilden wir eine Permutation $\pi_i \in \mathrm{Sym}(\tau(i))$, die für jedes t aus $\lfloor P_t \cdot \tau(i)\rfloor$-vielen disjunkten t-Zykel besteht. (Hierbei steht $\lfloor x\rfloor$ für den "ganzen-Zahl-Teil" der reellen Zahl x.) Die restlichen Elemente von $\{1, 2, \ldots, \tau(i)\}$ sollen einen weiteren Zykel bilden (wenn es welche gibt). Setze $\tilde{\pi} = (\pi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathrm{Sym}(\tau(i))$. Bezeichne π das Bild von $\tilde{\pi}$ in $S_{\mathcal{U},\tau}$. Die Anzahl der t-Zykel jedes π_i's liegt zwischen $P_t\cdot\tau(i) - 1$ und $P_t\cdot\tau(i)+1$. Es gilt $\lim_{\mathcal{U}} 1/\tau(i) = 0$. Damit folgt $\#_t\pi = P_t$ für alle t. □

Beweis von 4. Seien $\pi, \rho \in S_{\mathcal{U},\tau}$ Elemente mit $\#_t\pi = \#_t\rho$ für alle t. Wir zeigen, dass solche Elemente zueinander konjugiert sind. Wähle als erstes Repräsentanten $\tilde{\pi}, \tilde{\rho} \in \prod_{i\in I}\mathrm{Sym}(\tau(i))$. Für jeden Index $i \in I$ und jede natürliche Zahl t sei $p(t,i) = \min(\#_t\tilde{\pi}(i), \#_t\tilde{\rho}(i))$, dann gilt

$$\#_t\pi = \#_t\rho = \lim_{\mathcal{U}} p(t,i) \tag{3.5}$$

für alle t. Für jeden Index $i \in I$ teilen wir die Zykel von $\tilde{\pi}(i)$ in zwei Gruppen. Sei $P(i)$ eine beliebige Familie von Zykel, für die gilt, dass der Anteil an t-Zykel genau $p(t,i)$ für alle t beträgt. Ferner sei $E(i)$ die Familie von Zykel, die nicht in $P(i)$ vorkommen. Wir behaupten, dass

$$\lim_{\mathcal{U}} \frac{|E(i)|}{\tau(i)} = 0. \tag{3.6}$$

Sei $e(t,i)$ die Zahl der t-Zykel in $E(i)$. Dann gilt

$$\lim_{\mathcal{U}} \frac{e(t,i)}{\tau(i)} = \lim_{\mathcal{U}} \frac{\#_t\tilde{\pi}(i) - p(t,i)}{\tau(i)} = 0$$

nach Gleichung (3.5) und $\sum_{t\geq T} e(t,i) \leq \tau(i)/T$. Zusammengesetzt ergibt dies

$$\lim_{\mathcal{U}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{e(t,i)}{\tau(i)} = \sum_{t<T} \lim_{\mathcal{U}} \frac{e(t,i)}{\tau(i)} + \lim_{\mathcal{U}} \sum_{t\geq T} \frac{e(t,i)}{\tau(i)} \leq \frac{1}{T}$$

für alle $T > 0$. Damit ist Gleichung (3.6) bewiesen.
Wähle ein Element aus dem Träger jedes Zykel in $E(i)$. Sei $\varepsilon_i \in \mathrm{Sym}(\tau(i))$

ein $|E(i)|$-Zykel der gewählten Elemente und $\tilde{\varepsilon} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$ das direkte Produkt dieser ε_i. Aus (3.6) folgt $\#_{\text{fix}}\tilde{\varepsilon} = 1$, folglich ist das Element $\tilde{\pi}' = \tilde{\varepsilon}\tilde{\pi} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$ ein weiterer Repräsentant von π. Aus der Konstruktion folgt, dass die Zykel von $\tilde{\pi}'(i)$ Zykel in $P(i)$ sind und eventuell existiert ein extra Zykel aus den verbliebenen $\tau(i) - \sum_t p(t,i)$ Elementen von $\{1, 2, \ldots, \tau(i)\}$. (Wenn keine Elemente übrig bleiben, dann gibt es diesen Zykel nicht.) Genauso können wir $\tilde{\rho}$ durch einen anderen Repräsentanten $\tilde{\rho}' \in S_{\mathcal{U},\tau}$ ersetzen, der die Eigenschaft hat, das $p(t,i)$-viele t-Zykel für jedes t existieren und eventuell ein extra Zykel aus den übrigen $\tau(i) - \sum_t p(t,i)$ Elementen. Aber dann haben $\tilde{\pi}'$ und $\tilde{\rho}'$ dieselbe Anzahl t-Zykel für jedes t, also sind sie in $\mathrm{Sym}(\tau(i))$ konjugiert. Folglich sind $\tilde{\pi}'$ und $\tilde{\rho}'$ in $\prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$ konjugiert, also sind π und ρ konjugiert in $S_{\mathcal{U},\tau}$. □

Beweis von 5. Hierfür brauchen wir zwei Hilfslemmata:

Lemma 3.15. *Sei $n > 5$ und σ ein Element von $\mathrm{Alt}(n)$, $\sigma \neq 1$. Habe σ einen Orbit der Länge 2 und sei $n - 2r \geq -1$, wobei r die Anzahl der Orbits von σ ist. Dann ist $C_\sigma^4 = \mathrm{Alt}(n)$, wobei C_σ die Konjugationsklasse von σ ist.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 2.42. □

Lemma 3.16. *Sei $\sigma \in \mathrm{Alt}(n)$. Habe σ einen Orbit der Länge 2. Sei $T = n - \#_{\text{fix}}(\sigma)$. Dann $C_\sigma^{8\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} = \mathrm{Alt}(n)$.*

Beweis. Wir machen eine Fallunterscheidung nach der Größe von T.
Wenn $\frac{n}{2} \leq T < n$ gilt, dann enthält C_σ^4 nach Lemma 3.15 ein Element σ_1, das genau $n - T$ Elemente bewegt und die komplette Fixpunktmenge von σ fest lässt. Daher gilt für ein $a \in \mathrm{Alt}(n)$, dass $\sigma a \sigma_1 a^{-1}$ keinen Fixpunkt hat. Somit ist $C_\sigma^8 = \mathrm{Alt}(n)$.
Wenn $T < \frac{n}{2}$ ist, dann existieren $\lfloor \frac{n}{T} \rfloor$ Konjugierte von σ, so dass diese paarweise disjunkte Teilmengen bewegen. Das Produkt dieser Elemente hat folglich weniger als $\frac{n}{2}$ Fixpunkte. Mit dem vorigem Argument folgt somit, dass $C_\sigma^{8\lfloor \frac{n}{T} \rfloor} = \mathrm{Alt}(n)$. □

Wir sind nun in der Lage 5. zu beweisen. Sei $1 \neq \pi \in S_{\mathcal{U},\tau}$. Dann hat π einen Repräsentanten $\tilde{\pi} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$, so dass für alle $i \in I$ gilt, dass $\frac{\tau(i)}{\tau(i) - \#_{\text{fix}}\tilde{\pi}_i} < C$, wobei C nicht von i abhängt. Sei $\rho \in S_{\mathcal{U},\tau}$ ein beliebiges Element. Dann hat es einen Repräsentanten $\tilde{\rho}$, so dass alle seine Komponenten gerade Permutationen sind. Dies stellt sicher, dass die Gruppe beschränkt erzeugt wird. Mit Lemma 3.16 folgt, dass ρ in dem von π erzeugten Normalteiler liegt. □

Satz 3.17. *Die Gruppen $S_{\mathcal{U},\tau}$ sind sofisch für alle Wahlen von $I, \tau, \mathcal{U}$.*

Beweis. Sei $F \subseteq S_{\mathcal{U},\tau}$ eine endliche Teilmenge und sei $0 < \varepsilon < 1$. Wir werden zeigen, dass ein $n \in \omega$ und ein (F, ε)-beinahe Homomorphismus $\varphi\colon S_{\mathcal{U},\tau} \to \mathrm{Sym}(\tau(n))$ existiert. Für jedes Element $\pi \in S_{\mathcal{U},\tau}$ wählen wir einen Repräsentanten $\tilde{\pi} \in \prod_{i \in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$ und stellen sicher, dass $\tilde{1} = 1$ ist. Sei $0 < \xi < 1$ eine reelle Zahl (wie die Wahl erfolgen soll, erläutern wir später). Für alle $\pi, \rho, \sigma \in S_{\mathcal{U},\tau},\ \sigma \neq 1$ gehören die Teilmengen

$$A(\pi, \rho) = \left\{ i \in I \mid \#_{\text{fix}} \left(\tilde{\pi}(i)\tilde{\rho}(i)\widetilde{\pi\rho}(i)^{-1} \right) > (1 - \xi)\tau(i) \right\},$$

$$C(\sigma) = \left\{ i \in I \mid \#_{\text{fix}}\tilde{\sigma}(i) < \frac{\#_{\text{fix}}\sigma + 1}{2}\tau(i) \right\} \quad (\sigma \neq 1)$$

zum Ultrafilter $\mathcal{U}$. Für $A(\pi, \rho)$ ist dies der Fall, da für beliebige Elemente $\pi, \rho \in F$ gilt, dass $\tilde{\pi}\tilde{\rho}\mathcal{N} = \widetilde{\pi\rho}\mathcal{N}$ und somit im Ultralimes ihr Abstand 0 beträgt, $d_{hamm}(\tilde{\pi}\tilde{\rho}, \widetilde{\pi\rho}) = 0$. Damit hat jede endliche Familie dieser Mengen einen nicht-leeren Schnitt. Wir können also einen Index $j \in I$ wählen, so dass

$$j \in \left(\bigcap_{\pi,\rho \in F} A(\pi, \rho) \right) \cap \left(\bigcap_{1 \neq \sigma \in F} C(\sigma) \right) \tag{3.7}$$

Wähle $n_1 = \tau(j)$ und definiere die Funktion $\psi_1\colon S_{\mathcal{U},\tau} \to \mathrm{Sym}(n_1)$ durch die Formel $\psi_1(\pi) = \tilde{\pi}(j)$ und die Konstante $\delta = \max\left\{ \frac{\#_{\text{fix}}\sigma + 1}{2} \mid 1 \neq \sigma \in F \right\}$. Hierbei hängt δ nur von F ab, nicht von ξ. Damit hat ψ_1 die folgenden Eigenschaften:

(i') $\#_{\text{fix}} \left(\psi_1(\pi)\psi_1(\rho)\psi_1(\pi\rho)^{-1} \right) \geq (1 - \xi)n_1$ für je zwei Elemente $\pi, \rho \in F$.

(ii') $\psi_1(1) = 1$.

(iii') $\#_{\text{fix}}\psi_1(\sigma) \leq \delta n_1$ für alle $1 \neq \sigma \in F$.

Um einen (F, ε)-beinahe Homomorphismus zu bekommen, amplifizieren wir ψ_1 so oft wie nötig, um den gewünschten Abstand zweier Elemente zu bekommen. Amplifizieren bedeutet hier, dass wir F diagonal in die Gruppe der Permutationen der Quadrate mit Hilfe des oben definierten Homomorphismus $\prod^k$ einbetten. Definiere also für alle $k \in \omega, n_k = n_1^k$ und schreibe $\psi_k\colon S_{\mathcal{U},\tau} \to \mathrm{Sym}(n_k)$ für die Komposition von ψ_1 mit dem Homomorphismus $\prod^k\colon \mathrm{Sym}(n_1) \to \mathrm{Sym}(n_k)$ aus Bemerkung 3.8. Dann hat ψ_k die folgenden Eigenschaften:

(i") $\#_{\text{fix}} \left(\psi_k(\pi)\psi_k(\rho)\psi_k(\pi\rho)^{-1} \right) \geq (1 - \xi)^k n_k$ für $\pi, \rho \in F$.

(ii") $\psi_k(1) = 1$.

(iii") $\#_{\text{fix}}\psi_k(\sigma) \leq \delta^k n_k$ für alle $1 \neq \sigma \in F$.

Kommen wir nun zu der Wahl von ξ. Wähle k so groß, dass $\delta^k < \varepsilon$ und ξ genügend klein, dass $(1-\xi)^k > 1-\varepsilon$. Mit diesen Wahlen implizieren die Bedingungen (i")(ii")(iii") die Bedingungen (i)(ii)(iii) aus Definition 3.9. Somit ist $S_{\mathcal{U},\tau}$ eine sofische Gruppe. □

Jetzt können wir zeigen, dass die Definition sofischer Gruppen in äquivalenter Weise über Ultraprodukte geschehen kann.

Satz 3.18. *Sei Γ eine abzählbare Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Γ ist sofisch.*
2. *Es existiert ein injektiver Homomorphismus $\Gamma \to S_{\mathcal{U},\tau}$ für eine Indexmenge der Kardinalität höchstens $|\Gamma|$ und geeignete Wahlen von τ und $\mathcal{U}$.*

Beweis. Die Rückrichtung ist klar, da nach Satz 3.17 $S_{\mathcal{U},\tau}$ sofisch ist und nach Lemma 3.10 Untergruppen sofischer Gruppen wieder sofisch sind.

Gelte 1., d.h. sei Γ sofisch. Für endliche Γ folgt die Behauptung direkt.
Sei Γ also eine unendliche sofische Gruppe. Definiere als Indexmenge

$$I = \{(F,\varepsilon) \mid F \subseteq \Gamma \text{ endlich, } \varepsilon \in (0,1) \text{ rational}\}$$

und für jeden Index $(H,\delta) \in I$ definieren wir die Teilmenge

$$I_{(H,\delta)} = \{(F,\varepsilon) \in I \mid H \subseteq F \text{ und } \varepsilon \leq \delta\} \subseteq I.$$

Diese ist nicht leer, da immer $(H,\delta) \in I_{(H,\delta)}$. Die Familie nicht-leerer Teilmengen $\big(I_{(H,\delta)} \mid (H,\delta) \in I\big)$ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft, da

$$I_{(H_1,\delta_1)} \cap I_{(H_2,\delta_2)} = I_{(H_1 \cup H_2, \min\{\delta_1,\delta_2\})}$$

für alle $(H_1,\delta_1),(H_2,\delta_2) \in I$. Also existiert nach Satz 2.4 ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I, der alle Teilmengen $I_{(H,\delta)}$ enthält. Für jeden Index $i = (F,\varepsilon) \in I$ wählen wir eine natürliche Zahl $\tau(i)$ und eine Funktion $\varphi_i\colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(\tau(i))$, die die Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 3.9 erfüllt. Nach Definition gilt $\lim_{\mathcal{U}} \varepsilon = 0$.
Komponiere φ_i mit dem Homomorphismus $\coprod^k\colon \mathrm{Sym}(\tau(i)) \to \mathrm{Sym}(k \cdot \tau(i))$ für k groß genug. Dann können wir die Bedingung $\lim_{\mathcal{U}} \tau(i) = \infty$ erfüllen und die Bedingungen (i)-(iii) behalten ihre Gültigkeit.
Betrachte das direkte Produkt der Funktionen φ_i. Dann erhalten wir eine

Funktion $\tilde{\varphi}\colon \Gamma \to \prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i))$ und komponieren diese mit der Quotientenabbildung $\prod_{i\in I} \mathrm{Sym}(\tau(i)) \to S_{\mathcal{U},\tau}$. Damit bekommen wir die Funktion $\varphi\colon \Gamma \to S_{\mathcal{U},\tau}$. Wir müssen noch zeigen, dass dies ein injektiver Homomorphismus ist. Aus Definition 3.9(i) folgt

$$\#_{\text{fix}}\left(\varphi(e)\varphi(f)\varphi(ef)^{-1}\right) = \lim_{\mathcal{U}} \#_{\text{fix}}\left(\varphi_i(e)\varphi_i(f)\varphi_i(ef)^{-1}\right) \geq \lim_{\mathcal{U}} (1-\varepsilon) = 1$$

für alle $e, f \in \Gamma$. Also ist $\varphi(e)\varphi(f) = \varphi(ef)$ für alle $e, f \in \Gamma$ und φ somit ein Gruppenhomomorphismus. Aus 3.9(iii) folgt

$$\#_{\text{fix}}\varphi(e) = \lim_{\mathcal{U}} \#_{\text{fix}}\varphi_i(e) \leq \lim_{\mathcal{U}} \varepsilon = 0$$

für alle $1 \neq e \in \Gamma$. Damit ist $\varphi(e) \neq 1$ also φ injektiv. $\square$

Aus dem Beweis folgt, dass das Konzept der sofischen Gruppe nicht von der Wahl der obigen Funktion τ abhängt. Wir setzen o.B.d.A. $\tau\colon \omega \to \omega$ mit $\tau(n) = n$. Im nächsten Satz zeigen wir, dass folgende allgemeinere Aussage gilt:

Satz 3.19. *Eine abzählbare Gruppe Γ ist genau dann sofisch, wenn Γ als Untergruppe in ein metrisches Ultraprodukt über symmetrische Gruppen $\mathrm{Sym}(n)$ für einen beliebigen nicht Hauptultrafilter auf den natürlichen Zahlen eingebettet werden kann.*

Für den Beweis brauchen wir die folgende Aussage:

Satz 3.20. *Sei G eine abzählbare Gruppe. Wir betrachten abzählbare Indexmengen auf denen die Ultrafilter definiert sind. Wenn sich G in ein metrisches Ultraprodukt über symmetrischen Gruppen einbetten lässt, dann in jedes.*

