Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2008) **7**(4), 825–868 © Cambridge University Press 825
doi:10.1017/S1474748008000236 Printed in the United Kingdom

LA FUSION LIBRE : LE CAS SIMPLE

MARTIN HILS*

Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, 10099 Berlin, Germany (hils@math.hu-berlin.de)

(Reçu le 15 janvier 2007 ; accepté le 1 mai 2007)

Résumé Nous construisons la fusion libre de deux théories géométriques T_1 et T_2, au-dessus d'un réduit commun T_0 qui est supposé fortement minimal et ω-catégorique. Si T_1 et T_2 sont supersimples de rang SU 1 (et sous une hypothèse supplémentaire qui est satisfaite si les T_i sont stables ou si T_0 a une géométrie triviale), nous montrons que les complétions de la fusion libre sont supersimples de rang SU au plus ω.

Abstract We construct the free fusion of two geometric theories over a common ω-categorical strongly minimal reduct. If the two theories are supersimple of rank 1 (and satisfy an additional hypothesis true in particular for stable theories or trivial reduct), the completions of the free fusion are supersimple of rank at most ω.

Mots clés : théorie des modèles ; fusion ; théories simples

Keywords: model theory; fusion; simple theories

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 03C45
Secondary 03C35; 03C60

1. Introduction

En variant la méthode d'amalgamation de Fraïssé, Hrushovski a réussi dans [**11**] à *fusionner* deux théories fortement minimales (ayant des langages disjoints) en une seule. En 1988, il avait déjà emprunté la même méthode d'amalgamation pour construire une théorie fortement minimale non-localement modulaire qui n'interprète pas de groupe infini. Cette théorie est un contre-exemple extrême à la *Conjecture de la trichotomie* de Zilber selon laquelle la géométrie d'un ensemble fortement minimal est triviale ou linéaire si elle ne provient pas d'un corps algébriquement clos. Poizat a établi deux étapes pour la méthode de construction par amalgamation : après la construction d'une structure générique ω-stable de rang ω (appelée *fusion libre* dans le cas de la fusion) suit le collapse sur une théorie fortement minimale.

Hrushovski, dans son article sur la fusion [**11**], a fait remarquer qu'une fusion en une théorie fortement minimale devrait également se faire si les deux théories fortement

* Adresse actuelle : Équipe de Logique Mathématique, Université Paris Diderot Paris 7, UFR de mathématiques case 7012, site Chevaleret, 75205 Paris Cedex 13, France (hils@logique.jussieu.fr).

minimales à fusionner s'intersectaient dans la théorie d'un espace vectoriel sur un corps fini. Plus généralement, le problème d'une *fusion au-dessus d'un sous-langage* se pose, c'est à dire la fusion de deux théories fortement minimales T_1 et T_2 au-dessus d'une troisième T_0 (qui est un réduit commun). Pour des raisons techniques, il vaut mieux supposer que T_0 est ω-catégorique.

Nous avons étudié la fusion libre au-dessus d'un sous-langage dans un travail en commun avec Assaf Hasson [**9**], sous l'hypothèse supplémentaire que les multiplicités soient préservées dans l'une des expansions $T_0 \subseteq T_i$ $(i = 1, 2)$. La théorie de la fusion libre qui en résulte est ω-stable avec un unique type de rang ω, et le collapse est établi sur une théorie fortement minimale dans le cas particulier où T_1 et T_2 sont localement modulaires. Baudisch, Martin-Pizarro et Ziegler ont finalement pu montrer le collapse au-dessus d'un espace vectoriel sur un corps fini en toute généralité [**1**]. Comment on peut, en se servant de ce résultat, obtenir un collapse pour T_0 quelconque, nous l'avons expliqué dans [**10**].

Si l'on lève l'hypothèse sur les multiplicités, on n'obtient plus systématiquement une théorie ω-stable en fusionnant librement. En effet, il y a même des exemples avec T_1 et T_2 localement modulaires et T_0 triviale tel qu'aucune complétion de $T_1 \cup T_2$ ne soit stable (voir l' Exemple 5.8). Nous montrons néanmoins dans cet article que l'on peut toujours fusionner librement T_1 et T_2 au-dessus de T_0 en une théorie supersimple et que cela reste même vrai si nous démarrons dans la catégorie des théories supersimples (de rang SU 1).

Il s'avère que le bon contexte pour une telle fusion libre (pas forcément stable) est bien plus général : au niveau de la construction, il suffit de supposer que T_1 et T_2 soient des théories prégéométriques, et que T_0 soit fortement minimale et modulaire. Pour pouvoir axiomatiser la théorie de la fusion libre obtenue, il nous faudra mettre quelques gouttes d'uniformité.

L'article est organisé comme suit : d'abord, dans § 2, nous rappelons quelques résultats concernant les théories simples et les théories prégéométriques (des théories dans lesquelles la clôture algébrique induit une prégéométrie). Puis, nous construisons la fusion libre de deux théories prégéométriques T_1 et T_2 au dessus de leur réduit commun T_0 qui est supposé fortement minimal et modulaire (§ 3), en considérant la théorie T_ω des structures *riches* d'une certaine classe d'amalgamation. Sous des hypothèses de définissabilité—élimination de $\exists^\infty$ dans T_1 et T_2 ainsi que ω-catgoricité de T_0—nous donnons dans § 4 une axiomatisation explicite de T_ω, et nous déduisons que la fusion libre ainsi construite a modèle-théoriquement un sens, car alors tout modèle suffisamment saturé de T_ω est riche. À l'aide des notions d'indépendance présentes dans les théories T_i et de la notion d'un plongement fort, nous exhibons une notion d'indépendance $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^*$ dans (toute complétion de) T_ω.