Beweis. Sei $\varphi\colon G \to S_{\mathcal{U}}$ eine Einbettung von G in ein metrisches Ultraprodukt. Sei $p(x_1, \dots)$ der quantorenfreie Typ der Gruppe in abzählbar vielen Variablen. Dann ist die Realisierung dieses Typs eine Einbettung von G. Da wir nur abzählbare Sprachen und Ultrafilter auf abzählbaren Mengen betrachten, sind diese immer abzählbar unvollständig und somit folgt mit Satz 2.71, dass das metrische Ultraprodukt $S_{\mathcal{U}}$ ω_1-saturiert ist. Es gilt:

$$S_{\mathcal{U}} \models p \Leftrightarrow S_{\mathcal{U}} \models q \text{ für alle endlichen Teilmengen } q \subseteq p.$$

Seien $a_k = ((a_i^k)_{i\in I})_{\mathcal{U}}$ Elemente aus dem metrischen Ultraprodukt für $k = 1, \dots, n$. Dann gilt nach dem Fundamentalsatz 2.64

$$\varphi^{S_{\mathcal{U}}}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{\mathcal{U}} \varphi^{\mathrm{Sym}(i)}\left(a_i^1, \dots, a_i^n\right)$$

für alle $\mathcal{L}$-Formeln φ. Wenn G in ein metrisches Ultraprodukt einbettbar ist, dann gilt aber für jede endliche Teilmenge q von p, dass alle Sätze daraus schon gleichzeitig in allen bis auf endlich vielen $\mathrm{Sym}(n)$ erfüllt werden können, da $\mathrm{Sym}(n) \subseteq \mathrm{Sym}(n+1) \subseteq \dots$, das heißt $\varphi^{\mathrm{Sym}(i)}(a_i^1, \dots, a_i^n)$ gilt auf einer koendlichen Menge. Sei $\mathcal{D}$ ein beliebiger nicht Hauptultrafilter auf ω, dann gilt für $a_k = ((a_i^k)_{i \in I})_{\mathcal{D}}$

$$\varphi^{S_{\mathcal{D}}}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{\mathcal{D}} \varphi^{\mathrm{Sym}(i)}\left(a_i^1, \dots, a_i^n\right) \text{ für alle } \varphi \in q,$$

da die Menge der koendlichen Mengen in jedem Ultrafilter enthalten ist. Wenn p in $\prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Sym}(n)/\mathcal{N}$ endlich erfüllbar ist, dann ist wiederum nach dem Kompaktheitssatz p in $\prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Sym}(n)/\mathcal{N}$ erfüllbar. Also ist p in jedem metrischen Ultraprodukt von $\mathrm{Sym}(n)$ realisierbar. Damit folgt die Behauptung. □

Beweis 3.19. Sei Γ eine abzählbare sofische Gruppe. Der Satz 3.18 liefert uns eine Einbettung in ein metrisches Ultraprodukt über einem passend konstruierten Ultrafilter. Mit dem vorigen Satz 3.20 wissen wir, dass wir abzählbare Gruppen in jedes beliebige Ultraprodukt von $\mathrm{Sym}(n)$'s einbetten können, wenn wir es nur in ein Ultraprodukt von $\mathrm{Sym}(n)$'s einbetten können. Damit folgt die Behauptung. □

Anstelle die Ultraproduktkonstruktion über eine Folge von Gruppen zu betrachten, können wir auch Aussagen über die Ultrapotenzkonstruktion einer einzelnen Gruppe treffen. Das folgende Resultat stammt aus [Pes08] und folgt direkt aus den zuvor bewiesenen Sätzen.

Korollar 3.21. *Sei G eine Gruppe, versehen mit einer bi-invarianten Metrik d, die eine aufsteigende Kette von Untergruppen enthält, die isomorph zu* $\mathrm{Sym}(n)$*, $n \in \omega$ sind, deren Vereinigung ist dicht in G und die Einschränkung von d auf Sym(n) ist der normierte Hammingabstand. Dann ist eine Gruppe Γ genau dann sofisch, wenn Γ als Untergruppe in eine passend gewählte Ultrapotenz von G eingebettet werden kann.*

4 Anzahl universell sofischer Gruppen

4.1 Die Anzahl, wenn CH gilt

Der Artikel von Thomas [Tho10] behandelt die Anzahl universell sofischer Gruppen. In diesem Kapitel gehen wir auf die Anzahl der universell sofischen Gruppen ein, wenn CH gilt. Wir rechnen hier explizit nach, dass $2^{\aleph_0}$-viele Ultraprodukte bis auf elementare Äquivalenz existieren. Den Beweis führen wir analog zu dem für alternierende Gruppen, der im Artikel von Ellis, Schneider, Hatchman und Thomas [EHST08] steht. Die Sätze über die Definierbarkeit von $\mathrm{Sym}(n)$ stammen aus Truss [Tru96].
Da wir nur abzählbare Indexmengen zulassen, betrachten wir von nun an o.B.d.A. die Funktion $\tau\colon \omega \to \omega$ mit $\tau(n) = n$ und erwähnen τ nicht mehr explizit. Wir schreiben für $S_{\mathcal{U},\tau}$ jetzt $S_{\mathcal{U}}$.

Satz 4.1. *Gelte CH. Dann existieren höchstens $2^{\aleph_0}$ viele universell sofische Gruppen $S_{\mathcal{U}}$ bis auf Isomorphie.*

Beweis. Gelte CH, dann sind die algebraischen Ultraprodukte $G_{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathrm{Sym}(n)$ saturiert und folglich durch ihre Theorie der ersten Stufe eindeutig bestimmt. Die Sprachen, die wir betrachten, sind abzählbar und somit existieren höchstens $2^{\aleph_0}$-viele Theorien. Also existieren höchstens $2^{\aleph_0}$-viele algebraische Ultraprodukte bis auf Isomorphie und somit höchstens $2^{\aleph_0}$-viele universell sofische Gruppen bis auf Isomorphie. □

Wir werden in den folgenden Behauptungen und Lemmata zeigen, dass genau $2^{\aleph_0}$-viele Ultraprodukte bis auf elementare Äquivalenz existieren. Mit der Saturiertheit der Modelle folgt, dass schon $2^{\aleph_0}$-viele Ultraprodukte bis auf Isomorphie existieren.

Proposition 4.2. *Es existieren $2^{\aleph_0}$-viele solche Ultraprodukte bis auf elementare Äquivalenz.*

Beweis. Wir definieren für jede Primzahl $p \geq 5$ die Menge

$$D_p = \{n \in \omega \mid n \geq p \text{ und } n \equiv 0, 1 \mod p\}.$$

Behauptung 4.3. *Es existiert ein Satz der ersten Stufe Φ_p, so dass für $n \geq 7$*

$$n \in D_p \Leftrightarrow \mathrm{Sym}(n) \models \Phi_p.$$

Beweis der Behauptung 4.3. Um die Definierbarkeit zu zeigen, brauchen wir zuerst eine Reihe von Lemmata. Wir betrachten die Transpositionen, da diese die symmetrischen Gruppen erzeugen. Aus der Definition von D_p folgt, dass

$n \in D_p$ genau dann, wenn $\mathrm{Sym}(n)$ ein Element der Ordnung p besitzt, das höchstens einen Fixpunkt hat. Diese Eigenschaft ist erster Stufe definierbar, wie wir im Folgenden zeigen. Ein Element $\pi \in \mathrm{Sym}(n)$ der Ordnung $p \geq 5$ besitzt genau dann höchstens einen Fixpunkt, wenn keine Transposition σ existiert, die mit π kommutiert. Zwei Transpositionen $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(n)$ mit $\sigma \neq \tau$ kommutieren genau dann nicht, wenn $|\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau)| = 1$. Wir definieren folgende Ausdrücke:

(i) g ist eine Transposition.

(ii) g_1, g_2 sind Transpositionen, für die $|\operatorname{supp}(g_1) \cap \operatorname{supp}(g_2)| = 1$.

(iii) g_1, g_2, h_1, h_2 sind Transpositionen mit

$$|\operatorname{supp}(g_1) \cap \operatorname{supp}(g_2)| = |\operatorname{supp}(h_1) \cap \operatorname{supp}(h_2)| = 1 \text{ und}$$
$$\operatorname{supp}(g_1) \cap \operatorname{supp}(g_2) = \operatorname{supp}(h_1) \cap \operatorname{supp}(h_2).$$

Für (i) definieren wir die Formel:

$$\mathrm{trans}_1(x) : x \neq 1 \wedge x^2 = 1 \wedge \forall y[(xx^y)^2 = 1 \vee (xx^y)^3 = 1].$$

Lemma 4.4. *Wenn $n \geq 3$ und $n \neq 4, 6$ dann gilt für jedes $g \in \mathrm{Sym}(n)$, dass $\mathrm{Sym}(n) \models \mathrm{trans}_1(g)$ genau dann, wenn g eine Transposition ist.*

Beweis des Lemmas 4.4. Sei g die Transposition $(\alpha\beta)$, dann ist g^h ebenfalls eine, schreibe hierfür $(\gamma\delta)$. Dabei steht g^h für die Konjugation.
Wenn $\{\alpha, \beta\} = \{\gamma, \delta\}$ ist, dann ist $gg^h = 1$. Wenn $\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$ ist, dann hat gg^h die Ordnung 2. Sonst ist $|\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\}| = 1$. Sei $\alpha = \delta$. Dann ist $gg^h = (\alpha\beta\gamma)$ und besitzt Ordnung 3.

Sei umgekehrt $\mathrm{Sym}(n) \models \mathrm{trans}_1(g)$. Dann hat g Ordnung 2, ist also ein Produkt von einem oder mehreren 2-Zykel. Wir nehmen an, dass mindestens zwei Transpositionen $(\alpha\beta)$ und $(\gamma\delta)$ existieren. Da $n \neq 4$, existiert ein $\varepsilon \notin \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Setze $h = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$. Dann schickt gg^h α auf γ auf ε, also muss das Element Ordnung 3 haben, und somit ist ε kein Fixpunkt von g. Wir nehmen weiter an, die Transposition g vertauscht ε und ζ. Da $n \neq 6$ existiert ein weiteres Element η. Sei h diesmal der Zykel $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta)$, gg^h schickt α also auf γ auf ε auf η. Dies ist eine Widerspruch dazu, dass die Ordnung von gg^h 2 oder 3 beträgt. □

Da $\mathrm{trans}_1(\cdot)$ auch für $(12)(34)$ in $\mathrm{Sym}(4)$ gilt, obwohl dies keine Transposition ist, führen wir eine Methode ein, um die Transposition zu unterscheiden.

$$\mathrm{trans}(x) : \mathrm{trans}_1(x) \wedge \exists y[x^y \neq x \wedge (xx^y)^3 = 1].$$

Dies gilt natürlich für alle Transpositionen für $n \geq 3$, ist aber nicht wahr für das Produkt zweier 2-Zykel in $\mathrm{Sym}(4)$.
Für (ii) $|\,\mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{supp}(h)| = 1$ definieren wir die Formel

$$\mathrm{overlap}(x, y) : \mathrm{trans}(x) \wedge \mathrm{trans}(y) \wedge x \neq y \wedge (xy)^3 = 1.$$

Lemma 4.5. *Wenn $n \geq 3$ und $n \neq 6$, dann gilt für alle $g, h \in \mathrm{Sym}(n)$, dass $\mathrm{Sym}(n) \models \mathrm{overlap}(g, h)$ genau dann, wenn g, h Transpositionen sind mit $|\,\mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{supp}(h)| = 1$.*

Beweis des Lemmas 4.5. Sei $g = (\alpha\beta)$ und $h = (\gamma\delta)$. Wenn $\{\alpha, \beta\}$ und $\{\gamma, \delta\}$ sich in einem Punkt schneiden, sei hier $\alpha = \delta$, dann ist $gh = (\alpha\beta)(\gamma\alpha) = (\alpha\beta\gamma)$ und hat Ordnung 3. Wenn sie disjunkt sind, dann hat gh Ordnung 2. $\square$

Da ein Paar von Transpositionen mit nicht-leerem Schnitt, den Punkt im Schnitt "kodiert", müssen wir ausdrücken können, wenn zwei solche Schnitte gleich sind. Um dies zu vereinfachen, benutzen wir eine Hilfsformel:

$$\mathrm{triple}(x, y, z) : \mathrm{overlap}(x, y) \wedge \mathrm{overlap}(x, z) \wedge \mathrm{overlap}(y, z) \wedge x^y \neq z.$$

Damit können wir folgende Formel definieren

$$\begin{aligned}\mathrm{equal}(x_1, y_1, x_2, y_2) : &\mathrm{overlap}(x_1, y_1) \wedge \mathrm{overlap}(x_2, y_2) \\ &\wedge [(x_1 = x_2) \vee (x_1 = y_2) \vee \mathrm{triple}(x_1, x_2, y_2)] \\ &\wedge [(y_1 = x_2) \vee (y_1 = y_2) \vee \mathrm{triple}(y_1, x_2, y_2)].\end{aligned}$$

Lemma 4.6. *Wenn $n \geq 3$ und $n \neq 6$, dann gilt für alle $g, h, k \in \mathrm{Sym}(n)$, dass $\mathrm{Sym}(n) \models \mathrm{triple}(g, h, k)$ genau dann, wenn unterschiedliche $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, \ldots, n\}$ existieren, so dass $g = (\alpha\beta), h = (\alpha\gamma)$ und $k = (\alpha\delta)$.*

Beweise des Lemmas 4.6. Gelte $\mathrm{Sym}(n) \models \mathrm{triple}(g, h, k)$. Nach Lemma 4.5 können wir schreiben $g = (\alpha\beta), h = (\alpha\gamma)$. Wenn $k = (\beta\gamma)$, dann ist $g^h = k$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{supp}(k) = \mathrm{supp}(h) \cap \mathrm{supp}(k) = \{\alpha\}$, wie gewünscht. $\square$

Lemma 4.7. *Wenn $n \geq 3$ und $n \neq 6$, dann gilt für $g_1, h_1, g_2, h_2 \in \mathrm{Sym}(n)$, dass $\mathrm{Sym}(n) \models \mathrm{equal}(g_1, h_1, g_2, h_2)$ genau dann, wenn g_i, h_i alle Transpositionen sind und ein $\alpha \in n$ existiert, so dass $\mathrm{supp}(g_1) \cap \mathrm{supp}(h_1) = \mathrm{supp}(g_2) \cap \mathrm{supp}(h_2) = \{\alpha\}$.*

Beweis des Lemmas 4.7. Wenn $\mathrm{Sym}(n) \models \mathrm{equal}(g_1, h_1, g_2, h_2)$, dann setze $g_1 = (\alpha\beta)$, $h_1 = (\alpha\gamma)$, $g_2 = (\delta\varepsilon)$, $h_2 = (\delta\zeta)$. Wir nehmen $\alpha \neq \delta$ an. Wenn $\mathrm{triple}(h_1, g_2, h_2)$ gilt, dann ist $\delta \in \{\alpha, \beta\}$ und somit $\delta = \beta$. Dann kann $\mathrm{triple}(h_1, g_2, h_2)$ nicht gelten, da sonst $\delta = \gamma$ wäre und somit $h_1 = g_2$ oder $h_1 = h_2$. Dies geht aber beides nicht, da $\beta \notin \{\alpha, \gamma\}$. Analog folgt die Behauptung für $\neg\,\mathrm{triple}(h_1, g_2, h_2)$. Da $(g_1 \neq h_1)$ und $(g_2 \neq h_2)$ gelten, haben wir entweder $(g_1 = g_2) \wedge (h_1 = h_2)$ oder $(g_1 = h_2) \wedge (h_1 = g_2)$. Beide Fälle implizieren aber $\alpha = \delta$. Dies ist ein Widerspruch.

Für die andere Richtung sei $g_1 = (\alpha\beta)$, $h_1 = (\alpha\gamma)$, $g_2 = (\alpha\delta)$, $h_2 = (\alpha\varepsilon)$ mit $\beta \neq \gamma$ und $\delta \neq \varepsilon$. Dann gilt $\mathrm{overlap}(g_1, h_1)$ und $\mathrm{overlap}(g_2, h_2)$. Die Fälle $\beta = \delta, \varepsilon$ und $\beta \notin \{\delta, \varepsilon\}$ entsprechen den Fällen $g_1 = g_2$ und $g_1 = h_2$ bzw. $\mathrm{triple}(g_1, g_2, h_2)$ und genau so gilt das für die letzte Möglichkeit. □

Damit ist die Behauptung 4.3 bewiesen. □

Wir sind jetzt in der Lage, die Proposition 4.2 zu Ende zu beweisen.

Sei $\mathbb{P} = \{p \in \omega \mid p \geq 5 \text{ Primzahl}\}$. Dann genügt es zu zeigen, dass für jede Teilmenge $S \subseteq \mathbb{P}$ die Familie $\mathcal{D}_S = \{D_p \mid p \in S\} \cup \{\omega \setminus D_p \mid p \in \mathbb{P} \setminus S\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt.
Seien $p_1, \ldots, p_l \in S$ und $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{P} \setminus S$ jeweils paarweise verschieden. Nach dem chinesischen Restsatz existiert eine positive Zahl $n \in \omega$, so dass

- $n \equiv 0 \mod p_i$ für alle $1 \leq i \leq l$,
- $n \equiv 2 \mod q_j$ für alle $1 \leq j \leq m$.