Dans § 5, nous supposons que T_1 et T_2 soient supersimples de rang SU égal à 1 (et T_0 toujours ω-catégorique). Sous une hypothèse supplémentaire (satisfaite si les T_i sont stables ou si T_0 a une géométrie triviale), nous montrons que toute complétion de T_ω est supersimple de rang SU au plus ω et que $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^*$ coïncide avec la relation de non-déviation. C'est le contenu du Théorème 5.5, l'un des résultats principaux de l'article. Ensuite, nous étudions les paires magnifiques de modèles de T_ω et nous obtenons comme résultat que toute complétion de T_ω a la propriété faible du non-recouvrement fini (wnfcp).

Enfin, dans la dernière section, nous discutons brièvement comment on peut utiliser les mêmes techniques pour étendre la construction d'une courbe générique plane dans la théorie des corps algébriquement clos [**4**] ainsi que la construction de corps bicolores due à Poizat [**18, 19**] aux théories supersimples de rang SU 1 et même aux théories (pré-)géométriques.

2. Préliminaires

Dans ces préliminaires, nous rappelons quelques résultats connus ; la section nous sert également pour fixer la terminologie ainsi que des notations. Nous utilisons librement des résultats sur les théories stables. On pourra consulter [**16**] ou [**21**].

Nos notations sont plutôt standard. Nous écrivons AB pour $A \cup B$, et $A \subseteq_\omega B$ signifie que A est un sous-ensemble fini de B. En général, nous ne distinguons pas la structure $\mathfrak{M}$ et l'ensemble de base sous-jacent M et écrivons donc M pour les deux. Par un *modèle monstre* d'une théorie complète T, nous entendons un modèle $\mathfrak{C} \models T$ qui est κ-saturé et fortement κ-homogène pour un cardinal régulier κ très grand. Quand nous utilisons un tel modèle monstre, tous les modèles considérés seront des sous-structures élémentaires de $\mathfrak{C}$ et *petits* (i.e. de cardinalité plus petit que κ), c'est à dire $\mathfrak{C}$ sert comme *domaine universel* pour T. Tout sous-ensemble de $\mathfrak{C}$ que nous considérons sera également petit dans ce sens.

2.1. Théories simples

La classe des théories simples a été introduite par Shelah dans [**20**], puis développée par Kim [**14**] et Kim et Pillay [**15**]. À part le graphe aléatoire, les premiers exemples naturels sont les corps pseudofinis et les corps algébriquement clos avec automorphisme générique (voir [**13**] et [**5**]).

Nous remarquons que des expansions génériques (prédicat générique, automorphisme générique) étudiées par Chatzidakis et Pillay [**6**] sont des sources de nouvelles théories simples et en général instables. Pour une introduction aux théories simples on peut consulter [**24**].

Si $\mathrm{tp}(\bar{a}/BA)$ ne dévie pas au-dessus de A, on écrit $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$. Par définition, une théorie (complète) est simple si la relation de non-déviation a un caractère local, c'est à dire si pour tout ensemble de paramètres B et tout uplet (fini) $\bar{a}$ il existe $A \subseteq B$ avec $|A| \leqslant |T|$ et $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$. Si l'ensemble A en question peut toujours être choisi fini, on dit que T est *supersimple*. Toute théorie stable est simple, et une théorie stable est supersimple si et seulement si elle est superstable. Comme dans les théories stables, la relation de non-déviation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$ a de jolies propriétés dans toute théorie simple. Notamment, elle fournit une notion d'indépendance dans le sens de la Définition 2.1, satisfaisant au Théorème d'Indépendance au-dessus d'un modèle.

Définition 2.1. Soit T une théorie complète et $\mathfrak{C}$ un modèle monstre de T. Puis, soit Γ une collection de triplets $(\bar{a}, B, A)$ dans $\mathfrak{C}$. Si $(\bar{a}, B, A) \in \Gamma$, on écrit $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A^{\Gamma} B$. On dit que Γ est une *notion d'indépendance* si les propriétés suivantes (i)–(vii) sont satisfaites.

(i) (*Invariance.*) Γ est invariante par automorphismes de $\mathfrak{C}$.

(ii) (*Non-trivialité.*) Pour tout $\bar{a}$, B, $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{B} \bar{a}$ si et seulement si $\bar{a} \in \mathrm{acl}(B)$.

(iii) (*Caractère local.*) Pour tout $\bar{a}$ et B il existe un sous-ensemble $A \subseteq B$ avec $|A| \leqslant |T|$ tel que $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B$.

(iv) (*Caractère fini.*) $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B$ si et seulement si $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B_0$ pour tout $B_0 \subseteq_\omega B$ fini.

(v) (*Extension.*) Pour tout $\bar{a}$, A et B il existe $\bar{a}'$ avec $\mathrm{tp}(\bar{a}'/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ tel que $\bar{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B$.

(vi) (*Symétrie.*) Pour tout $\bar{a}$, $\bar{b}$ et tout A on a $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} \bar{b}$ si et seulement si $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} \bar{a}$.

(vii) (*Transitivité.*) Pour tout $\bar{a}$, A, B, C on a $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} BC \iff \bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B$ et $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{AB} C$.

Si Γ est une notion d'indépendance, on notera $C \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B$ si pour tout $\bar{c} \in C$ fini on a $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{A} B$.

On dit que Γ satisfait au *théorème d'indépendance au-dessus d'un modèle* si de plus, on a

(viii) pour tout modèle $M \preccurlyeq \mathfrak{C}$, $M \subseteq B_1, B_2$ et $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ tels que $\mathrm{tp}(\bar{a}_1/M) = \mathrm{tp}(\bar{a}_2/M)$, $\bar{a}_i \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{M} B_i$ pour $i = 1, 2$ et $B_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{M} B_2$, il existe un uplet $\bar{a}$ avec $\mathrm{tp}(\bar{a}/B_i) = \mathrm{tp}(\bar{a}_i/B_i)$ (pour $i = 1, 2$) et $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}_{M} B_1B_2$.

Le théorème suivant fournit une caractérisation abstraite de l'indépendance dans une théorie simple, et il s'avère extrêmement utile dans les applications. Il est souvent préférable de montrer la simplicité d'une théorie donnée en dévinant une notion d'indépendance Γ et en passant par ce théorème.

Théorème 2.2 (Théorème de Kim et Pillay [15]). *Soit T une théorie complète. Alors, T est simple si et seulement si T admet une notion d'indépendance Γ satisfaisant au théorème d'indépendance au-dessus d'un modèle.*

De plus, si Γ est une telle notion d'indépendance, on a $\mathop{\smile\!\!\!\!\mid} = \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}^{\Gamma}$, où $\mathop{\smile\!\!\!\!\mid}$ dénote la relation de non-déviation dans T.

Le rang U de Lascar a son analogue en simplicité, noté SU. On observe que $\mathrm{SU}(p) = 0$ si et seulement si p est algébrique. Une théorie simple est supersimple si et seulement si $\mathrm{SU}(p) < \infty$ pour tout type réel p en un nombre fini de variables.

2.2. Propriété de n-amalgamation

La propriété de n-amalgamation a ses origines dans les travaux de Shelah, et elle a été considérée dans un contexte instable par Hrushovski, en montrant que les corps pseudofinis ont cette propriété pour tout n. Dans ce qui suit, nous discutons brièvement une variation, la *propriété de n-amalgamation de modèles.*

Définition 2.3. Soit T une théorie simple, $M \models T$ un modèle et soit Y un ensemble fini. Une famille $S := (C_w)_{w\in\mathcal{P}(Y)}$ de sous-ensembles de M^{eq} satisfaisant, pour tout $w \subseteq Y$

(i) $C_w \subseteq C_{w'}$ pour tout $w \subseteq w' \subseteq Y$ et

(ii) $C_w \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{\bigcup_{w'\subsetneq w} C_{w'}} \bigcup_{\tilde{w}\not\supseteq w} C_{\tilde{w}}$

est appelée un Y-*système indépendant.*

On dit que c'est un Y-*système indépendant de modèles* si en outre $C_w = M_w \preccurlyeq M$ pour tout $w \subseteq Y$.

Dans [**21**], Shelah appelle les systèmes indépendants des *systèmes stables*. Or, comme cette notion nous intéresse aussi dans des théories simples instables, ce terme prêterait à confusion.

Fait 2.4 ([21, XII.2.5]). *Soit T une théorie stable, et $(M_w)_{w\in\mathcal{P}(Y)}$ un Y-système indépendant de modèles. Supposons que $w \not\subseteq \tilde{w}_i$, pour $i = 1,\ldots,r$, et posons $w'_i := \tilde{w}_i \cap w$.*

Si, pour une formule $\varphi(\bar{z}_w, \bar{z}_{\tilde{w}_1},\ldots,\bar{z}_{\tilde{w}_r})$ et des uplets $\bar{a}_w \in M_w$, $\bar{a}_{\tilde{w}_i} \in M_{\tilde{w}_i}$ pour $i = 1,\ldots r$, on a $\models \varphi(\bar{a}_w, \bar{a}_{\tilde{w}_1},\ldots,\bar{a}_{\tilde{w}_r})$, alors il existe $\bar{a}'_{w'_i} \in M_{w'_i}$ (avec $\bar{a}'_{w'_i} = \bar{a}_{\tilde{w}_i}$ si $\bar{a}_{\tilde{w}_i} \in M_{w'_i}$) tels que $\models \varphi(\bar{a}_w, \bar{a}'_{w'_1},\ldots,\bar{a}'_{w'_r})$. □

Une fois pour toute, on choisit un ordre total $\prec$ sur $\mathcal{P}(Y)$ tel que $w \subsetneq w'$ implique $w \prec w'$. Puis, si $S = (C_w)_{w\in\mathcal{P}(Y)}$ est un Y-système indépendant, on introduit les notations suivantes : on pose

$$A^S_w := \bigcup_{w'\subsetneq w} C_{w'} \quad \text{et} \quad B^S_w := \bigcup_{w'\prec w} C_{w'}.$$

Fait 2.5 ([21, XII.2.3]). *Supposons que $S := (C_w)_{w\in\mathcal{P}(Y)}$ satisfait (i) et, pour tout $w \subseteq Y$, la propriété suivante :*

(ii′) $C_w \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A^S_w} B^S_w$.