Damit finden wir ein $n \in D_{p_1} \cap \cdots \cap D_{p_l} \cap (\omega \setminus D_{q_1}) \cap \cdots \cap (\omega \setminus D_{q_m})$. Die Familie $\mathcal{D}_S$ besitzt somit die endliche Durchschnittseigenschaft für alle $S \subseteq \mathbb{P}$ und folglich gibt es nach Satz 2.4 einen Ultrafilter, der diese Familie enthält. Da $|\mathcal{P}(\mathbb{P})| = 2^{\aleph_0}$, erhalten wir $2^{\aleph_0}$ viele nicht-isomorphe Ultrafilter. Daraus folgt die Behauptung 4.2. □

Vermutung 4.8. Es existieren $2^{\aleph_0}$-viele universell sofische Gruppen bis auf Isomorphie, wenn CH gilt.

4.2 Die Anzahl, wenn CH nicht gilt

Der folgenden Abschnitt orientiert sich an dem Artikel [Tho10] von Thomas, dabei greifen wir für grundlegende Inhalte auf das Buch von Tsuzuku [Tsu82] zurück. Das Ziel ist, die Anzahl universell sofischer Gruppen zu bestimmen, wenn CH nicht gilt. Um dies tun zu können, führen wir als erstes Expandergraphen und ein paar ihrer grundlegenden Eigenschaften ein. Damit zeigen wir, dass bestimmte Ultraprodukte $\prod_{\mathcal{D}} G_n$ über endlichen Gruppen G_n als Zentralisatoren endlich erzeugter Untergruppen geeigneter universell sofischer Gruppen dargestellt werden können.

Satz 4.9. *Wenn CH nicht gilt, dann existieren $2^{2^{\aleph_0}}$-viele universell sofische Gruppen $S_{\mathcal{U}}$ bis auf Isomorphie.*

4.2.1 Expanderfamilien

Definition 4.10. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Für jede Teilmenge $A \subseteq V$ definieren wir den zugehörigen *Kantenrand*

$$\partial A = \{e \in E \mid |e \cap A| = 1\}$$

als Menge aller Kanten, die A verlassen. Ein endlicher Graph Γ heißt ein *ε-Expandergraph* für ein $\varepsilon \in (0,1)$, wenn für jede Teilmenge $A \subsetneq \Gamma$ mit maximaler Größe $|\Gamma|/2$ gilt, dass $|\partial(A)| > \varepsilon|A|$.

Anders ausgedrückt heißt ein endlicher Graph Γ Expander, wenn für jede (nicht zu große) Knotenmenge viele Kanten die Menge verlassen.

Definition 4.11. Die *Expanderkonstante* von Γ ist definiert durch

$$h(\Gamma) = \min\left\{\frac{|\partial A|}{|A|} \mid A \subsetneq V \text{ mit } 1 \leq |A| \leq \frac{|V|}{2}\right\}.$$

Bemerkung 4.12. Wir identifizieren von nun an jeden endlichen Graphen $\Gamma = (V, E)$ mit seiner Knotenmenge V und schreiben $h(V)$ statt $h(\Gamma)$.

Definition 4.13. Ein endlicher Graph V heißt *k-regulär*, wenn jeder Knoten $v \in V$ den Grad k hat.

Definition 4.14. Sei $(V_n \mid n \in \omega)$ eine Familie endlicher zusammenhängender $k-$regulärer Graphen, so dass $|V_m| < |V_n|$ für alle $m < n \in \omega$. Dann heißt $(V_n \mid n \in \omega)$ *Expanderfamilie*, wenn ein $\tau > 0$ existiert, so dass $h(V_n) \geq \tau$ für alle $n \in \omega$.

Definition 4.15. Sei G eine endliche Gruppe und $S \subseteq G \setminus 1$ eine Erzeugermenge. Der zugehörige *Cayleygraph* ist der Graph $\mathrm{Cay}(G, S)$ mit Knotenmenge G und Kantenmenge

$$E = \left\{\{x, y\} \mid y = sx \text{ für ein } s \in S \cup S^{-1}\right\}.$$

Satz 4.16. *Für jedes $n \in \omega$ sei G_n eine endliche Gruppe und $S_n \subseteq G_n$ sei eine Erzeugermenge fester Größe d (für alle n). Wenn $(\mathrm{Cay}(G_n, S_n) \mid n \in \omega)$ eine Expanderfamilie ist, dann existiert zu jedem nicht Hauptultrafilter $\mathcal{D}$ auf ω ein nicht Hauptultrafilter $\mathcal{U}$ auf ω und eine endlich erzeugte Untergruppe $\Gamma \leq S_{\mathcal{U}}$, so dass $C_{S_{\mathcal{U}}}(\Gamma) \cong \prod_{\mathcal{D}} G_n$ gilt.*

Für den Beweis von Satz 4.16 brauchen wir ein paar Vorüberlegungen, daher führen wir den Beweis erst auf Seite 47.

Proposition 4.17. *Sei V ein endlicher zusammenhängender k-regulärer Graph und $h(V) \geq \tau$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta = \varepsilon\tau/(\tau + k)$. Dann existiert für jeden Teilgraph $Y \subseteq V$ mit $|Y| \geq (1 - \delta)|V|$ ein zusammenhängender Teilgraph $Z \subseteq Y$ mit $|Z| \geq (1 - \varepsilon)|V|$.*

Beweis. Sei $Y \subseteq V$ ein Teilgraph mit $|Y| \geq (1 - \delta)|V|$ und seien $C_1, \ldots, C_t$ die Zusammenhangskomponenten von Y mit $|C_i| \leq \frac{1}{2}|V|$ für jedes $1 \leq i \leq t$. Betrachte die Menge

$$P = \left\{(v, e) \mid e \in \bigcup_{i=1}^{t} \partial C_i \text{ und } v \in \ e \backslash Y \right\}.$$

Es gilt, wenn $e \in \bigcup_{i=1}^{t} \partial C_i$, dann ist $|e \cap Y| = 1$. Folglich ist

$$|P| = \sum_{i=1}^{t} |\partial C_i| \geq \tau \sum_{i=1}^{t} |C_i|.$$

Wir wissen ebenfalls, dass:

$$|P| \leq k|V \setminus Y| \leq k\delta|V|.$$

Daraus folgt, dass

$$\tau \sum_{i=1}^{t} |C_i| \leq k\delta|V|$$

und somit gilt

$$|V \setminus Y| + \sum_{i=1}^{t} |C_i| \leq \delta|V| + \frac{k\delta}{\tau}|V| = \varepsilon|V|.$$

Damit besitzt Y eine Zusammenhangskomponente Z mit $|Z| \geq (1-\varepsilon)|V|$. $\square$

4.2.2 Zentralisatoren und Permutationsdarstellungen

In dem Beweis von Satz 4.9 brauchen wir zusätzlich die Notation der links- und rechtsregulären Permutationsdarstellungen einer endlichen Gruppe. Wir werden deshalb einen kurzen Überblick über die benutzten Definitionen und Schreibweisen geben. Die folgenden Resultate hierzu stammen aus [Tsu82], Kapitel 3.

Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Wir schreiben (G, X) für die Permutationsgruppe, um deutlich zu machen, dass auf der Menge X operiert wird. Wenn keine Verwechslung entstehen kann, schreiben wir nur G für die Permutationsgruppe.
Für den Stabilisator einer nicht-leeren Menge $Y \subseteq X$ in G schreiben wir $\mathrm{Stab}_G(Y)$.

Definition 4.18. (i) Die Permutationsgruppe G heißt *transitiv*, wenn für ein gegebenes Paar von Elementen $x, y \in X$ eine Permutation $\pi \in G$ existiert, so dass $\pi(x) = y$.

(ii) Die Permutationsgruppe G heißt *semiregulär*, wenn $\mathrm{Stab}_G(x) = 1$ für alle $x \in X$.

(iii) Die Permutationsgruppe G heißt *regulär*, wenn sie transitiv und semiregulär ist.

Definition 4.19. Die rechts- bzw. linksregulären Permutationsdarstellungen bezeichnen wir mit ρ bzw. λ, wobei $\rho\colon G \to \mathrm{Sym}(G)$ durch $\rho(g)(x) = xg^{-1}$ und $\lambda\colon G \to \mathrm{Sym}(G)$ durch $\lambda(g)(x) = gx$ definiert wird.

Behauptung 4.20. *Sei $\rho[G]$ das Bild der rechtsregulären Darstellung in der symmetrischen Gruppe* $\mathrm{Sym}(G)$. *Mit $C_{\mathrm{Sym}(G)}(\lambda[G])$ bezeichnen wir den Zentralisator von $\rho[G]$ in der Gruppe* $\mathrm{Sym}(G)$. *Dann gilt*

$$C_{\mathrm{Sym}(G)}(\lambda[G]) = \rho[G].$$

Die Behauptung folgt direkt aus den zwei nachstehenden Lemmata.

Lemma 4.21. *Sei G eine Permutationsgruppe und X eine Menge. Wenn $C_{\mathrm{Sym}(X)}(G)$ transitiv auf X operiert, dann ist G semiregulär.*

Beweis. Sei $g \in G$ und habe einen Fixpunkt x. Da $(C_{\mathrm{Sym}(X)}(G), X)$ transitiv ist, existiert für alle $y \in X$ ein Element $h \in C_{\mathrm{Sym}(X)}(G)$, so dass $h(x) = y$. Somit ist

$$g(y) = gh(x) = hg(x) = h(x) = y,$$

das heißt $g = 1$. □

Lemma 4.22. *Wenn (G, X) eine reguläre Permutationsgruppe ist, dann operiert $C_{\mathrm{Sym}(X)}(G)$ ebenfalls regulär auf X und $G \simeq C_{\mathrm{Sym}(X)}(G)$.*

Beweis. Da (G, X) regulär ist, gilt $(G, X) \simeq (G, \{1\}\backslash G)$. Somit genügt es zu zeigen, dass der Satz für die Permutationsgruppe $(G, \{1\}\backslash G)$ gilt, welche eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(G)$ ist. Sei $\rho[G]$ das Bild der rechtsregulären Darstellung

$$\rho[G] = \left\{\rho[g](\xi) = \xi g^{-1} \mid g \in G\right\}$$

in der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(G)$. Dafür gilt $\rho[G] \simeq G$, $(\rho[G], G)$ ist transitiv und $\rho[G] \leq C_{\mathrm{Sym}(G)}(G)$, da $C_{\mathrm{Sym}(G)}(G)$ transitiv auf G operiert. Da $G \leq C_{\mathrm{Sym}(G)}(C_{\mathrm{Sym}(G)}(G))$, operiert $C_{\mathrm{Sym}(G)}(C_{\mathrm{Sym}(G)}(G))$ transitiv auf G. Somit operiert $C_{\mathrm{Sym}(G)}(G)$ semiregulär auf G nach vorigem Lemma 4.21 und damit folgt $C_{\mathrm{Sym}(G)}(G) = \rho[G] \simeq G$. $\square$

Damit ist die Behauptung gezeigt, dass $C_{\mathrm{Sym}(G)}(\lambda[G]) = \rho[G]$.

Beweis von Satz 4.16 . Um die Notation zu vereinfachen sei $d = 2$ und setzte $S_n = \{a_n,\ b_n\}$. Konstruiere den nicht Hauptultrafilter $\mathcal{U}$ auf ω wie folgt: Für alle $X \subseteq \omega$ sei

$$\{|G_n| \mid n \in X\} \in \mathcal{U} \;\Leftrightarrow\; X \in \mathcal{D}.$$

Da die Mengen $\{|G_n| \mid n \in X\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzen, existiert nach Satz 2.4 ein Ultrafilter $\mathcal{U}$, der diese Mengen enthält. Dann können wir den Isomorphismus

$$\sigma\colon \prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Sym}(|G_n|) \to \prod_{\mathcal{U}} \mathrm{Sym}(n),$$
$$(\theta_n)_{\mathcal{D}} \mapsto (\psi_n)_{\mathcal{U}}$$

definieren, durch

$$\psi_n = \begin{cases} \theta_m & \text{wenn } n = |G_m|, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Es ist klar, dass ein Isomorphismus $\iota\colon \prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Sym}(G_n) \to \prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Sym}(|G_n|)$ existiert. Sei nun $\pi\colon \prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Sym}(G_n) \to S_{\mathcal{U}}$ der surjektive Homomorphismus gegeben durch die Komposition folgender Abbildungen:

$$\prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Sym}(G_n) \xrightarrow{\iota} \prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Sym}(|G_n|) \xrightarrow{\sigma} \prod_{\mathcal{U}} \mathrm{Sym}(n) \to S_{\mathcal{U}}.$$

Für alle $n \in \omega$ seien $\lambda_n\colon G_n \to \mathrm{Sym}(G_n)$ und $\rho_n\colon G_n \to \mathrm{Sym}(G_n)$ die links- bzw. rechtsregulären Permutationsdarstellungen. Seien $\alpha, \beta \in S_{\mathcal{U}}$ die Elemente, die definiert werden durch

$$\alpha = \pi((\lambda_n(a_n))_{\mathcal{D}}) \quad \text{und} \quad \beta = \pi((\lambda_n(b_n))_{\mathcal{D}}).$$

Wir behaupten, dass dann die von α und β erzeugte Untergruppe $\Gamma =< \alpha, \beta >$ von $S_{\mathcal{U}}$ die Voraussetzungen erfüllt.

Sei $G = \prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Sym}(G_n)$. Dann bekommen wir:

$$\prod_{\mathcal{D}} \rho_n[G_n] \leq C_G\left(\{(\lambda_n(a_n))_{\mathcal{D}}, (\lambda_n(b_n))_{\mathcal{D}}\}\right).$$

Mit der Behauptung 4.20 folgt, dass die zwei Gruppen in der oberen Inklusion schon gleich sind. Die Projektion π bildet $\prod_{\mathcal{D}} \rho_n[G_n]$ injektiv nach $C_{S_{\mathcal{U}}}(\Gamma)$ ab. Es genügt zu zeigen, dass für $\gamma \in C_{S_{\mathcal{U}}}(\Gamma)$ ein $g \in \prod_{\mathcal{D}} \rho_n[G_n]$ existiert, so dass $\pi(g) = \gamma$ ist.
Um das zu sehen, sei $\varphi = (\varphi_n)_{\mathcal{D}}$ ein Element, so dass $\pi(\varphi) = \gamma$ und wähle $0 < \varepsilon < 1/3$ fest. Da $(\mathrm{Cay}(G_n, S_n) \mid n \in \omega)$ eine Expanderfamilie ist, folgt aus Proposition 4.17, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $n \in \omega$ gilt, wenn $Y \subseteq G_n$ ein Teilgraph von $\mathrm{Cay}(G_n, S_n)$ ist, mit $|Y| \geq (1-\delta)|G_n|$, dann existiert ein zusammenhängender Teilgraph $Z \subseteq Y$ mit $|Z| \geq (1-\varepsilon)|G_n|$. Für alle $n \in \omega$ sei $Y_n \subseteq G_n$, die Menge der Elemente $y \in G_n$, so dass

$$s\varphi_n(y) = \varphi_n(sy) \text{ für alle } s \in S_n \cup S_n^{-1}. \tag{4.1}$$

Dann ist $A_\varepsilon = \{n \in \omega \mid |Y_n| \geq (1-\delta)|G_n|\} \in \mathcal{D}$. Sei $n \in A_\varepsilon$ fest gewählt. Dann existiert, wenn wir Y_n als Teilgraphen des Cayleygraphen $\mathrm{Cay}(G_n, S_n)$ betrachten, ein zusammenhängender Teilgraph $Z_n \subseteq Y_n$ mit $|Z_n| \geq (1-\varepsilon)|G_n|$. Sei $z_n \in Z_n$ fest gewählt. Setze $\varphi_n(z_n) = z_n g_n$. Wende wiederholt die obige Gleichung (4.1) an, dann erhalten wir, dass $\varphi_n(z) = z g_n$ für alle $z \in Z_n$ ist, da Z_n zusammenhängend ist. Beachte, wenn $g_n' \in G_n$ mit $g_n' \neq g_n$, dann ist $x g_n' \neq x g_n$ für alle $x \in G_n$. Somit ergibt das oben angeführte Argument dasselbe Element $g_n \in G_n$, wenn $0 < \varepsilon' < \frac{1}{3}$ und $n \in A_\varepsilon \cap A_{\varepsilon'}$ ist. Wir setzen $g_n = 1$ für $n \notin A_\varepsilon$, dann folgt, dass

$$\pi((\rho_n(g_n^{-1}))_{\mathcal{D}}) = \pi((\varphi_n)_{\mathcal{D}}) = \gamma,$$

wie gewünscht. □

Um den Satz 4.9 komplett beweisen zu können, benötigen wir noch eine weitere Aussage:

Satz 4.23. *Für alle $n \geq 5$ existiert eine Erzeugerteilmenge $S_n \subseteq \mathrm{Alt}(n)$ mit $|S_n| = 20$, so dass $(\mathrm{Cay}(\mathrm{Alt}(n), S_n) \mid n \geq 5)$ eine Expanderfamilie ist.*

Beweis. [Kas07] $\square$

Aus den Sätzen 4.16 und 4.23 folgt dann zusammen:

Satz 4.24. *Für alle nicht Hauptultrafilter $\mathcal{D}$ auf ω, existiert ein nicht Hauptultrafilter $\mathcal{U}$ auf ω und eine endlich erzeugte Untergruppe $\Gamma \leq S_{\mathcal{U}}$, so dass $C_{S_{\mathcal{U}}}(\Gamma) \cong \prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Alt}(n)$.*

In den nächsten Abschnitten werden wir zeigen, dass, wenn CH nicht gilt, $2^{2^{\aleph_0}}$ -viele Ultraprodukte $\prod_{\mathcal{D}} \mathrm{Alt}(n)$ bis auf Isomorphie existieren. Wir werden später in Kapitel 4.2.4 eine Menge von $2^{2^{\aleph_0}}$-vielen Ultrafiltern konstruieren, so dass die zugehörigen Ultraprodukte paarweise verschieden sind. Mit diesen beiden Ergebnissen sind wir dann in der Lage den Satz 4.9 zu beweisen.

Beweis von 4.9. Sei $\left\{\mathcal{D}_\alpha \mid \alpha < 2^{2^{\aleph_0}}\right\}$ eine Familie von nicht Hauptultrafiltern auf ω, so dass die zugehörigen Ultraprodukte $\prod_{\mathcal{D}_\alpha} \mathrm{Alt}(n)$ paarweise nicht isomorph sind. Für die Existenz siehe Kapitel 4.2.4. Dann existiert für jedes $\alpha < 2^{2^{\aleph_0}}$ ein nicht Hauptultrafilter $\mathcal{U}_\alpha$ auf ω und eine endlich erzeugte Untergruppe $\Gamma_\alpha \leq S_{\mathcal{U}_\alpha}$, so dass

$$C_{S_{\mathcal{U}_\alpha}}(\Gamma_\alpha) \cong \prod_{\mathcal{D}_\alpha} \mathrm{Alt}(n).$$

Sei $\alpha < 2^{2^{\aleph_0}}$ fest gewählt. Da $|S_{\mathcal{U}_\alpha}| = 2^{\aleph_0}$ folgt, dass $S_{\mathcal{U}}$ nur $2^{\aleph_0}$-viele endlich erzeugte Untergruppen hat, folglich existieren höchstens $2^{\aleph_0}$-viele Ordinalzahlen $\beta < 2^{2^{\aleph_0}}$, so dass $S_{\mathcal{U}_\alpha} \cong S_{\mathcal{U}_\beta}$:
Wir nehmen an, dass $|I_\alpha| > 2^{\aleph_0}$ ist, wobei $I_\alpha := \left\{\beta < 2^{2^{\aleph_0}} \mid S_{\mathcal{U}_\alpha} \cong S_{\mathcal{U}_\beta}\right\}$.
Dann existieren $\beta_1 \neq \beta_2$, so dass $\varphi \colon S_{\mathcal{U}_{\beta_1}} \xrightarrow{\sim} S_{\mathcal{U}_{\beta_2}}$, wobei $\varphi(\Gamma_{\beta_1}) = \Gamma_{\beta_2}$. Das hieße aber, es gilt

$$\prod_{\mathcal{U}_{\beta_1}} \mathrm{Alt}(n) \cong \prod_{\mathcal{U}_{\beta_2}} \mathrm{Alt}(n).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass die $\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \mathrm{Alt}(n)$ paarweise verschieden sind.
Somit folgt, dass $\left\{S_{\mathcal{U}_\alpha} \mid \alpha < 2^{2^{\aleph_0}}\right\}$ eine Familie von $2^{2^{\aleph_0}}$-vielen paarweise nicht-isomorphen Gruppen enthält. $\square$

4.2.3 Ultraprodukte über alternierenden Gruppen

In diesem Kapitel zeigen wir, dass es $2^{2^{\aleph_0}}$-viele Ultraprodukte über alternierenden Gruppen gibt. Mit Satz 4.42 folgern wir dann die Behauptung für Ultraprodukte über symmetrische Gruppen. Dazu schauen wir uns zuerst die Struktur der Normalteiler der Ultraprodukte über alternierenden Gruppen an. Ferner beweisen wir, dass diese linear geordnet sind und isomorph zu den normalen Abschlüssen von Gruppenelementen. Die Hauptsätze stammen aus dem Artikel [EHST08].

Definition 4.25. Sei $\mathcal{U}$ ein nicht Hauptultrafilter auf ω.

(i) Sei $G_{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathrm{Alt}(n)$. $G_{\mathcal{U}}$ ist keine einfache Gruppe und besitzt einen eindeutigen maximalen echten Normalteiler.

(ii) Sei $\mathcal{E}_{\mathcal{U}} = \left\{ \left\langle g^{G_{\mathcal{U}}} \right\rangle \mid 1 \neq g \in G_{\mathcal{U}} \right\}$ die Menge der normalen Abschlüsse aller Elemente ungleich der Identität.

(iii) Wir definieren die konvexe Äquivalenzrelation $\equiv_{\mathcal{U}}$ auf der linearen Ordnung $\prod_{\mathcal{U}}\{1, \ldots, n\}$, durch

$$f_{\mathcal{U}} \equiv_{\mathcal{U}} h_{\mathcal{U}} \iff 0 < \lim_{\mathcal{U}} \frac{f(n)}{h(n)} < \infty.$$

(iv) Setze $L_{\mathcal{U}} = \left(\prod_{\mathcal{U}}\{1, \ldots, n\}\right)/\equiv_{\mathcal{U}}$ versehen mit der Ordnung des Quotientenraums.

Satz 4.26. *Die Familie $N_{\mathcal{U}}$ der Normalteiler von $G_{\mathcal{U}}$ ist durch Inklusion linear geordnet.*

Den Beweis werden wir erst nach den folgenden Lemmata führen.

Lemma 4.27. *Sei G eine Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die Menge der Normalteiler von G ist durch Inklusion linear geordnet.*
2. *Die Menge der normalen Abschlüsse aller Elemente ungleich der Identität ist durch Inklusion linear geordnet.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. Diese Richtung ist klar.

2. $\Rightarrow$ 1. Gelte 2. und seien N, M Normalteiler von G. Wenn für alle $g \in N$ ein $h \in M$ existiert, so dass $g \in \left\langle h^G \right\rangle$, dann gilt $N \leq M$. Sonst gibt es ein $g \in N$, so dass für alle $h \in M$ $\left\langle g^G \right\rangle \not\leq \left\langle h^G \right\rangle$ und somit $\left\langle h^G \right\rangle \leq \left\langle g^G \right\rangle$, da die Menge der normalen Abschlüsse nach Voraussetzung linear geordnet ist. Also gilt $M \leq N$. Daraus folgt die Behauptung. □

Das Resultat in 3.14 gilt analog für alternierende Gruppen. Das heißt, dass für $g = (\pi_n)_\mathcal{U} \in G_\mathcal{U}$

$$\left\langle g^{G_\mathcal{U}} \right\rangle = G_\mathcal{U} \iff \lim_\mathcal{U} \frac{|\operatorname{supp}(\pi_n)|}{n} > 0.$$

Es folgt, dass $\left\{ (\pi_n)_\mathcal{U} \in G_\mathcal{U} \mid \lim_\mathcal{U} \frac{|\operatorname{supp}(\pi_n)|}{n} = 0 \right\}$ der eindeutige maximale echte Normalteiler von $G_\mathcal{U}$ ist. Dies legt nahe, dass, wenn wir den normalen Abschluss eines Elementes $(\pi_n)_\mathcal{U} \in G_\mathcal{U}$ verstehen wollen, wir die relative Wachstumsrate von $|\operatorname{supp}(\pi_n)|$ betrachten müssen.
Von nun an übernehmen wir die Konvention, dass wenn $(\pi_n)_\mathcal{U} \in G_\mathcal{U} \backslash 1$ ist, wir immer ein $(\pi_n)_n$ wählen, so dass $\pi_n \neq 1$ ist für alle $n \in \omega$. Den normalen Abschluss von $(\pi_n)_\mathcal{U}$ schreiben wir als $N_{(\pi_n)_\mathcal{U}}$.

Definition 4.28. Sei P eine Menge und $\preceq$ eine reflexive und transitive Relation auf P. Dann heißt $(P, \preceq)$ *quasi-geordnete Menge* und $\preceq$ ist eine *Quasi-Ordnung.*

Definition 4.29. Sei $\preceq$ die Quasi-Ordnung auf $G_\mathcal{U} \backslash 1$ definiert durch

$$(\pi_n)_\mathcal{U} \preceq (\varphi_n)_\mathcal{U} \iff \lim_\mathcal{U} \frac{|\operatorname{supp}(\pi_n)|}{|\operatorname{supp}(\varphi_n)|} < \infty.$$

Proposition 4.30. *Wenn* $(\pi_n)_\mathcal{U}, (\varphi_n)_\mathcal{U} \in G_\mathcal{U} \backslash 1$ *nicht die Identität sind, dann ist*

$$(\pi_n)_\mathcal{U} \in N_{(\varphi_n)_\mathcal{U}} \iff (\pi_n)_\mathcal{U} \preceq (\varphi_n)_\mathcal{U}.$$

Wir teilen den Beweis in mehrere Lemmata und beginnen mit der leichteren Implikation.

Lemma 4.31. *Wenn* $(\pi_n)_\mathcal{U}, (\varphi_n)_\mathcal{U} \in G_\mathcal{U} \backslash 1$ *und* $(\pi_n)_\mathcal{U} \in N_{(\varphi_n)_\mathcal{U}}$, *dann ist* $(\pi_n)_\mathcal{U} \preceq (\varphi_n)_\mathcal{U}$.

Beweis. Sei $(\pi_n)_\mathcal{U} \in N_{(\varphi_n)_\mathcal{U}}$, dann existiert eine Zahl $k \geq 1$, so dass $(\pi_n)_\mathcal{U}$ als Produkt von k Konjugierten von $(\varphi_n)_\mathcal{U}^{\pm 1}$ ausgedrückt werden kann. Folglich kann für $\mathcal{U}-$f.a. $n \in \omega$ die Permutation π_n durch ein Produkt von k Konjugierten von $\varphi_n^{\pm 1}$ ausgedrückt werden. Daraus folgt $|\operatorname{supp}(\pi_n)| \leq k |\operatorname{supp}(\varphi_n)|$ für $\mathcal{U}-$f.a. n und somit gilt $\lim_\mathcal{U} \frac{|\operatorname{supp}(\pi_n)|}{|\operatorname{supp}(\varphi_n)|} \leq k < \infty$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 4.32. *Wenn* $\sigma \in \operatorname{Alt}(m)$ *keine spezielle fixpunktfreie Permutation ist, dann kann jedes Element von* $\operatorname{Alt}(m)$ *als Produkt von genau 4 Konjugierten von* σ *ausgedrückt werden.*

Beweis. Dies folgt direkt mit Satz 2.42 □

Lemma 4.33. *Wenn* $(\pi_n)_\mathcal{U}, (\varphi_n)_\mathcal{U} \in G_\mathcal{U}\backslash 1$ *und* $(\pi_n)_\mathcal{U} \preceq (\varphi_n)_\mathcal{U}$*, dann ist* $(\pi_n)_\mathcal{U} \in N_{(\varphi_n)_\mathcal{U}}$.

Beweis. Sei $(\pi_n)_\mathcal{U} \preceq (\varphi_n)_\mathcal{U}$. Wie oben bemerkt gilt: Wenn $\lim_\mathcal{U} \frac{|\operatorname{supp}(\varphi_n)|}{n} > 0$, dann ist $N_{(\varphi_n)_\mathcal{U}} = G_\mathcal{U}$. Folglich können wir annehmen, dass $\lim_\mathcal{U} \frac{|\operatorname{supp}(\varphi_n)|}{n} = 0$. Sei $\lim_\mathcal{U} \frac{|\operatorname{supp}(\pi_n)|}{|\operatorname{supp}(\varphi_n)|} \leq k$, wobei $k \geq 2$ eine ganze Zahl ist. Dann gilt für $\mathcal{U}$-f.a. $n \in \omega$, dass $\operatorname{supp}(\pi_n) \leq k|\operatorname{supp}(\varphi_n)| \leq n$. Somit existiert eine Permutation $\sigma_n \in \operatorname{Alt}(n)$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) σ_n ist Produkt von k Konjugierten $\psi_1 \ldots \psi_k$ von φ_n.

(ii) Wenn $1 \leq i < j \leq k$, dann ist $\operatorname{supp}(\psi_i) \cap \operatorname{supp}(\psi_j) = \emptyset$.

(iii) $\operatorname{supp}(\pi_n) \subseteq \operatorname{supp}(\sigma_n)$.

Wenn wir σ_n als Element von $\operatorname{Alt}(\operatorname{supp}(\sigma_n))$ betrachten, sehen wir, dass σ_n keine spezielle fixpunktfreie Permutation ist. Fixpunktfrei zu sein, ist offensichtlich. Die Eigenschaft nicht-speziell folgt aus der Tatsache, dass die Zykel von σ_n nicht unterschiedliche ungerade Länge haben können, da sie alle konjugiert zu φ_n sind und somit die gleiche Zykelstruktur besitzen. Also dürfen wir Lemma 4.32 anwenden. Damit folgt dann, dass π_n ein Produkt von 4 Konjugierten von σ_n ist (wegen 3. Eigenschaft). Somit ist $(\pi_n)_\mathcal{U}$ ein Produkt von $4k$ Konjugierten von $(\varphi_n)_\mathcal{U}$. □

Beweis von 4.26. Wir wenden 4.30 an. Dann liefert die Proposition folgende Äquivalenz: wenn $(\pi_n)_\mathcal{U}, (\varphi_n)_\mathcal{U} \in G_\mathcal{U}\backslash 1$ nicht die Identität sind, dann gilt

$$N_{(\pi_n)_\mathcal{U}} = N_{(\varphi_n)_\mathcal{U}} \iff \lim_\mathcal{U} \frac{|\operatorname{supp}(\pi_n)|}{|\operatorname{supp}(\varphi_n)|} < \infty \iff \lim_\mathcal{U} \frac{|\operatorname{supp}(\varphi_n)|}{|\operatorname{supp}(\pi_n)|} < \infty.$$

Also ist $(\mathcal{E}_\mathcal{U}, \subseteq)$ isomorph zu der linearen Ordnung $L_\mathcal{U}$. Damit ist Satz 4.26 bewiesen. □

Bemerkung 4.34. $L_\mathcal{U}$ hat als kleinstes Element die $\equiv_\mathcal{U}$-Klasse, die die konstanten Funktionen enthält. Dies ist offensichtlich, da $L_\mathcal{U}$ als Menge aller Anfangsabschnitte des Nichtstandardmodells $\mathcal{M} = \prod_\mathcal{U} \mathbb{N}$ identifiziert werden kann. Die Elemente aus $\mathbb{N}$ werden mit den konstanten Funktionen identifiziert. Das Anfangsstück jedes Anfangsabschnitts ist $\mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{N}$ ist die kleinste Äquivalenzklasse. Wenn wir $G_\mathcal{U}$ mit seinem Bild unter der Einbettung

$$G_\mathcal{U} \to \operatorname{Sym}\left(\prod_\mathcal{U} \{1, \ldots, n\}\right)$$

entsprechend der natürlichen Wirkung

$$(\pi_n)_{\mathcal{U}} \cdot (l_n)_{\mathcal{U}} = (\pi_n(l_n))_{\mathcal{U}}$$

von $G_{\mathcal{U}}$ auf $\prod_{\mathcal{U}}\{1,\dots,n\}$ identifizieren, dann ist der minimale nicht-triviale Normalteiler von $G_{\mathcal{U}}$ die Gruppe $\mathrm{Alt}\left(\prod_{\mathcal{U}}\{1,\dots,n\}\right)$ endlicher gerader Permutationen von $\prod_{\mathcal{U}}\{1,\dots,n\}$.

Beweis der Bemerkung 4.34.

Behauptung 4.35. $\mathrm{Alt}\left(\prod_{\mathcal{U}}\{1,\dots,n\}\right)$ *ist einfach.*

Der folgende Beweis stammt aus [Sco87].

Beweis. Setze $A = \prod_{\mathcal{U}}\{1,\dots,n\}$. Sei $E \neq H \lhd \mathrm{Alt}(A)$ und $x \in H \setminus \{e\}$, $y \in \mathrm{Alt}(A)$ und T eine beliebige endliche Teilmenge von A, die $\mathrm{supp}(x) \cup \mathrm{supp}(y)$ enthält mit $|T| > 4$. Dann ist

$$E < H \cap \mathrm{Alt}(T) \lhd \mathrm{Alt}(T).$$

Wegen der Einfachheit von $\mathrm{Alt}(T)$ ist $H \supset \mathrm{Alt}(T)$. Folglich ist $y \in H$ für alle $y \in \mathrm{Alt}(A)$, somit ist $H = \mathrm{Alt}(A)$. Also ist $\mathrm{Alt}(A)$ einfach. □

Satz 4.36. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Sei N ein Normalteiler von* $\mathrm{Sym}(\kappa)$*. Dann ist N eine der Gruppen in der folgenden Kette:*

$$\{1\} \lhd \mathrm{Alt}(\kappa) \lhd \mathrm{Sym}(\kappa)^{[\aleph_0]} \lhd \cdots \lhd \mathrm{Sym}(\kappa)^{[\kappa]} \lhd \mathrm{Sym}(\kappa)$$

Beweis. Für den Beweis siehe [AK07]. □

Damit folgt, dass $\mathrm{Alt}\left(\prod_{\mathcal{U}}\{1,\dots,n\}\right)$ schon minimaler nicht-trivialer Normalteiler ist. Also gilt

$$\mathrm{Alt}\left(\prod_{\mathcal{U}}\{1,\dots,n\}\right) \leq G_{\mathcal{U}} \leq \mathrm{Sym}\left(\prod_{\mathcal{U}}\{1,\dots,n\}\right).$$

Somit ist die Bemerkung bewiesen. □

Der folgende Satz aus [Sco87] liefert uns, dass $\mathrm{Aut}\,(G_{\mathcal{U}})$ genau der Normalisator von $G_{\mathcal{U}}$ in $\mathrm{Sym}\left(\prod_{\mathcal{U}}\{1,\dots,n\}\right)$ ist.