Alors, S est un Y-système indépendant. □

Lemme 2.6. *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie stable, T' le réduit de T par rapport à $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$. Puis, soit $S := (M_w)_{w\subseteq Y}$ un Y-système indépendant de modèles de T. Alors $S' := (M'_w)_{w\subseteq Y}$ est un Y-système indépendant de modèles de T', où $M'_w := M_w \restriction_{\mathcal{L}'}$.*

Démonstration. Par 2.5, il suffit de montrer que $M_w \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}'_{A^S_w} B^S_w$ pour tout w, la propriété (i) étant trivialement satisfaite. Prenons $\bar{m} \in M_w$ et posons $p' := \mathrm{tp}_{\mathcal{L}'}(\bar{m}/A^S_w)$. Pour toute $\mathcal{L}'(\emptyset)$-formule $\varphi'(\bar{x},\bar{y})$ il existe une $\mathcal{L}'(A^S_w)$-formule $\chi'(\bar{y})$ telle que pour tout $\bar{c}$ on ait $\models \chi'(\bar{c})$ si et seulement si $\varphi'(\bar{x},\bar{c})$ est contenue dans une extension non-déviante de p' à $A^S_w\bar{c}$. En particulier on a $\models \chi'(\bar{a})$ pour tout $\bar{a} \in A^S_w$ avec $\varphi'(\bar{x},\bar{a}) \in p'$.

On raisonne par l'absurde. On trouve donc $\bar{b} \in B^S_w$ avec $\models \neg\chi'(\bar{b}) \wedge \varphi'(\bar{m},\bar{b})$. Donc, par le Fait 2.4, il existe $\bar{a} \in A^S_w$ avec $\models \neg\chi'(\bar{a}) \wedge \varphi'(\bar{m},\bar{a})$. Contradiction. □

Dans la majorité des cas dans la suite, l'ensemble Y sera $\boldsymbol{n} := \{0,\ldots,n-1\}$. Nous notons $\mathcal{P}^-(\boldsymbol{n}) := \mathcal{P}(\boldsymbol{n}) \setminus \{\boldsymbol{n}\}$. Pour $i = 0,\ldots,n-1$, $\hat{\imath}$ dénote l'ensemble $\boldsymbol{n} \setminus \{i\}$ (un élément de $\mathcal{P}^-(\boldsymbol{n})$). Pour tout $w \in \mathcal{P}^-(\boldsymbol{n})$, on se donne un ensemble (infini) de variables x_w tel que $x_w \cap x_{w'} = x_{w\cap w'}$ pour tout w, w'. Si $p_w(x_w)$ est un type complet et $C_w \models p_w$, pour $w' \subseteq w$, $C_{w'}$ est le sous-ensemble de C_w qui correspond à l'inclusion $x_{w'} \subseteq x_w$.

Définition 2.7. Soit T simple, et n un entier naturel.

(1) Un *problème de n-amalgamation de modèles* est la donnée de types complets $p_w(x_w)$ pour $w \in \mathcal{P}^-(\boldsymbol{n})$ tels que pour tout $i \in \boldsymbol{n}$ et tout $M_{\hat{\imath}} \models p_{\hat{\imath}}$ on ait :

$$(M_w)_{w \subseteq \hat{\imath}} \text{ est un } \hat{\imath}\text{-système indépendant de modèles.}$$

(2) Une *solution* à un tel problème est la donnée d'un uplet de variables $x_{\boldsymbol{n}}$ (contenant $\bigcup_{i=0}^{n-1} x_{\hat{\imath}}$) et un type complet $p_{\boldsymbol{n}}(x_{\boldsymbol{n}})$ tel que $p_{\boldsymbol{n}}(x_{\boldsymbol{n}}) \vdash p_{\hat{\imath}}(x_{\hat{\imath}})$ pour tout i et si $\tilde{M}_{\boldsymbol{n}} \models p_{\boldsymbol{n}}$, alors $(\tilde{M}_w)_{w \in \mathcal{P}(\boldsymbol{n})}$ est un $\boldsymbol{n}$-système indépendant de modèles.

(3) On dit que la théorie T a la *propriété de n-amalgamation de modèles*, si tout problème de n-amalgamation de modèles (dans T) admet une solution.

Le fait suivant est bien connu. Les deux parties se montrent simultanément par induction sur n et $\prec$, en utilisant les Faits 2.4 et 2.5.

Fait 2.8. *Soit T stable, et $(p_w(x_w))_{w \in \mathcal{P}^-(n)}$ un problème de n-amalgamation de modèles de T.*

(1) *Il existe une solution $p_{\boldsymbol{n}}(x_{\boldsymbol{n}})$ à ce problème.*

(2) *Cette solution est unique dans le sens suivant : si $p'_{\boldsymbol{n}}(x'_{\boldsymbol{n}})$ est une deuxième solution, alors $p_{\boldsymbol{n}} \upharpoonright_{\bigcup x_{\hat{\imath}}} = p'_{\boldsymbol{n}} \upharpoonright_{\bigcup x_{\hat{\imath}}}$.* □

2.3. Théories prégéométriques

Dans cette section, nous donnons des faits basiques sur les théories (pré-)géométriques (voir la Définition 2.12).

Définition 2.9. Une *prégéométrie (combinatoire)* est la donnée d'un ensemble X et d'un *opérateur de clôture* $\mathrm{cl}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ satisfaisant, pour tout $A, B \subseteq X$ et pour tout $a, b \in X$ (où a et b sont des éléments), les propriétés suivantes.

(i) (*Monotonie.*) $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$. De plus, $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$.