Satz 4.37. *Wenn* $n > 3$, $n \neq 6$ *und* $\mathrm{Alt}(n) \subseteq G \subseteq \mathrm{Sym}(n)$ *ist, dann ist* $\mathrm{Aut}(G) \cong N_{\mathrm{Sym}(n)}(G)$.

Beweis. Für den Beweis brauchen wir ein paar Lemmata, für die wir auf [Sco87], Kapitel 11.4 verweisen. □

Bemerkung 4.38. Wir haben in Kapitel 2.4 ein Kriterium (Satz 2.71) gezeigt, wann metrische Ultraprodukte saturiert sind. Damit ist das metrische Ultraprodukt $G_{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \operatorname{Alt}(n)$ saturiert, wenn CH gilt, und somit $|\operatorname{Aut}(G_{\mathcal{U}})| = 2^{\aleph_1}$.

Nun können wir die Anzahl nicht-isomorpher Ultraprodukte $G_{\mathcal{U}}$ zählen, für den Fall, dass CH nicht gilt. Dafür brauchen wir die linear geordnete Menge der normalen Abschlüsse $(\mathcal{E}_{\mathcal{U}}, \subseteq)$, der Elemente, die nicht die Identität sind.

Bemerkung 4.39. Wenn $\mathcal{U}, \mathcal{D}$ nicht Hauptultrafilter auf ω sind und $G_{\mathcal{U}} \cong G_{\mathcal{D}}$, dann ist $(\mathcal{E}_{\mathcal{U}}, \subseteq) \cong (\mathcal{E}_{\mathcal{D}}, \subseteq)$. Wie vorher schon bemerkt, ist $(\mathcal{E}_{\mathcal{U}}, \subseteq) \cong L_{\mathcal{U}}$ und man sieht ebenfalls, dass $L_{\mathcal{U}}$ als Anfangsstück von $(\prod_{\mathcal{U}} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}}$ betrachtet werden kann. Folglich impliziert das nächste Resultat, wenn CH nicht gilt, dann existieren $2^{2^{\aleph_0}}$ -viele Ultraprodukte $G_{\mathcal{U}}$ bis auf Isomorphie.

Definition 4.40. Wenn L_1, L_2 lineare Ordnungen sind, dann ist $L_1 \approx_i^* L_2$ genau dann, wenn L_1 und L_2 ein nicht-leeres isomorphes Anfangsstück I_1, I_2 besitzen mit $|I_1|, |I_2| > 1$.

Bemerkung 4.41. Die Voraussetzung in Definition 4.40, dass $|I_1|, |I_2| > 1$ sind, wird gebraucht, da jede lineare Ordnung $L_{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \{1, \ldots, n\}/\equiv_{\mathcal{U}}$ ein erstes Element besitzt, welches die $\equiv_{\mathcal{U}}$-Klasse der konstanten Funktionen enthält.

Satz 4.42. *Wenn CH nicht gilt, dann existiert eine Menge* $\left\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha < 2^{2^{\aleph_0}}\right\}$ *von nicht Hauptultrafiltern auf* ω*, so dass*

$$(\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\alpha} \not\approx_i^* (\prod_{\mathcal{U}_\beta} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\beta}$$

für alle $\alpha < \beta < 2^{2^{\aleph_0}}$.

Für den Beweis müssen wir im Folgenden zuerst nicht-isomorphe lineare Ordnungen konstruieren, die später als geeignete Invarianten in dem Beweis von Satz 4.42 verwendet werden. Deshalb werden wir den Beweis erst auf Seite 71 ff führen.

4.2.4 Invarianten linearer Ordnungen

Im folgenden Kapitel wenden wir die Beweistechnik aus dem Artikel von Kramer, Shelah, Tent und Thomas [KSTT05], Kapitel 3 auf unsere linearen Ordnungen an.

Definition 4.43. Seien L_1, L_2 lineare Ordnungen.

(i) $L_1 \approx_f L_2$ genau dann, wenn L_1 und L_2 nicht-leere isomorphe Endabschnitte haben.

(ii) $L_1 \approx_i L_2$ genau dann, wenn L_1 und L_2 nicht-leere isomorphe Anfangsstücke haben.

Definition 4.44. Sei I eine lineare Ordnung $\emptyset \neq A \subseteq I$.

(i) Eine Teilmenge $B \subseteq A$ heißt *kofinal* in A, wenn für alle $a \in A$ ein Element $b \in B$ existiert, so dass $a \leq b$. Die *Kofinalität* von A ist definiert als

$$\mathrm{cf}(A) = \min\{|B| \mid B \text{ ist kofinale Teilmenge von } A\}.$$

(ii) Eine Teilmenge $B \subseteq A$ heißt *koinitial* in A, wenn für alle $a \in A$ ein Element $b \in B$ existiert, so dass $b \leq a$. Die *Koinitialität* von A ist definiert als

$$\mathrm{coi}(A) = \min\{|B| \mid B \text{ ist koinitiale Teilmenge von } A\}.$$

Definition 4.45. Sei I eine lineare Ordnung und $\lambda, \theta \geq \omega$ seien reguläre Kardinalzahlen. Dann ist (I_1, I_2) ein (λ, θ)-*Schnitt* von I, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

(i) $I = I_1 \cup I_2$ und $s < t$ für alle $s \in I_1, t \in I_2$.

(ii) $\mathrm{cf}(I_1) = \lambda$.

(iii) $\mathrm{coi}(I_2) = \theta$.

Definition 4.46. Seien J, L lineare Ordnungen.

(i) Dann ist die ordnungserhaltende Abbildung $\varphi\colon J \to L$ eine *invariante Einbettung*, wenn für $\lambda, \theta > \omega$ für alle (λ, θ)-Schnitte (J_1, J_2) von J kein Element $x \in L$ existiert, so dass $\varphi(s) < x < \varphi(t)$ für alle $s \in J_1, t \in J_2$.

(ii) φ heißt *invariante kofinale Einbettung*, wenn φ invariant und $\varphi[J]$ kofinal in L ist.

(iii) φ heißt *invariante koinitiale Einbettung*, wenn φ invariant und $\varphi[J]$ koinitial in L ist.

Lemma 4.47. *Wenn $\lambda > \omega_1$ eine reguläre Kardinalzahl ist, dann existiert eine Menge $\left\{I_\alpha \mid \alpha < 2^\lambda\right\}$ linearer Ordnungen, die folgende Bedingungen erfüllt:*

1. $\mathrm{cf}(I_\alpha) = |I_\alpha| = \lambda$.

2. Wenn $\alpha \neq \beta$ und $\varphi_\alpha\colon I_\alpha \to L, \varphi_\beta\colon I_\beta \to L'$ invariante kofinale Einbettungen sind, dann ist $L \not\approx_f L'$.

Beweis. Da λ als überabzählbare und reguläre Kardinalzahl vorausgesetzt ist, können wir den Satz von Solovay 2.21 anwenden. Sei $\{S_\tau \mid \tau < \lambda\}$ eine Partition der stationären Menge

$$S = \{\delta < \lambda \mid cf(\delta) = \omega_1\}$$

in λ-viele paarweise verschiedene stationäre Teilmengen.

Sei $X \subseteq \lambda$ fest gewählt. Dann definieren wir für jedes $\alpha < \lambda$

$$\lambda_\alpha^X = \begin{cases} \omega_2 & \alpha \in \bigcup_{\tau \in X} S_\tau, \\ \omega_1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit definieren wir die lineare Ordnung

$$I_X = \left\{(\alpha, \beta) \mid \alpha < \lambda \text{ und } \beta < \lambda_\alpha^X\right\}$$

in der wir $(\alpha_1, \beta_1) < (\alpha_2, \beta_2)$ genau dann setzen, wenn entweder

- $\alpha_1 < \alpha_2$ oder
- $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 > \beta_2$.

Seien $X \neq Y \subseteq \lambda$. Seien L, L' lineare Ordnungen und seien $\varphi_X\colon I_X \to L$, $\varphi_Y\colon I_Y \to L'$ invariante kofinale Einbettungen. Angenommen $L \approx_f L'$. Sei $\Psi\colon M \to M'$ ein Isomorphismus zwischen den Endabschnitten M von L und M' von L'.

Definiere für jedes $\delta < \lambda$ die Mengen

$$M_\delta = \{m \in M \mid m < \varphi_X(\gamma, 0) \text{ für ein } \gamma < \delta\}$$

und

$$M'_\delta = \{m' \in M' \mid m' < \varphi_Y(\gamma, 0) \text{ für ein } \gamma < \delta\}\,.$$

Dann ist

$$C = \{\delta < \lambda \mid \Psi[M_\delta] = M'_\delta\}\,.$$

ein Club.

O.B.d.A. können wir annehmen, dass eine Ordinalzahl $\tau \in X \setminus Y$ existiert. Wähle ein $\delta \in C \cap S_\tau$, so dass $M_\delta \neq \emptyset$ ist. Die Einbettung φ_X ist invariant und kofinal. Die Mengen

$$\{(\alpha, \beta) \in I_X \mid \alpha < \delta\} \text{ und } \{(\alpha, \beta) \in I_X \mid \alpha \geq \delta\}$$

sind ein (ω_1, ω_2)-Schnitt von I_X. Mit Hilfe der Invarianz folgt nun, dass $\mathrm{coi}(M \setminus M_\delta) = \omega_2$, da $\tau \in X \setminus Y$. Durch ein ähnliches Argument bekommen wir $\mathrm{coi}(M' \setminus M'_\delta) = \omega_1$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $\Psi[M \setminus M_\delta] = M' \setminus M'_\delta$, da Ψ als ein Isomorphismus gewählt war. $\square$

Im folgenden Satz muss κ nicht notwendigerweise als regulär vorausgesetzt sein. Später werden wir den Satz für den Fall $\kappa = 2^\omega > \omega_1$ benutzen.

Satz 4.48. *Wenn $\kappa > \omega_1$ ist, dann existiert eine Menge $\{J_\alpha \mid \alpha < 2^\kappa\}$ linearer Ordnungen, die folgende Bedingungen erfüllt:*

1. $|J_\alpha| = \kappa$.
2. $\mathrm{coi}(J_\alpha) = \mathrm{cf}(\kappa) + \omega_2$.
3. *Wenn $\alpha \neq \beta$ und $\varphi_\alpha \colon J_\alpha \to L$, $\varphi_\beta \to L'$ invariante koinitiale Einbettungen sind, dann ist $L \not\approx_i L'$.*

Beweis. Sei $\langle \kappa_i \mid i < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ eine Folge regulärer Kardinalzahlen in der jedes $\kappa_i > \omega_1$ ist, so dass

1. wenn κ eine singuläre Kardinalzahl ist, dann gilt $\kappa = \sup_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i$ und
2. wenn κ eine reguläre Kardinalzahl ist, dann gilt $\kappa_i = \kappa$ für alle $i < \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

In beiden Fällen bekommen wir $\prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\kappa_i} = 2^\kappa$ (singuläre Kardinalzahlen können charakterisiert werden durch: $\kappa = \sum_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i$ und damit folgt: $2^\kappa = 2^{\sum_{i<\kappa} \kappa_i} = \prod_{i<\kappa} 2^{\kappa_i}$, siehe [Jec03]).

Sei $\theta = \mathrm{cf}(\kappa) + \omega_2$ und sei $\{S_\tau \mid \tau < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ eine Partition der stationären Menge

$$S = \{\delta < \theta \mid \mathrm{cf}(\delta) = \omega_1\}$$

in $\mathrm{cf}(\kappa)$-viele paarweise verschiedene stationären Teilmengen. Wir definieren die Funktion $h \colon \theta \to \mathrm{cf}(\kappa)$ durch:

- $\delta \in S_{h(\delta)}$ für alle $\delta \in S$ und
- $h(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \theta \setminus S$.

Für jedes $i < \mathrm{cf}(\kappa)$ sei $\{I_{i,\alpha} \mid \alpha < 2^{\kappa_i}\}$ eine Menge von linearen Ordnungen der Kardinalität κ_i wie in Lemma 4.47 (κ_i sind nach Voraussetzung regulär). Für jedes $\nu \in \prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\kappa_i}$ definieren wir die lineare Ordnung

$$J_\nu = \left\{(\alpha, x) \mid \alpha < \theta, x \in I_{h(\alpha),\nu(h(\alpha))}\right\},$$

indem wir genau dann $(\alpha_1, x_1) < (\alpha_2, x_2)$ setzen, wenn entweder

- $\alpha_1 > \alpha_2$ oder
- $\alpha_1 = \alpha_2$ und $x_1 < x_2$.

Jetzt können wir genauso wie im Lemma zuvor argumentieren. Dann folgt, dass die Menge $\left\{J_\nu \mid \nu \in \prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\kappa_i}\right\}$ der linearen Ordnungen unsere Voraussetzungen erfüllt. □

Setze nun $2^\omega = \kappa > \omega_1$ und sei $\{J_\alpha \mid \alpha < 2^\kappa\}$ die Menge der linearen Ordnungen, gegeben durch Satz 4.48. Damit würde Satz 4.9 folgen, wenn wir eine Menge $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha < 2^\kappa\}$ aus nicht Hauptultrafiltern auf ω konstruieren könnten, so dass für alle $\alpha < 2^\kappa$ eine invariante koinitiale Einbettung

$$\varphi_\alpha\colon J_\alpha \to (\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\alpha}$$

existieren würde. Unglücklicherweise führt der direkte Weg zu technischen Schwierigkeiten, deshalb konstruieren wir im nächsten Abschnitt stattdessen eine Menge $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha < 2^\kappa\}$ von nicht Hauptultrafiltern auf ω, so dass folgende Bedingung erfüllt wird:

- Es existiert eine invariante Einbettung $\varphi\colon \omega_1 + J_\alpha \to L$ für jedes $\alpha < 2^\kappa$ und jedes Anfangsstück L von $(\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\alpha}$ mit $|L| > 1$.

(Hier ist $\omega_1 + J_\alpha$ die lineare Ordnung, die aus einer Kopie von ω_1 besteht, gefolgt von einer Kopie von J_α. Insbesondere ist (ω_1, J_α) ein $(\omega_1, \mathrm{cf}(\kappa) + \omega_2)$-Schnitt von $\omega_1 + J_\alpha$.) Die Bedingung reicht allerdings nicht aus, um sicherzustellen, dass

$$(\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\alpha} \not\approx_i^* (\prod_{\mathcal{U}_\beta} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\beta}$$

für alle $\alpha \neq \beta$, da die obige Bedingung nicht die Möglichkeit berücksichtigt, dass eine invariante Einbettung

$$\Psi\colon \omega_1 + J_\beta \to (\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\alpha}$$

existiert. Sei $\alpha < 2^\kappa$ fest gewählt und sei C_α die Menge aller $\beta < 2^\kappa$, so dass eine invariante Einbettung

$$\Psi_\beta \colon \omega_1 + J_\beta \to (\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\alpha}$$

existiert. Für jedes $\beta \in C_\alpha$ sei (A_β, B_β) der $(\omega_1, \mathrm{cf}(\kappa) + \omega_2)$-Schnitt von $(\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\alpha}$, der definiert wird durch

$$A_\beta = \{g/\mathcal{U}_\alpha \in (\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\alpha} \mid k < g/\mathcal{U}_\alpha < \Psi_\beta(t) \text{ für ein } t \in \omega_1,$$
$$\text{für alle } k \in \omega\}$$

und

$$B_\beta = \left\{ g/\mathcal{U}_\alpha \in (\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\alpha} \mid g/\mathcal{U}_\alpha > \Psi_\beta(t) \text{ für ein } t \in J_\beta \right\}.$$

Dann impliziert Satz 4.48, dass $(A_\beta, B_\beta) \neq (A_\gamma, B_\gamma)$ für alle $\beta \neq \gamma \in C_\alpha$. Da der folgende Satz impliziert, dass die Zahl der $(\omega_1, \mathrm{cf}(\kappa) + \omega_2)$-Schnitte von $(\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\alpha}$ höchstens $2^\omega = \kappa$ beträgt, folgt $|C_\alpha| \leq \kappa$. Dies impliziert, dass eine Teilmenge $W \subseteq 2^\kappa$ der Kardinalität 2^κ existiert, so dass

$$(\prod_{\mathcal{U}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\alpha} \not\cong_i^* (\prod_{\mathcal{U}_\beta} \omega)/\equiv_{\mathcal{U}_\beta}$$

für alle $\alpha \neq \beta \in W$.

Satz 4.49. *Sei I eine lineare Ordnung und $\theta \neq \lambda$ reguläre Kardinalzahlen. Dann ist die Anzahl der (λ, θ)-Schnitte von I höchstens $|I|$.*

Beweis. Es genügt, den Fall $\lambda < \theta$ zu betrachten.

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Sei I ein Gegenbeispiel einer linearen Ordnung minimaler Kardinalität und sei $\{(A_i, B_i) \mid i < |I|^+\}$ eine Menge von $|I|^+$-vielen unterschiedlichen (λ, θ)-Schnitten von I. Sei $\mathrm{cf}(|I|) = \kappa$ und schreibe $I = \bigcup_{\gamma<\kappa} I_\gamma$ als eine strikt wachsende Vereinigung von Substrukturen, so dass $|I_\gamma| < |I|$ für alle $\gamma < \kappa$.

Als erstes sei $\kappa \neq \theta, \lambda$:

Dann existiert für jedes $i < |I|^+$ eine Ordinalzahl $\gamma_i < \kappa$, so dass $A_i \cap I_{\gamma_i}$ kofinal in A_i ist und $B_i \cap I_{\gamma_i}$ koinitial in B_i. Es folgt, dass eine Teilmenge $X \subset |I|^+$ der Kardinalität $|I|^+$ existiert und eine feste Ordinalzahl $\gamma < \kappa$, so dass alle $\gamma_i = \gamma$ für $i \in X$. Aber das bedeutet, dass $\{(A_i \cap I_\gamma, B_i \cap I_\gamma) \mid i \in X\}$ eine Menge von $|I|^+$-vielen unterschiedlichen (λ, θ)-Schnitten von I_γ wäre, was ein Widerspruch zu der Minimalität von $|I|$ ist.

Zweiter Fall: $\kappa = \lambda$:

Wieder existiert für jedes $i < |I|^+$ eine Ordinalzahl $\gamma_i < \kappa$, so dass $B_i \cap I_{\gamma_i}$ koinitial in B_i ist, und es existiert eine Teilmenge $X \subseteq |I|^+$ der Kardinalität $|I|^+$ und eine feste Ordinalzahl $\gamma < \kappa$, so dass $\gamma_i = \gamma$ für alle $i \in X$. Wir nehmen an, dass für alle $i \in X$, $A_i \cap I_\gamma$ nicht kofinal in A_i liegt. Für jedes $i \in X$ wählen wir ein Element $a_i \in A_i \setminus I_\gamma$, so dass $s < a_i < t$ für alle $s \in A_i \cap I_\gamma$ und $t \in B_i$. Sei $i \neq j \in X$. Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass $B_i \subsetneq B_j$. Da $B_j \cap I_\gamma$ koinitial in B_j liegt, folgt dass ein Element

$$c \in (B_j \setminus B_i) \cap I_\gamma \subseteq A_i \cap I_\gamma$$

existiert. Dies bedeutet aber, dass $a_j < c < a_i$ und somit ist $\{a_i \mid i \in X\}$ eine Menge von $|I|^+$-vielen unterschiedlichen Elementen von I. Widerspruch!

Mit einem ähnlichem Argument erhalten wir den Fall $\kappa = \theta$. $\square$

4.2.5 Ultrafilterkonstruktion

In diesem Abschnitt konstruieren wir die gewünschte Menge $\left\{\mathcal{D}_\alpha \mid \alpha < 2^{2^{\aleph_0}}\right\}$ von nicht Hauptultrafiltern, wobei wir die Technik aus Abschnitt VI.3 aus dem Buch von Shelah [She90] verwenden und eine Beweistechnik aus dem Artikel [KSTT05] auf unsere lineare Ordnung anwenden.
Als erstes stellen wir sicher, dass die Mengen, mit denen wir arbeiten, nicht im zugehörigen Ideal liegen.

Definition 4.50. Sei D ein Filter auf ω. Wir setzen

$$I_D = \{\omega \subseteq X \mid \omega \setminus X \in D\}$$

als das zugehörige *duale Ideal.* Wenn $A, B \subseteq \omega$, definieren wir

$$A \subset B \mod D \text{ genau dann, wenn } A \setminus B \in I_D$$

und

$$A = B \mod D \text{ genau dann, wenn } (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in I_D.$$

Die nächste Definition stellt sicher, dass wir für die obigen Mengen eine Filterbasis finden.

Definition 4.51. Sei D ein Filter auf ω und $\mathcal{G} \subseteq \omega^\omega$ eine Familie surjektiver Funktionen. Dann ist $\mathcal{G}$ *unabhängig* mod D, wenn für alle $l \in \omega$, für alle paarweise verschiedenen $g_1, \ldots, g_l \in \mathcal{G}$ und für alle (nicht notwendigerweise unterschiedlichen) $j_1, \ldots, j_l \in \omega$ gilt, dass

$$\{n \in \omega \mid g_k(n) = j_k \text{ für alle } 1 \leq k \leq l\} \neq \emptyset \mod D.$$

(Diese Bedingung impliziert natürlich, dass D ein nicht trivialer Filter ist.)

Sei $\mathcal{G}$ unabhängig mod D und $|\mathcal{G}| = \kappa$. Sei $\mathcal{G} = \{f_t \mid t \in I\}$ indiziert mit Elementen einer beliebigen linearen Ordnung I der Kardinalität κ. Für jedes $s < t \in I, c \in \omega$ sei

$$B_{s,t,c} = \{n \in \omega \mid cf_s(n) < f_t(n)\}.$$

Wir zeigen später in Beweis 4.59, dass $D \cup \{B_{s,t,c} \mid s < t \in I, c \in \omega\}$ einen nicht-trivialen Filter D^+ erzeugt.
Wenn $\mathcal{D} \supseteq D^+$ ein Ultrafilter ist, können wir durch die Vorschrift $f(t) = f_t/\mathcal{D}$ eine ordnungserhaltende Abbildung $\varphi\colon I \to (\prod_{\mathcal{D}} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}}$ definieren. Da wir jedoch wollen, dass φ eine invariante Einbettung ist, müssen wir das Verhalten beliebiger Elemente $g/\mathcal{D} \in (\prod_{\mathcal{D}} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}}$ kontrollieren können, da wir sicherstellen müssen, dass kein Element $g/\mathcal{D}$ existiert, das zwischen $f_s/\mathcal{D} < f_t/\mathcal{D}$ liegt, wenn $s \in I_1, t \in I_2$. (I_1, I_2) bildet dabei einen Schnitt von I.

Definition 4.52. Sei $\mathcal{G} \subseteq \omega^\omega$ eine Familie surjektiver Funktionen.

(i) $FI(\mathcal{G})$ ist die Menge von Funktionen h, die folgende Bedingungen erfüllen:

  (a) $\operatorname{dom} h$ ist endliche Teilmenge von $\mathcal{G}$,

  (b) $\operatorname{ran} h \subset \omega$.

(ii) Für jedes $h \in FI(\mathcal{G})$ sei

$$A_h = \{n \in \omega \mid g(n) = h(g) \text{ für alle } g \in \operatorname{dom} h\}.$$

(iii) $FI_s(\mathcal{G}) = \{A_h \mid h \in FI(\mathcal{G})\}$.

Lemma 4.53. *Sei D ein Filter auf ω und $\mathcal{G} \subseteq \omega^\omega$ eine Familie surjektiver Funktionen.*

1. *$\mathcal{G}$ ist genau dann unabhängig* $\operatorname{mod} D$, *wenn $A_h \neq \emptyset \mod D$ für jedes $h \in FI(\mathcal{G})$.*

2. *Wenn $\mathcal{G}$ unabhängig* $\operatorname{mod} D_\alpha$ *für alle $\alpha < \delta$ und D_α $(\alpha < \delta)$ eine aufsteigende Folge von Filtern auf I ist, dann ist $\mathcal{G}$ unabhängig* $\operatorname{mod} \bigcup_{\alpha<\delta} D_\alpha$.

3. *Wenn $\mathcal{G}$ unabhängig* $\operatorname{mod} D$ *ist, dann existiert ein maximaler Filter $D^* \supseteq D$, modulo welchem $\mathcal{G}$ unabhängig ist.*

4. *Sei $\mathcal{G}$ unabhängig* $\operatorname{mod} D$ *und $X \subseteq \omega$. Dann existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$, so dass $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$ unabhängig* $\operatorname{mod} D_1$ *ist oder* $\operatorname{mod} D_2$, *wobei $D_1 = [D \cup \{X\}]$ und $D_2 = [D \cup \{\omega \setminus X\}]$ die Filter sind, die durch D und $\{X\}$ oder $\{\omega \setminus X\}$ erzeugt werden.*

Beweis. 1. " $\Rightarrow$ " folgt direkt aus den beiden Definitionen 4.51 und 4.52.

" $\Leftarrow$ " Zu jedem $h \in FI(\mathcal{G})$ setze $h(g_k) = j_k$ für $1 \leq k \leq l$ mit $\operatorname{dom} h$ endlich.

2. Wir nehmen an, dass $\mathcal{G}$ nicht unabhängig $\mod \bigcup_\alpha D_\alpha$ ist. Dann existieren $g_1, \ldots, g_l \in \mathcal{G}$ und $j_1, \ldots, j_l \in \omega$, so dass $\{n \in \omega \mid g_n(h) = j_n\} \in \bigcup_\alpha D_\alpha$ für alle $h \in FI(\mathcal{G})$. Damit ist $\{n \in \omega \mid g_n(h) = j_n\} \in D_\alpha$ für ein α. Dies ist ein Widerspruch.

3. Sei M die Menge aller Filter D' auf ω, so dass $A_h \neq \emptyset \mod D'$. Sei $(D_i)_i$ eine aufsteigende Kette in M. Mit 2. folgt dann, dass $\mathcal{G}$ unabhängig $\operatorname{mod} \bigcup_i D_i$ ist. Mit dem Lemma von Zorn folgt, dass ein maximaler Filter $D^* \in M$ existiert.

4. Wir nehmen an, dass $\mathcal{G}$ nicht unabhängig $\mod D_1$ ist.

O.B.d.A. sei $X \notin D$. Dann existieren für ein $k \in \omega$ unterschiedliche $g_0, \ldots, g_{k-1} \in \mathcal{G}$ und $j_0, \ldots, j_{k-1} \in \omega$, so dass

$$W_1 = \{n \in \omega \mid g_0(n) = j_0, \ldots, g_{k-1} = j_{k-1}\} = \emptyset \mod D_1.$$

Wir behaupten, dass daraus schon folgt, dass

$$W_1 \subset \omega \setminus X \mod D.$$

Durch Umformen erhalten wir folgende Äquivalenzen:

$$W_1 \subset \omega \setminus X \mod D \Leftrightarrow W_1 \setminus (\omega \setminus X) \in I_D \Leftrightarrow W_1 \cap X \in I_D.$$

Sei $X \subseteq \omega$. Sei $y = X' \cap X \neq \emptyset$ für $X \notin D,\ X' \in D$ dann gilt:

$$\begin{aligned}
X' \cap X \subseteq (\omega \setminus W_1) &\Rightarrow X' \cap X \cap W_1 = \emptyset \text{ (da } X' \cap X \subseteq \omega \setminus W_1) \\
&\Rightarrow X \cap W_1 \subseteq \omega \setminus X' \in I_D \\
&\Rightarrow W_1 \setminus (\omega \setminus X) \in I_D \\
&\Leftrightarrow W_1 \subset \omega \setminus X \mod D.
\end{aligned}$$

Sei nun $\mathcal{G} \setminus \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ nicht unabhängig $\mod D_1$.

Setze $\mathcal{F} = \mathcal{G} \setminus \{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}$ nicht unabhängig $\mod D_2$ ist. Es existiert also ein $m < \omega$, so dass $j^0, \ldots, j^{m-1} \in \omega$ und unterschiedliche $g^0, \ldots, g^{m-1} \in \mathcal{F}$ existieren, so dass

$$W_2 = \left\{n \in \omega \mid g^0(n) = j^0, \ldots, g^{m-1}(n) = j^{m-1}\right\} = \emptyset \mod D_2.$$

Dann folgt $W_2 \subset X \mod D$. (Dies folgt mit einem analogen Argument wie vorher.)

Es bleibt zu zeigen, dass aus $W_1 \subset \omega \setminus X \mod D$ und $W_2 \subset X \mod D$ schon folgt $W_1 \cap W_2 = \emptyset \mod D$. Aus

$$\begin{aligned}
W_1 \subset \omega \setminus X \mod D &\Leftrightarrow (W_1 \setminus (\omega \setminus X)) \in I_D \text{ und} \\
W_2 \subset X \mod D &\Leftrightarrow (W_2 \setminus X) \in I_D
\end{aligned}$$

folgt $(W_1 \setminus (\omega \setminus X)) \cup (W_2 \setminus X) \in I_D$.

Es gilt

$$(W_1 \setminus (\omega \setminus X)) = (W_1 \setminus \omega) \cup (W_1 \cap X) = W_1 \cap X.$$

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned}((W_1 \cap X) \cup (W_2 \setminus X)) \in I_D &\Leftrightarrow (W_1 \cup (W_2 \setminus X)) \cap (X \cup (W_2 \setminus X)) \in I_D \\ &\Leftrightarrow ((W_1 \cap W_2) \cup (W_2 \setminus X)) \in I_D \\ &\Rightarrow W_1 \cap W_2 \in I_D \\ &\Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \emptyset \mod D.\end{aligned}$$

Somit ist

$$W_1 \cap W_2 = \emptyset \mod D \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 \in I_D \Leftrightarrow \omega \setminus (W_1 \cap W_2) \in D.$$

Dies ist ein Widerspruch, da $W_1 \cap W_2 \in D$. □

Definition 4.54. Sei D ein Filter auf ω.

(i) Dann heißt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ eine *Partition* $\mod D$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $A \neq \emptyset \mod D$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
- $A \cap A' = \emptyset \mod D$ für alle $A \neq A' \in \mathcal{A}$.
- Für alle $B \in \mathcal{P}(\omega)$ mit $B \neq \emptyset \mod D$ existiert ein $A \in \mathcal{A}$, so dass $A \cap B \neq \emptyset \mod D$.

(ii) Die Teilmenge $B \subseteq \omega$ *basiert auf der Partition* $\mathcal{A}$, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ entweder $A \subseteq B \mod D$ gilt oder $A \cap B = \emptyset \mod D$.

(iii) Das Element B wird durch eine Menge $\mathcal{A}$ von Elementen aus $\mathcal{P}(\omega)$ *unterstützt*, wenn B auf einer Partition $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ basiert.

(iv) Eine Menge $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\omega)$ ist *dicht*, wenn für jedes Element $B \in \mathcal{P}(\omega)$ mit $B \neq \emptyset \mod D$ ein A in $\mathcal{A}$ existiert, so dass $A \subseteq B \mod D$.

(v) Für eine boolesche Algebra B sei $CC(B)$ die minimale reguläre Kardinalzahl $\lambda > \aleph_0$, so dass jede Partition von B kleinere Kardinalität als λ hat.

Bemerkung 4.55. Wenn $\mathcal{A}$ eine Partition ist, dann basiert B genau dann auf $\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{A}$ B unterstützt.

Satz 4.56. *Sei D ein maximaler Filter auf ω, modulo welchem $\mathcal{G}$ unabhängig ist.*

1. *$FI_s(\mathcal{G})$ ist dicht $\mod D$, das heißt für jedes $B \subseteq \omega$ mit $B \neq \emptyset \mod D$ existiert ein $A_h \in FI_s(\mathcal{G})$, so dass $A_h \subseteq B \mod D$. Folglich wird jedes Element durch $FI_s(\mathcal{G})$ unterstützt.*

2. *Für jedes $f \in \mathcal{G}$ ist $\{f^{-1}(j) \mid j \in \operatorname{ran}(f)\}$ eine Partition* $\mod D$.

3. *Sei $\mathcal{G}$ die disjunkte Vereinigung von $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$, werde $A \subseteq \omega$ durch $FI_s(\mathcal{G}_1)$ unterstützt, sei $h \in FI(\mathcal{G}), h = h^1 \cup h^2, h^l \in FI(\mathcal{G}_l)$ für $l = 1, 2$. Wenn $A_h \subseteq A \mod D$ gilt, dann ist $A_{h^1} \subseteq A \mod D$.*

4. *$CC(B(D)) = \aleph_0$ genau dann, wenn von nur endlich vielen $f \in \mathcal{G}$ die Kardinalität von $|\operatorname{ran}(f)| > 1$ ist und für keins $|\operatorname{ran}(f)| = \aleph_0$, wobei $B(D)$ die boolesche Algebra bzgl. des Filters D auf ω ist, d.h. wir betrachten die Menge $\{A \mid A \subseteq \omega\}$ und alles modulo D.*

Beweis.

1. Wir nehmen an, dass dies nicht der Fall ist. Dann ist für ein $A \subseteq \omega$, $A \neq \emptyset \mod D$ und $A_h \nsubseteq A \mod D$ für alle $h \in FI(\mathcal{G})$. Damit ist $A_h \cap (\omega \setminus A) \neq \emptyset \mod D$ und somit ist $\mathcal{G}$ unabhängig $\mod [D \cup \{\omega \setminus A\}]$. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von D, da $A \neq \emptyset \mod D$.

2. Es ist klar, dass die $f^{-1}(j)$ modulo D paarweise verschieden sind. Wir nehmen an, dass $A \cap f^{-1}(j) = \emptyset \mod D$ für jedes $j \in \operatorname{ran}(f)$ gilt, aber $A \neq \emptyset \mod D$ ist. Nach 1. gilt für ein $h \in FI(\mathcal{G})$ $A_h \subseteq A \mod D$ und somit für ein h_1, $h \subseteq h_1 \in FI(\mathcal{G})$ und $f \in \operatorname{dom}(h_1)$. Also ist $A_{h_1} \subseteq A \mod D$, aber wenn $h_1(f) = j_0$ ist, gilt $A \cap A_{h_1} \subseteq A \cap f^{-1}(j_0) = \emptyset \mod D$. Dies ist ein Widerspruch.