(ii) (*Transitivité.*) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$.

(iii) (*Caractère fini.*) Si $a \in \mathrm{cl}(A)$, il existe un sous-ensemble $A_0 \subseteq A$ fini tel que $a \in \mathrm{cl}(A_0)$.

(iv) (*Propriété d'échange de Steinitz.*) Si $a \in \mathrm{cl}(A \cup \{b\}) \setminus \mathrm{cl}(A)$, alors $b \in \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$.

Les ensembles de la forme $A = \mathrm{cl}(A)$ sont appelés *clos*.

Pour $A \subseteq X$, on peut *localiser* (X, cl) *à* A pour obtenir la prégéométrie (X, cl_A) où $\mathrm{cl}_A(B) := \mathrm{cl}(A \cup B)$ pour tout $B \subseteq X$.

Remarque 2.10. Soit (X, cl) une prégéométrie. On dit que l'ensemble $B \subseteq X$ est *indépendant au-dessus de* A si $b \notin \mathrm{cl}_A(B \setminus \{b\})$ pour tout $b \in B$. On dit que B est une *base pour* $C \supseteq B$ *au-dessus de* A si B est indépendant au-dessus de A et $C \subseteq \mathrm{cl}_A(B)$.

Par la propriété d'échange de Steinitz, de telles bases existent (tout sous-ensemble de C qui est indépendant au-dessus de A et maximal avec cette propriété est une base de C au-dessus de A), et deux bases ont la même cardinalité. Cette cardinalité est appelée la *dimension de* C *au-dessus de* A et notée $\dim(C/A)$.

Enfin, on dit que C *est indépendant de* D *au-dessus de* A, si $\dim(C_0/A) = \dim(C_0/A \cup D)$ pour tout sous-ensemble fini C_0 de C.

Soit (X, cl) une prégéométrie.

- (X, cl) est *triviale*, si $\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}(\{a\})$ pour tout $\emptyset \neq A \subseteq X$.
- (X, cl) est *modulaire*, si pour tous ensembles clos $A, B \subseteq X$, A est indépendant de B au-dessus de $A \cap B$. De manière équivalente, pour tous ensembles clos A, B de dimension finie, $\dim(AB) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$.
- (X, cl) est *localement finie* si $\mathrm{cl}(A)$ est fini pour tout $A \subseteq_\omega X$.

Notons qu'une prégéométrie triviale est modulaire.

Fait 2.11. *Soit* (X, cl) *une prégéométrie modulaire. Alors, le treillis des sous-ensembles clos de* X *est modulaire. Cela signifie : si* C *et* $A \subseteq B$ *sont des ensembles clos, alors* $\mathrm{cl}(A(B \cap C)) = B \cap \mathrm{cl}(AC)$.

Une théorie T *élimine le quanteur* $\exists^\infty$ si pour toute formule $\varphi(x, \bar{z})$ il existe une formule $\theta(\bar{z})$ telle que $T \vdash \exists^\infty x \varphi(x, \bar{z}) \leftrightarrow \theta(\bar{z})$. C'est équivalent à l'existence d'un entier n_φ satisfaisant, dans tout $M \models T$: si pour $\bar{b} \in M$, la formule $\varphi(x, \bar{b})$ a plus de n_φ solutions dans M, alors $\varphi(x, \bar{b})$ a une infinité de solutions dans M.

Définition 2.12.

- Une théorie complète T est appelée *prégéométrique* si dans tout $M \models T$, la clôture algébrique satisfait à la propriété d'échange de Steinitz.
- Si de plus T élimine $\exists^\infty$, on dit que T est *géométrique*.
- On dit que la structure M est *(pré-)géométrique* si $\mathrm{Th}(M)$ l'est.

Nous avons emprunté la notion d'une théorie prégéométrique de [**7**], où l'on peut aussi trouver quelques propriétés de base de ces théories.

Notons que dans toute structure M, l'opérateur $\mathrm{acl}(\cdot)$ est monotone, transitif et de caractère fini. Il induit donc une prégéométrie sur M précisément s'il satisfait à la propriété d'échange de Steinitz.

Exemples 2.13.

(1) Toute théorie fortement minimale (avec $\dim(A/B) = \mathrm{RM}(A/B)$ pour tout A fini), plus généralement toute théorie supersimple de rang SU 1 est géométrique, et on a $\dim(A/B) = \mathrm{SU}(A/B)$ (si A est fini) dans une telle théorie. La propriété d'échange pour ces théories est une conséquence des inégalités de Lascar ; quant à l'élimination de $\exists^\infty$, voir [**12**, Lemma 4.2].

(2) La théorie des corps réel-clos, plus généralement toute expansion o-minimale de $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <)$ est géométrique [**22**].

(3) $\mathbb{Q}_p$ (le corps des p-adiques) est géométrique. Plus généralement, toute théorie p-minimale est géométrique [**8**].

(4) Si T est géométrique et T_P la théorie qu'on obtient en ajoutant un prédicat aléatoire à T, alors toute complétion de T_P est géométrique [**6**].

Un exemple d'une théorie prégéométrique qui n'est pas géométrique est la théorie d'une relation d'équivalence avec exactement une classe à n éléments, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette théorie est ω-stable de rang de Morley (et de Lascar) égal à 2.

Définition 2.14. Soit T une théorie prégéométrique et dim la notion de dimension par rapport à la prégéométrie induite par acl.