3. Da $A \subseteq \omega$ durch $FI_s(\mathcal{G}_1)$ unterstützt wird, basiert A auf einer Partition $W \subseteq FI_s(\mathcal{G}_1)$. Basiere A auf der Partition $W = \{A_{h_\xi} \mid \xi < \xi(0)\}$, $h_\xi \in FI(\mathcal{G}_1)$. Wenn A auf einer Partition basiert, bedeutet dies, dass aus $A_{h_\xi} \in W$ schon folgt $A_{h_\xi} \subseteq A \mod D$ oder $A_{h_\xi} \cap A = \emptyset \mod D$.
Gelte $A_{h_\xi} \cap A = \emptyset \mod D$. Nach Voraussetzung ist $A_h \subseteq A \mod D$. Daraus folgt $A_{h_\xi} \cap A_h = \emptyset \mod D$. Da $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ unabhängig $\mod D$ ist, das heißt, $A_{h^1} \cap A_{h^2} \neq \emptyset \mod D$ und $A \cap A_{h_\xi} = \emptyset \mod D$, folgt dass $A_{h_1} \cap A_{h_\xi} = \emptyset \mod D$. Somit gilt $A_{h^1} \subseteq A \mod D$, da die Menge $A_{h_1} \setminus A$ sonst der Maximalität der Partition widerspricht, da sie nicht leer ist und einen nicht-leeren Schnitt mit allen A_{h_ξ} und A_{h^1} hat. $A_{h_1} \setminus A$ wäre somit ein weiteres Element der Partition. Daraus folgt die Behauptung.

4. Wenn $f_n \in \mathcal{G}$ verschieden sind, $|\operatorname{ran}(f_n)| > 1, j_n^0 \neq j_n^1 \in \operatorname{ran}(f_n)$ und h_n definiert ist durch $h_n(f_l) = j_n^0$ für $l < n$ und $h_n(f_n) = j_n^1$, dann sind $h_n \in FI(\mathcal{G})$ und $A_{h_n} \neq \emptyset \mod D (n < \omega)$ $\aleph_0$ paarweise verschiedene Elemente von $B(D)$, die nicht Null sind. Nach 2. gilt

$$f \in \mathcal{G} \Rightarrow |\operatorname{ran}(f)| < CC(B(D)).$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Nach 1. existiert für jede Teilmenge $B \subseteq \omega$ eine Partition $\mathcal{A} \mod D$, so dass

(i) B auf $\mathcal{A}$ basiert,

(ii) $\mathcal{A} \subseteq FI_s(\mathcal{G})$.

Weiter gilt nach 4. , dass $\mathcal{A}$ notwendigerweise abzählbar sein muss und somit existiert eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$, so dass $\mathcal{A} \subseteq FI_s(\mathcal{G}_0)$, das heißt B wird durch $FI_s(\mathcal{G}_0) \mod D$ unterstützt.
Im nächsten Lemma fassen wir alle vorher bewiesenen Eigenschaften in der Form noch einmal zusammen, in der wir sie später benötigen.

Lemma 4.57. *Sei $\mathcal{G} \subseteq \omega^\omega$ eine Familie surjektiver Funktionen und D ein maximaler Filter auf ω, modulo welchem $\mathcal{G}$ unabhängig ist.*

1. *$FI_s(\mathcal{G})$ ist dicht $\mod D$, das bedeutet für jedes $B \subseteq \omega$ mit $B \neq \emptyset \mod D$, existiert ein $A_h \in FI_s(\mathcal{G})$, so dass $A_h \subseteq B \mod D$.*

2. *Für jedes $B \subseteq \omega$ existiert eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$, so dass B durch $FI_s(\mathcal{G}_0) \mod D$ unterstützt wird.*

3. *Sei $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2$ und $A \subseteq \omega$ werde durch $FI_s(\mathcal{G}_1) \mod D$ unterstützt. Wenn $h \in FI(\mathcal{G})$ und $A_h \subseteq A \mod D$ ist, dann ist $A_{h_1} \subseteq A \mod D$, wobei $h_1 = h \restriction \mathcal{G}_1$.*

Das folgende Lemma stellt sicher, dass sich unsere Konstruktion auf die Anfangsstücke von $(\prod_{\mathcal{D}} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}}$ konzentriert.

Lemma 4.58. *Sei $\mathcal{G} \subseteq \omega^\omega$ eine Familie surjektiver Funktionen und D ein maximaler Filter auf ω, modulo welchem $\mathcal{G}$ unabhängig ist. Sei $g \in \omega^\omega$ eine Funktion, so dass $l < g/D$ für alle $l \in \omega$. Dann ist $f/D < g/D$ für alle $f \in \mathcal{G}$. Folglich gilt für jeden Ultrafilter $\mathcal{D}^* \supseteq D$, $f/\mathcal{D}^* < g/\mathcal{D}^*$.*

Beweis. Wir nehmen an, dies gilt nicht. Dann existiert ein $f \in \mathcal{G}$ mit $g/D \leq f/D$. Dann ist $A = \{n \in \omega \mid f(n) \geq g(n)\} \neq \emptyset \mod D$. Nach 4.56, 2. gilt für ein $l \in \omega$, $A \cap f^{-1}(l) \neq \emptyset \mod D$. Folglich ist

$$\{n \mid g(n) \leq l\} \supseteq A \cap f^{-1}(l) \neq \emptyset \mod D.$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $l < g/D$ für alle $l \in \omega$. $\square$

Lemma 4.59. *Sei $\mathcal{G} \sqcup \mathcal{G}^* \subseteq \omega^\omega$ eine Familie surjektiver Funktionen und sei D ein maximaler Filter auf ω, modulo welchem $\mathcal{G} \sqcup \mathcal{G}^*$ unabhängig ist. Sei I eine lineare Ordnung und sei $\mathcal{G} = \{f_t \mid t \in I\}$ durch Elemente von I indiziert. Dann existiert ein Filter $D^+ \supseteq D$ der folgende Bedingung erfüllt:*

1. *Wenn $s \in I$ und $l \in \omega$ ist, dann ist $l < f_s/D^+$.*

2. *Wenn $s < t \in I$ ist, dann ist $f_s/D^+ < f_t/D^+$.*

3. *Sei (I_1, I_2) ein (λ, θ)-Schnitt von I, so dass $\lambda, \theta > \omega$. Dann existiert für keinen Ultrafilter $\mathcal{U} \supseteq D^+$ auf ω eine Funktion $g \in \omega^\omega$, so dass*

$$f_s/\mathcal{U} < g/\mathcal{U} < f_t/\mathcal{U}$$

für alle $s \in I_1, t \in I_2$.

4. *D^+ ist ein maximaler Filter auf ω, modulo welchem $\mathcal{G}^*$ unabhängig ist.*

Beweis. Für jedes $t \in I$ und $l \in \omega$ setze

$$A_{l,t} = \{n \in \omega \mid l < f_t(n)\}.$$

Für jedes Paar $s < t \in I, 1 \leq c \in \omega$ sei

$$B_{s,t,c} = \{n \in \omega \mid cf_s(n) < f_t(n)\}.$$

Für jedes Paar $r < s \in I$ und jede Funktion $g \in \omega^\omega$, für die die Menge $g^{-1}(l)$ durch $FI_s(\mathcal{G}^* \sqcup \{f_t \mid t \in I \setminus [r,s]\}) \mod D$ für alle $l \in \omega$ unterstützt wird, setze

$$C_{g,r,s} = \{n \in \omega \mid g(n) < f_r(n) \text{ oder } f_s(n) < g(n)\}.$$

Sei

$$E = [D \cup A_{l,t} \cup B_{s,t,c} \cup C_{g,r,s}]$$

der Filter auf ω, der durch D gemeinsam mit allen Mengen $A_{l,t}$, $B_{s,t,c}$, $C_{g,r,s}$ erzeugt wird.

Behauptung 4.60. *Wenn $h \in FI(\mathcal{G}^*)$, dann ist $A_h \neq \emptyset \mod E$.*

Diese Behauptung impliziert schon, dass E nicht trivial ist. Den Beweis der Behauptung führen wir später.

Gelte die Behauptung. Damit können wir den Beweis von 4.59 vervollständigen. Wenn wir Lemma 4.53(1) auf die Behauptung anwenden, dann folgt, dass $\mathcal{G}^*$ unabhängig modulo E ist. Nach Lemma 4.53(3) folgt, dass ein maximaler solcher Filter $D^+ \supseteq E$ existiert, modulo welchem $\mathcal{G}^*$ unabhängig ist, damit gilt 4.59(4). Da $A_{l,t} \in D^+$ für alle $t \in I$ und $l \in \omega$, folgt $l < f_t/D^+$ und somit 4.59(1). Mit einem analogen Argument folgt 4.59(2), da $B_{s,t,c} \in D^+$ für alle $s < t \in I$. Sei (I_1, I_2) eine (λ, θ)-Schnitt von I, so dass $\lambda, \theta > \omega$ und $g \in \omega^\omega$. Mit 4.57 folgt, dass für alle $l \in \omega$ eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{G}_l \subseteq \mathcal{G} \sqcup \mathcal{G}^*$ existiert, so dass $g^{-1}(l)$ durch $FI_s(\mathcal{G}_l) \mod D$ unterstützt wird.

Da $\lambda, \theta > \omega$, folgt, dass $r \in I_1$ und $s \in I_2$ existieren, so dass $g^{-1}(l)$ durch $FI_s(\mathcal{G}^* \sqcup \{f_t \mid t \in I \setminus [r,s]\}) \mod D$ für alle $l \in \omega$ unterstützt wird und folglich $C_{g,r,s} \in D^+$. Daraus folgt, wenn $\mathcal{U} \supseteq D^+$ ein Ultrafilter auf ω ist, dass entweder $g/\mathcal{U} < f_r/\mathcal{U}$ oder $f_s/\mathcal{U} < g/\mathcal{U}$ ist. Damit gilt 4.59(3).

Somit genügt es zu zeigen, dass die Behauptung 4.60 gilt. Sei $h \in FI(\mathcal{G}^*)$. Dann genügt es zu zeigen, dass

$$A_h \cap \bigcap_{i \leq a} A_{l_i,t_i} \cap \bigcap_{\substack{c \in J,\\ i<j\leq a}} B_{t_i,t_j,c} \cap \bigcap_{k \leq b} C_{g_k,r_k,s_k} \neq \emptyset \mod D,$$

wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $t_0 < t_1 < \cdots < t_a$ für $t_i \in I$.
- $J \subseteq \omega$ endlich.
- Wenn $k \leq b$, dann $r_k, s_k \in \{t_i \mid i \leq a\}$.

Sei $\mathcal{T} = \{f_{t_i} \mid i \leq a\}$. Wir definieren im Folgenden induktiv eine Folge von Funktionen $h_m \in FI(\mathcal{G} \sqcup \mathcal{G}^*)$ für $m \in \omega$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

1. $h_0 = h$ und $h_m \subseteq h_{m+1}$.
2. $\operatorname{dom} h_m \cap \mathcal{T} = \emptyset$.
3. Wenn $h^* \in FI(\mathcal{T})$ und $k \leq b$, dann tritt für fast alle m einer der beiden folgenden Fälle ein:
   (a) es existiert ein $l \in \omega$, so dass $A_{h_m \cup h^*} \subseteq g_k^{-1}(l) \mod D$, oder
   (b) $A_{h_m \cup h^*} \cap g_k^{-1}(l) = \emptyset \mod D$ für alle $l \in \omega$.

(Wenn (a) auftritt, dann existiert ein *festes* l, so dass $A_{h_m \cup h^*} \subseteq g_k^{-1}(l) \mod D$ für fast alle m. Für den Induktionsanfang $h_0 = h$ ist dies klar.) Um zu sehen, dass die Induktion durchgeführt werden kann, muss als erstes eine Aufzählung von abzählbar vielen Paaren (h^*, k) mit $h^* \in FI(\mathcal{T})$ und $k \leq b$ festgelegt werden. Sei nun h_m definiert und (h^*, k) das nächste Paar, mit dem gearbeitet werden soll. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Es existiert ein $l \in \omega$, so dass $A_{h_m \cup h^*} \cap g_k^{-1}(l) \neq \emptyset \mod D$. Nach Lemma 4.57(1) existiert $\tilde{h} \in FI(\mathcal{G} \sqcup \mathcal{G}^*)$, so dass

   $$A_{\tilde{h}} \subseteq A_{h_m \cup h^*} \cap g_k^{-1}(l) \mod D.$$

   Dann muss gelten, dass $h_m \cup h^* \subseteq \tilde{h}$ und in diesem Fall setze

   $$h_{m+1} = \tilde{h} \restriction ((\mathcal{G} \sqcup \mathcal{G}^*) \setminus \mathcal{T}).$$

2. Sonst muss $A_{h_m \cup h^*} \cap g_k^{-1}(l) = \emptyset \mod D$ für alle $l \in \omega$ und in diesem Fall setze $h_{m+1} = h_m$.

Die so entstandenen h_{m+1} haben offensichtlich die gewünschten Eigenschaften. Sei $k \leq b$ fest, setze $r_k = t_{\iota(k)}$ und $s_k = t_{\tau(k)}$. Setze

$$\mathcal{T}_k = \{f_{t_i} \mid i \notin [\iota(k), \tau(k)]\}\,.$$

Sei $h^* \in FI(\mathcal{T})$. Dann gilt für alle genügend großen m entweder:

(i) es existiert ein $l \in \omega$, so dass $A_{h_m \cup h^*} \subseteq g_k^{-1}(l) \mod D$, oder

(ii) $A_{h_m \cup h^*} \cap g_k^{-1}(l) = \emptyset \mod D$ für alle $l \in \omega$.

Gelte (i): Da $g_k^{-1}(l)$ durch

$$FI_s(\mathcal{G}^* \sqcup \{f_t \mid t \in I \setminus [r_k, s_k]\})$$

unterstützt wird, impliziert Lemma 4.57(3), dass:

(i)' es existiert ein $l \in \omega$, so dass $A_{h_m \cup (h^* \restriction \mathcal{T}_k)} \subseteq g_k^{-1}(l) \mod D$ für fast alle m.

Analoges gilt wenn (ii) erfüllt ist, dann impliziert 4.57(3):

(ii)' für fast alle m ist $A_{h_m \cup (h^* \restriction \mathcal{T}_k)} \cap g_k^{-1}(l) = \emptyset \mod D$ für alle $l \in \omega$.

Sei $\Psi_k \colon \omega^{\mathcal{T}_k} \to \omega \cup \{\infty\}$ die Funktion definiert durch

$$\Psi_k(h^* \restriction \mathcal{T}_k) = \begin{cases} l & \text{wenn (i)' gilt;} \\ \infty & \text{wenn (ii)' gilt.} \end{cases}$$

Für jede unendliche Menge $W \subseteq \omega$, sei $W^{(\mathcal{T})}$ die Menge der Funktionen $h^* \colon \mathcal{T} \to W$, so dass $h^*(f_{t_i}) < h^*(f_{t_j})$ für alle $i < j \leq a$ und für jedes $k \leq b$ setze $\varphi_k \colon \omega^{(\mathcal{T})} \to 3$, als die durch

$$\varphi_k(h^*) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \Psi_k(h^* \restriction \mathcal{T}_k) < h^*(f_{t_{\iota(k)}}); \\ 1 & \text{wenn } \Psi_k(h^* \restriction \mathcal{T}_k) > h^*(f_{t_{\tau(k)}}); \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion. Nach dem Satz von Ramsey 2.25 existiert eine unendliche Menge $W \subseteq \omega$, so dass $\varphi_k \restriction W^{(\mathcal{T})}$ eine konstante Funktion ist für alle $k \leq b$.

Behauptung 4.61. *Für jedes $k \leq b$ ist entweder $\varphi_k \restriction W^{(\mathcal{T})} \equiv 0$ oder $\varphi_k \restriction W^{(\mathcal{T})} \equiv 1$.*

Beweis der Behauptung 4.61. Wir nehmen an, dass $\varphi_k \restriction W^{(\mathcal{T})} \equiv 2$ ist, so dass

$$h^*(f_{t_{\iota(k)}}) \leq \Psi_k(h^* \restriction \mathcal{T}_k) \leq h^*(f_{t_{\tau(k)}})$$

für alle $h^* \in W^{(\mathcal{T})}$. Sei $|\{j \mid \iota(k) \leq j \leq \tau(k)\}| = p$ und sei $h' \colon \mathcal{T}_k \to W$ eine strikt wachsende Funktion, so dass

$$\left|\left\{w \in W \mid h'(f_{t_{\iota(k)-1}}) < w < h'(f_{t_{\tau(k)+1}})\right\}\right| = 2p.$$

Dann können wir h' zu einer Funktion $h^* \in W^{(\mathcal{T})}$ erweitern, so dass entweder

$$\Psi_k(h^* \restriction \mathcal{T}_k) = \Psi_k(h') < h^*(f_{t_{\iota(k)}})$$

oder

$$\Psi_k(h^* \restriction \mathcal{T}_k) = \Psi_k(h') < h^*(f_{t_{\tau(k)}}).$$

Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Wähle nun eine aufsteigende Folge $j_0 < j_1 < \cdots < j_a$ von Elementen aus W, so dass $j_i > l_i$ für jedes $i \leq a$ und setze $h^* \in FI(\mathcal{T})$ als Funktion, die definiert wird durch $h^*(f_{t_i}) = j_i$ für jedes $i \leq a$. Um die Behauptung 4.60 zu Ende zu beweisen, genügt es nun zu zeigen, dass für fast alle m,

$$A_{h_m \cup h^*} \subseteq A_h \cap \bigcap_{i \leq a} A_{l_i,t_i} \cap \bigcap_{\substack{c \in J,\\ i<j\leq a}} B_{t_i,t_j,c} \cap \bigcap_{k \leq b} C_{g_k,r_k,s_k} \mod D.$$

Es ist klar, dass $A_{h_m} \subseteq A_h$ für alle m und

$$A_{h^*} \subseteq \bigcap_{i \leq a} A_{l_i,t_i} \cap \bigcap_{\substack{c \in J,\\ i<j\leq a}} B_{t_i,t_j,c}.$$

Sei $k \leq b$. Wenn $\varphi_k(h^*) = 0$, dann ist $\Psi_k(h^* \restriction \mathcal{T}_k) < h^*(f_{t_{\iota(k)}}) < \infty$ und somit ist für fast alle m:

$$A_{h_m \cup h^*} \subseteq \left\{n \in \omega \mid g_k(n) = \Psi_k(h^* \restriction \mathcal{T}_k) < h^*(f_{t_{\iota(k)}}) = f_{t_{\iota(k)}}(n)\right\} \mod D.$$

Analoges gilt, wenn $\varphi_k(h^*) = 1$ ist und $\Psi_k(h^* \restriction \mathcal{T}_k) < \infty$. Dann ist für fast alle m:

$$A_{h_m \cup h^*} \subseteq \left\{n \in \omega \mid f_{t_{\tau(k)}}(n) = h^*(f_{t_{\tau(k)}}) < \Psi_k(h^* \restriction \mathcal{T}_k) = g_k(n)\right\} \mod D.$$

Andererseits bekommen wir für $\varphi_k(h^*) = 1$ und $\Psi_k(h^* \restriction \mathcal{T}_k) = \infty$ für fast alle m:

$$A_{h_m \cup h^*} \cap \bigcup_{l \leq h^*(f_{t_{\tau(k)}})} g_k^{-1}(l) = \emptyset \mod D.$$

Folglich gilt in diesem Fall, dass für fast alle m:

$$A_{h_m \cup h^*} \subseteq C_{g_k, r_k, s_k} \mod D.$$

Dies vervollständigt den Beweis von Lemma 4.59. $\square$

Bevor wir nun den Satz 4.42 beweisen, stellen wir erst noch sicher, dass eine Familie surjektiver Funktionen der Kardinalität $\kappa = 2^\omega$ existiert, die unabhängig modulo dem Fréchet-Filter ist. Dies besagt gerade der folgende Satz aus dem Buch von Shelah [She90]:

Satz 4.62. *Wenn $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ ist, dann existiert eine Familie $\mathcal{G}$ aus 2^λ-vielen Funktionen von $\lambda \to \lambda$, so dass für alle unterschiedlichen $f_i \in \mathcal{G}$ $(i < \alpha < \kappa)$ und Ordinalzahlen $\gamma_i < \lambda$ $(i < \alpha)$, die Menge*

$$\{\zeta < \lambda \mid \text{ für jedes } i < \alpha,\ f_i(\zeta) = \gamma_i\} \neq \emptyset$$

ist.

Beweis. Sei $\left\{(A_i, \langle C^i_\zeta : \zeta < \alpha_i\rangle, \langle j^i_\zeta : \zeta < \alpha_i\rangle) \mid i < \lambda\right\}$ eine Aufzählung aller Tripel $(A, \langle C_\zeta : \zeta < \alpha\rangle, \langle j_\zeta : \zeta < \alpha\rangle)$, so dass

(i) A Teilmenge von λ ist, $|A| < \kappa$.

(ii) C_ζ eine Teilmenge von A ist und $\zeta(1) \neq \zeta(2)$ bereits $C_{\zeta(1)} \neq C_{\zeta(2)}$ impliziert.

(iii) $\alpha < \kappa$ und $j_\zeta < \lambda$.

Die Anzahl der Tripel ist λ, da $\lambda^{<\kappa} = \lambda$. Wir definieren für jede Teilmenge $B \subseteq \lambda$ eine Funktion $f_B \colon \lambda \to \lambda$. Wir definieren $f_B(i)$ wie folgt:
Wenn $B \cap A_i = C^i_\zeta$, ist $f_B(i) = j^i_\zeta$, sonst ist $f_B(i) = 0$.

Wenn $B_{\alpha(\zeta)}$ $(\zeta < \alpha < \kappa)$ unterschiedlich sind und $j_\zeta < \lambda$ $(\zeta < \lambda)$, können wir eine Teilmenge $A \subseteq \lambda$ finden mit $|A| < \kappa$, so dass $B_{\alpha(\zeta)} \cap A$ unterschiedlich sind, also gilt für ein i, $A_i = A$, $\alpha_i = \alpha$, $C^i_\zeta = B_{\alpha(\zeta)} \cap A$, $j^i_\zeta = j_\zeta$, so dass $f_{B_{\alpha(\zeta)}}(i) = j_\zeta$. Somit ist $\{f_B \mid B \subseteq \lambda\}$ eine Familie, die unsere Bedingungen erfüllt. $\square$

Jetzt haben wir alle Voraussetzungen, um die gewünschte Menge von Ultrafiltern zu konstruieren.

Beweis von 4.42. Sei $2^\omega = \kappa > \omega_1$. Sei $\{J_\alpha \mid \alpha < 2^\kappa\}$ die Menge linearer Ordnungen, die durch Satz 4.48 gegeben wird. Sei $I_\alpha = \omega_1 + J_\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$. Wähle ein festes $\alpha < \kappa$. Zur Vereinfachung der Notation sei vorerst $I_\alpha = I$. Damit konstruieren wir den zugehörigen Ultrafilter $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}$ wie folgt:

Sei $F_0 = \{X \subseteq \omega \mid |\omega \setminus X| < \omega\}$ der Fréchet-Filter auf ω. Mit vorigem Satz folgt dann, dass eine Familie $\mathcal{G} \subseteq \omega^\omega$ surjektiver Funktionen der Kardinalität $\kappa = 2^\omega$ existiert, so dass $\mathcal{G}$ unabhängig $\mod F_0$ ist. Sei $\mathcal{P}(\omega) = \{X_\mu \mid \mu < \kappa\}$ eine Aufzählung der Potenzmenge von ω, $\mathcal{G}$ zählen wir durch die Menge $\left\{f_\zeta^\mu \mid \mu, \zeta < \kappa\right\}$ auf. Wir definieren induktiv über $\mu < \kappa$:

- eine absteigende Folge von Teilmengen

$$\mathcal{G}_\mu \subseteq \left\{f_\zeta^\nu \mid \zeta < \kappa \text{ und } \mu \leq \nu < \kappa\right\}$$

  und

- eine aufsteigende Folge von Filtern D_μ auf ω,

so dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(i) $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$.

(ii) $\left|\left\{f_\zeta^\nu \mid \zeta < \kappa \text{ und } \mu \leq \nu < \kappa\right\} \setminus \mathcal{G}_\mu\right| \leq |\mu| + \omega$.

(iii) D_μ ist ein maximaler Filter, modulo welchem $\mathcal{G}_\mu$ unabhängig ist.

(iv) Es gilt entweder $X_\mu \in D_{\mu+1}$ oder $\omega \setminus X_\mu \in D_{\mu+1}$.

Wenn $\mu = 0$ ist, sei $D_0 \supseteq F_0$ der maximale Filter, modulo welchem $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ unabhängig ist. Wenn μ eine Limeszahl ist, dann definieren wir $\mathcal{G}_\mu = \bigcap_{\nu<\mu} \mathcal{G}_\nu$ und $D_\mu \supseteq \bigcup_{\nu<\mu} D_\nu$ sei ein maximaler Filter, modulo welchem $\mathcal{G}_\mu$ unabhängig ist. Bleibt der Nachfolgerfall $\mu = \nu + 1$ zu zeigen:
Nach Lemma 4.57 existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{F}_\nu \subseteq \mathcal{G}_\nu$, so dass $\mathcal{G}_\nu \setminus \mathcal{F}_\nu$ entweder unabhängig modulo D'_ν oder unabhängig modulo D''_ν ist. Hierbei ist $D'_\nu = [D_\nu \cup \{X_\nu\}]$ und $D''_\nu = [D_\nu \cup \{\omega \setminus X_\nu\}]$.
O.B.d.A. sei $\mathcal{G}_\nu \setminus \mathcal{F}_\nu$ unabhängig modulo D'_ν und $E_\nu \supseteq D'_\nu$ sei der maximale Filter, modulo welchem $\mathcal{G}_\nu \setminus \mathcal{F}_\nu$ unabhängig ist. Sei

$$\mathcal{G}_\mu = \left\{f_\zeta^\tau \in \mathcal{G}_\nu \setminus \mathcal{F}_\nu \mid \mu \leq \tau < \kappa\right\}.$$

Die Menge

$$\mathcal{H}_\nu = \left\{f_\zeta^\tau \in \mathcal{G}_\nu \setminus \mathcal{F}_\nu \mid \tau = \nu\right\}$$

hat Kardinalität κ, somit können wir $\mathcal{H}_\nu$ mit der linearen Ordnung I indizieren und erhalten $\mathcal{H}_\nu = \{f_t^\nu \mid t \in I\}$. Nach Lemma 4.59 existiert ein Filter $D_\mu \supseteq E_\nu$, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Wenn $s \in I$ und $l \in \omega$, dann $l < f_s^\nu / D_\mu$.

2. Wenn $s < t \in I$, dann $f_s^\nu / D_\mu < f_t^\nu / D_\mu$.

3. Sei (I_1, I_2) ein (λ, θ)-Schnitt von I, so dass $\lambda, \theta > \omega$. Dann existiert für keinen Ultrafilter $\mathcal{U} \supseteq D_\mu$ auf ω, eine Funktion $g \in \omega^\omega$, so dass

$$f_s^\nu/\mathcal{U} < g/\mathcal{U} < f_t^\nu/\mathcal{U}$$

für alle $s \in I_1, t \in I_2$.

4. D_μ ist ein maximaler Filter auf ω, modulo welchem $\mathcal{G}_\mu$ unabhängig ist.

Setze $\mathcal{D} = \bigcup_{\mu<\kappa} D_\mu$. Nach (iv) ist $\mathcal{D}$ ein Ultrafilter.

Behauptung 4.63. *Wenn L ein Anfangsstück von $(\prod_\mathcal{D} \omega)/\equiv_\mathcal{D}$ ist, dann existiert ein $\mu < \kappa$, so dass $\{f_t^\mu/\mathcal{D} \mid t \in I\} \subseteq L$.*

Beweis der Behauptung 4.63. Sei $g/\mathcal{D} \in L$. Dann existiert ein $\mu < \kappa$, so dass

$$A_l = \{n \in \omega \mid l < g(n)\} \in D_\mu$$

für alle $l \in \omega$. Da D_μ ein maximaler Filter ist, modulo dem $\mathcal{G}_\mu$ unabhängig ist, impliziert nun Lemma 4.58, dass $f/D_\mu < g/D_\mu$ für alle f in $\mathcal{G}_\mu$. Folglich ist $\{f_t^\mu/\mathcal{D} \mid t \in I\} \subseteq L$. □

Von nun an müssen wir wieder $\mathcal{D}_\alpha, I_\alpha = \omega_1 + J_\alpha$ etc. schreiben.

Behauptung 4.64. *Sei $\alpha < 2^\kappa$ fest gewählt. Dann hat die Menge*

$$E_\alpha = \left\{\beta < 2^\kappa \mid \left((\prod_{\mathcal{D}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}_\alpha}\right) \approx_i^* \left((\prod_{\mathcal{D}_\beta} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}_\beta}\right)\right\}$$

höchstens Kardinalität κ.

Beweis der Behauptung 4.64. Wir nehmen an, dass $|E_\alpha| \geq \kappa^+$ ist.
Für jedes $\beta \in E_\alpha$ sei L_β bzw. M_β ein Anfangsstück von $(\prod_{\mathcal{D}_\beta} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}_\beta}$ bzw. $(\prod_{\mathcal{D}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}_\alpha}$, so dass ein Isomorphismus $\varphi_\beta \colon L_\beta \to M_\beta$ existiert. Nach Behauptung 4.63 existiert für jedes $\beta \in E_\alpha$ ein $\mu_\beta < \kappa$, so dass

$$R_\beta = \left\{f_t^{\mu_\beta}/\mathcal{D}_\beta \mid t \in I_\beta\right\} \subseteq L_\beta.$$

Sei $S_\beta = \left\{f_t^{\mu_\beta}/\mathcal{D}_\beta \mid t \in \omega_1\right\}$ und $T_\beta = \left\{f_t^{\mu_\beta}/\mathcal{D}_\beta \mid t \in J_\beta\right\}$. Sei $\theta = cf(\kappa)+\omega_2$. Dann legt $(\varphi_\beta[S_\beta], \varphi_\beta[T_\beta])$ den (ω_1, θ)-Schnitt (A_β, B_β) von $(\prod_{\mathcal{D}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}_\alpha}$ fest, der definiert wird durch:

$$A_\beta = \{g/\mathcal{D}_\alpha \in ((\prod_{\mathcal{D}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}_\alpha}) \mid k < g/\mathcal{D}_\alpha < \varphi_\beta(s) \text{ für ein } s \in S_\beta,$$
$$\text{für alle } k \in \omega\}$$

und

$$B_\beta = \left\{ g/\mathcal{D}_\alpha \in ((\prod_{\mathcal{D}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}_\alpha}) \mid g/\mathcal{D}_\alpha > \varphi_\beta(t) \text{ für ein } t \in T_\beta \right\}.$$

Nach Satz 4.49 existieren $\beta \neq \gamma \in E_\alpha$, so dass $(A_\beta, B_\beta) = (A_\gamma, B_\gamma)$. Dies ist aber unmöglich, da wir invariante koinitiale Einbettungen von J_β, J_γ nach $B_\beta = B_\gamma$ definieren können durch: $c \mapsto \varphi_\beta(f_c^{\mu_\beta})$ und $d \mapsto \varphi_\gamma(f_d^{\mu_\gamma})$. Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 4.48. $\square$

Also finden wir mit Behauptung 4.64 eine Teilmenge $W \subseteq 2^\kappa$ der Kardinalität 2^κ, so dass

$$((\prod_{\mathcal{D}_\alpha} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}_\alpha}) \not\approx_i^* ((\prod_{\mathcal{D}_\beta} \omega)/\equiv_{\mathcal{D}_\beta})$$

für alle $\alpha \neq \beta \in W$. Damit folgt die Behauptung von Satz 4.42. $\square$

Literatur

[AK07] J. Allsup and R. Kaye. Normal subgroups of nonstandard symmetric and alternating groups. *Arch. Math. Logic*, 46(2):107–121, 2007.

[Bre73] J. L. Brenner. Covering theorems for nonabelian simple groups. II. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 14:264–269, 1973.

[Bre78] J. L. Brenner. Covering theorems for FINASIGs. VIII. Almost all conjugacy classes in $\mathcal{A}_n$ have exponent ≤ 4. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 25(2):210–214, 1978.

[BS69] J.L. Bell and A.B. Slomson. *Models and ultraproducts. An introduction.* , 1969.

[BYBHU08] I. Ben Yaacov, A. Berenstein, C. W. Henson, and A. Usvyatsov. Model theory for metric structures. In *Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 2*, volume 350 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 315–427. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[CK90] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model theory*, volume 73 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1990.

[CSC10] T. Ceccherini-Silberstein and M.l Coornaert. *Cellular automata and groups.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[EHST08] P.l Ellis, S. Hachtman, S. Schneider, and S. Thomas. Ultraproducts of finite alternating groups. *RIMS Kokyuroku*, No. 1619:1–7, 2008.

[ES05] G. Elek and E. Szabó. Hyperlinearity, essentially free actions and L^2-invariants. The sofic property. *Math. Ann.*, 332(2):421–441, 2005.

[ES06] G. Elek and E. Szabó. On sofic groups. *J. Group Theory*, 9(2):161–171, 2006.

[Jec03] T. Jech. *Set theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

[Kas07] M. Kassabov. Symmetric groups and expander graphs. *Invent. Math.*, 170(2):327–354, 2007.

[KSTT05] L. Kramer, S. Shelah, K. Tent, and S. Thomas. Asymptotic cones of finitely presented groups. *Adv. Math.*, 193(1):142–173, 2005.

[Pes08] V. G. Pestov. Hyperlinear and sofic groups: a brief guide. *Bull. Symbolic Logic*, 14(4):449–480, 2008.

[Rot95] J. J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.

[Sco87] W. R. Scott. *Group theory.* Dover Publications Inc., New York, second edition, 1987.

[She90] S. Shelah. *Classification theory and the number of non-isomorphic models. 2nd rev. ed.* Amsterdam etc.: North-Holland, 1990.

[Tho10] S. Thomas. On the number of universal sofic groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(7):2585–2590, 2010.

[Tru96] J.K. Truss. On Recovering Structure from Quotients of their Automorphism Groups (edited W.C.Holland). pages 63–95, 1996.

[Tsu82] T. Tsuzuku. *Finite groups and finite geometries*, volume 70 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982. Translated from the Japanese by A. Sevenster and T. Okuyama [Tetsuro Okuyama].

[TZ12] K. Tent and M. Ziegler. *A course in modeltheory.* Cambridge university Press, 2012.

[Zie92] M. Ziegler. Mengenlehre. Vorlesung an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg (Wintersemester 1992/93). Skript erhältlich unter (http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/skripte/mengenle.pdf), 1992.