- Pour $p \in S^n(A)$ on pose $\dim(p) := \dim(\bar{a}/A)$, où $\bar{a} \models p$.
- Si $\pi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ est un type partiel (à paramètres dans A), on pose $\dim(\pi) := \max\{\dim(p) \mid \pi \subseteq p \in S^n(A)\}$.

Soit $\pi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ un type partiel. Par induction sur n, on montre

$$\dim(\pi(x_0, \ldots, x_{n-1})) = n \iff \models \exists^\infty x_0 \cdots \exists^\infty x_{n-1} \pi(\bar{x}). \tag{2.1}$$

Plus généralement pour $r \in \mathbb{N}$ quelconque on a $\dim(\pi(x_0, \ldots, x_{n-1})) \geqslant r$ si et seulement s'il existe un sous-ensemble $I \subseteq \boldsymbol{n}$ de cardinalité r tel que la projection de $\pi(\bar{x})$ sur les coordonnées $\bar{x}_I$ (donnée par $\exists \bar{x}_{\boldsymbol{n} \setminus I} \pi(\bar{x})$) soit de rang r.

Notre définition de $\dim(\pi)$ ne dépend donc pas de l'ensemble de paramètres A considéré, et l'existence de points génériques en découle (si π est définit sur B, alors il existe $\bar{a} \models \pi$ avec $\dim(\bar{a}/B) = \dim(\pi)$: on dit qu'un tel uplet $\bar{a}$ est *générique dans* π *au-dessus de* B). En particulier, si $p \in S(B)$ et $B \subseteq A$, il existe $q \in S(A)$ étendant p avec $\dim(q) = \dim(p)$. (Un tel q est appelé une *extension libre* de p.) Notons également que $\dim(\pi(\bar{x}))$ est égal au minimum des $\dim(\varphi(\bar{x}))$ quand $\varphi(\bar{x})$ parcours les formules dans $\pi(\bar{x})$.

À l'aide de la caractérisation de $\dim(\pi(\bar{x})) \geqslant r$ donnée ci-dessus, on établit les résultats suivants.

Fait 2.15. *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie prégéométrique et $T' = T \restriction_{\mathcal{L}'}$ un réduit (pour $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$).*

(a) *T' est prégéométrique (géométrique si T est géométrique).*

(b) *Si π' est un $\mathcal{L}'$-type partiel, alors $\dim_T(\pi') = \dim_{T'}(\pi')$.*

Démonstration. Nous donnons l'argument pour la première partie de (a), car il semble que ce fait—quoiqu'il admette une preuve élémentaire—n'est pas très connu. Soit donc T une $\mathcal{L}$-théorie prégéométrique et $T' = T \restriction_{\mathcal{L}'}$ un réduit. Soit C un ensemble de paramètres et a, b des singletons avec $a \in \mathrm{acl}_{T'}(Cb) \setminus \mathrm{acl}_{T'}(C)$. Il faut montrer que $b \in \mathrm{acl}_{T'}(Ca)$. Soit $p'(x,y) := \mathrm{tp}_{\mathcal{L}'}(a,b/C)$. On déduit des hypothèses que $T' \not\models \exists^\infty y \exists^\infty x p'(x,y)$, en particulier $T \not\models \exists^\infty y \exists^\infty x p'(x,y)$. Comme T est prégéométrique, on a donc $T \not\models \exists^\infty x \exists^\infty y p'(x,y)$ et enfin $T' \not\models \exists^\infty x \exists^\infty y p'(x,y)$, c'est à dire $b \in \mathrm{acl}_{T'}(Ca)$.

Autrement dit : une théorie est prégéométrique si et seulement si les quanteurs $\exists^\infty x$ et $\exists^\infty y$ commutent, et cette dernière propriété est préservée dans des réduits. □

Fait 2.16. *Soit T une théorie géométrique. Alors, la dimension est définissable dans T, c'est à dire pour toute formule $\varphi(\bar{x},\bar{z})$ et tout entier r il existe une formule $\theta(\bar{z})$ telle que* $\dim(\varphi(\bar{x},\bar{b})) = r$ *si et seulement si* $\models \theta(\bar{b})$. □

Définition 2.17. Soit T une théorie prégéométrique et soit $p = \mathrm{tp}(\bar{a}/B) \in S(B)$ un type donné, $\bar{a} = (a_0, \dots, a_{n-1})$. Pour $I, J \subseteq \boldsymbol{n}$ on pose $k_{I/J} := \dim(a_I/a_J B)$.

Soit $\varphi(\bar{x},\bar{z})$ une formule telle que $\varphi(\bar{x},\bar{b})$ soit dans p. On dit que $\varphi(\bar{x},\bar{z})$ est *rang-complète par rapport à p* si les conditions suivantes sont satisfaites.

- Si $\varphi(\bar{x},\bar{b}') \neq \emptyset$, alors $\dim(\varphi(\bar{x},\bar{b}')) = \dim(\bar{a}/B)$.
- $\models \varphi(\bar{a}',\bar{b}')$ implique $\dim(\bar{a}'_I/\bar{a}'_J\bar{b}') \leqslant k_{I/J}$ pour tout $I, J \subseteq \boldsymbol{n}$.

Notons que si $\models \varphi(\bar{a}',\bar{b}')$ et $\dim(\bar{a}'/\bar{b}') = \dim(\bar{a}/\bar{b})$, alors $\dim(\bar{a}'_I/\bar{a}'_J\bar{b}') = k_{I/J}$ pour tout $I, J \subseteq \boldsymbol{n}$.

La formule $\varphi(\bar{x},\bar{z})$ est dite *rang-complète* s'il existe $\bar{b}$ et un type p tels que $\varphi(\bar{x},\bar{b})$ soit rang-complète par rapport à p.

Lemme 2.18. *Soit T une théorie géométrique et soit $p = \mathrm{tp}(\bar{a}/B) \in S(B)$ un type donné. Alors, p contient une formule $\varphi(\bar{x},\bar{b})$ telle que $\varphi(\bar{x},\bar{z})$ soit rang-complète par rapport à p. Plus précisément, ces formules sont cofinales dans p.* □

Notons que, par définition, si $\varphi(\bar{x},\bar{b})$ est rang-complète par rapport à $p \in S(\bar{b})$, alors p est générique dans $\varphi(\bar{x},\bar{b})$.

Notation. Si T est une théorie prégéométrique, nous notons $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{alg}}_B C$ le fait que A et C sont *algébriquement indépendant* au-dessus de B, c'est à dire que $\dim(A_0/BC) = \dim(A_0/B)$ pour tout $A_0 \subseteq_\omega A$.

Fait 2.19. *Dans toute théorie prégéométrique, $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{alg}}$ définit une notion d'indépendance au sens de la Définition 2.1.* □

Notons que si $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{alg}}$ est égal à la relation de non-déviation, alors T est supersimple de rang SU égal à 1.

3. Fusion libre de théories prégéométriques

Dans cette section, nous montrons comment on peut fusionner librement deux théories prégéométriques, au-dessus d'une théorie fortement minimale et modulaire, en utilisant la méthode d'amalgamation de Hrushovski. Nous définissons la classe des *fusions* $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$ (avec une notion de *plongement fort* $\leqslant$), et nous mettons en place les outils de base pour le travail dans cette classe.

Il est utile d'introduire plusieurs notions de clôtures (ce que nous faisons), dont chacune aura sa place dans la suite.

Puis, nous montrons l'existence des *amalgames libres* dans $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$, c'est à dire dans la classe des fusions avec les plongements forts comme plongements. En particulier, il s'en suit que $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$ a la propriété d'amalgamation. Quitte à choisir une composante connexe de cette classe, cela permet de construire des structures riches (pour la sous-classe des fusions finiment engendrées $(\mathcal{C}_0, \leqslant)$), dans la Proposition 3.19.

D'abord, nous indiquons le contexte dans lequel nous travaillons, et nous fixons quelques notations.

Nous considérons des théories complètes T_1 et T_2, dans des langages $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, respectivement, ayant un réduit commun $T_0 := T_1 \upharpoonright \mathcal{L}_0 = T_2 \upharpoonright \mathcal{L}_0$, où $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Nous supposerons que les théories satisfassent aux propriétés suivantes.

- Pour $i = 1, 2$, la théorie T_i est prégéométrique, c'est à dire l'opérateur de clôture algébrique induit une prégéométrie dans tout modèle de T_i.
- T_0 est fortement minimale et modulaire.

Nous écrivons d_i pour $\dim_{T_i}$, et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}$ pour $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{alg}}$ par rapport à la théorie T_i. Enfin, acl_i dénote la clôture algébrique au sens de T_i.

Pour simplifier l'exposition, on supposera les hypothèses suivantes.

Hypothèses 3.1 (hypothèses sur les langages dans la fusion).

- Pour $i = 0, 1, 2$, la théorie T_i élimine les quanteurs dans le langage $\mathcal{L}_i$, et $\mathcal{L}_i$ ne contient pas de symboles de fonctions.
- $\mathrm{acl}_i(\emptyset)$ est infini pour $i = 1, 2$.
- Les langages $\mathcal{L}_i$ sont dénombrables.

Quitte à passer à des morleyisées et quitte à remplacer les fonctions par leurs graphes, on peut toujours supposer le premier point. Pour satisfaire à la seconde condition, il suffit d'ajouter—au besoin—des constantes aux langages $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$.

Nous appelons (T_0, T_1, T_2) un *contexte de fusion*, si T_0, T_1 et T_2 satisfont à toutes les hypothèses ci-dessus.

3.1. Construction

Afin de fusionner (librement) T_1 et T_2 au-dessus de T_0, nous procédons comme dans [**9**], l'inspiration originale étant bien sûr [**11**]. Pour $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ on définit $\tilde{\mathcal{C}}$ comme la classe des $\mathcal{L}$-structures $M \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$ avec $M = \mathrm{acl}_1(M) = \mathrm{acl}_2(M)$. Comme T_1 et T_2 éliminent les quanteurs, cette définition a un sens.

Par convention, toutes les $\mathcal{L}_i$-formules considérées seront sans quanteurs (c'est à dire chaque $\mathcal{L}_i$-formule qui apparaît est remplacée par une $\mathcal{L}_i$-formule sans quanteurs qui lui est équivalente modulo T_i).

Remarque 3.2. Si $M \in \tilde{\mathcal{C}}$, alors $M \models T_0$.

Démonstration. Soit $M \in \tilde{\mathcal{C}}$. Comme M est acl_1-clos (donc infini par les Hypothèses 3.1), en particulier, M est acl_0-clos et infini. Or, on sait que tout ensemble infini algébriquement clos dans une théorie fortement minimale est un modèle. $\square$

Pour $A \subseteq M \in \tilde{\mathcal{C}}$ on définit $\langle A \rangle$ comme le plus petit sous-ensemble de M contenant A qui est algébriquement clos au sens de T_1 et T_2. D'une manière équivalente, $\langle \cdot \rangle$ correspond à la clôture transitive des opérateurs acl_1 et acl_2. On dit que M est *finiment engendrée* (dans le sens de $\langle \cdot \rangle$), si $M = \langle \bar{b} \rangle$ pour un uplet $\bar{b} \in M$ fini. Soit $\mathcal{C}$ la classe des structures dans $\tilde{\mathcal{C}}$ qui sont finiment engendrées.

Définition 3.3. Soient $M \in \tilde{\mathcal{C}}$, et $A, B \subseteq M$ avec $\mathrm{d}_0(A)$ fini.

(1) $\delta(A) := \mathrm{d}_1(A) + \mathrm{d}_2(A) - \mathrm{d}_0(A)$, la *prédimension* de A.

(2) $\delta(A/B) := \mathrm{d}_1(A/B) + \mathrm{d}_2(A/B) - \mathrm{d}_0(A/B)$.

(3) $\tilde{\mathcal{C}}_0 := \{M \in \tilde{\mathcal{C}} \mid \delta(A) \geqslant 0 \ \forall A \subseteq_\omega M\}$, $\mathcal{C}_0 := \tilde{\mathcal{C}}_0 \cap \mathcal{C}$. Les structures dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ seront appelées *fusions.*

(4) Si $M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, $\mathrm{d}_M(A) := \min\{\delta(\tilde{A}) \mid A \subseteq \tilde{A} \subseteq_\omega M\}$, la *dimension* de A dans M. De manière analogue, on définit la dimension relative $\mathrm{d}_M(A/B) := \min\{\mathrm{d}_M(AB_0) - \mathrm{d}_M(B_0) \mid B_0 \subseteq_\omega B\}$.

(5) Pour $M \in \mathcal{C}_0$, on pose $\delta(M) := \min\{\delta(A) \mid A \subseteq_\omega M \text{ et } \langle A \rangle = M\}$. De plus, si M est finiment engendrée au-dessus de $A \subseteq M$, on peut définir $\delta(M/A)$.

(6) Soient $C \subseteq B$ deux sous-ensembles acl_0-clos d'une structure dans $\tilde{\mathcal{C}}$. Alors, on pose $C \leqslant B$ (C est *autosuffisant* ou *fort* dans B) si pour tout uplet fini $\bar{b}$ de B on a $\delta(\bar{b}/C) \geqslant 0$.

En général, les fusions sont dénotées par K, L, etc., tandis que k, l, etc., sont réservées pour des fusions finiment engendrées (i.e. les structures dans $\mathcal{C}_0$). Remarquons que $\delta(A/B) = \delta(AB) - \delta(B)$ si $\mathrm{d}_0(B)$ est fini.

Il est commode d'étendre la notion d'un sous-ensemble autosuffisant aux sous-ensembles arbitraires $C \subseteq B \subseteq K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$. On pose $C \leqslant B$ si et seulement si $\mathrm{acl}_0(C) \leqslant \mathrm{acl}_0(B)$. Contrairement au cas où B est acl_0-clos, cette notion peut dépendre du plongement particulier de B dans K.

Par définition, on a $\tilde{\mathcal{C}}_0 = \{M \in \tilde{\mathcal{C}} \mid \emptyset \leqslant M\}$. Notons également que $\delta(A) = \delta(\mathrm{acl}_0(A))$.

Remarque 3.4. Si T_0 est ω-catégorique, alors $\tilde{\mathcal{C}}_0$ est une classe élémentaire.

Démonstration. Soient $\varphi_i(\bar{x})$ des $\mathcal{L}_i(\emptyset)$-formules, pour $i = 1, 2$, avec $\dim(\varphi_i(\bar{x})) = m_i$. Pour une telle paire on met l'axiome suivant—une condition définissable car T_0 est ω-categorique :

$$\forall \bar{x}\{[\varphi_1(\bar{x}) \wedge \varphi_2(\bar{x})] \to [\mathrm{d}_0(\bar{x}) \leqslant m_1 + m_2]\}.$$

□

Définition 3.5. Soit $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ une fusion et $A \subseteq K$. On dit que A *contrôle* K si $\langle A \rangle = K$ et $A \leqslant K$. Si $B \subseteq K$, on dit que A *contrôle* K *au-dessus de* B si AB contrôle K.

On observe que pour A fini on a $\delta(\langle A \rangle) \leqslant \delta(A)$, avec égalité si et seulement si $\langle A \rangle$ est contrôlé par A.

Dans le lemme suivant, nous rassemblons les propriétés de base de la prédimension et de la notion de l'autosuffisance. Ces résultats seront utilisés constamment dans la suite, la plupart du temps sans référence.

Lemme 3.6 ([9, Lemma 3.1]*). *Soit $K \in \tilde{\mathcal{C}}$, contenant tous les ensembles et uplets qui apparaissent dans les énoncés suivants.*

(1) (*Sous-modularité.*) *Soit $A \subseteq B$. Alors, $\delta(\bar{c}/\mathrm{acl}_0(A\bar{c}) \cap \mathrm{acl}_0(B)) \geqslant \delta(\bar{c}/B)$. En particulier, si $B \leqslant C$ et $D \subseteq C$ sont des ensembles acl_0-clos, alors $D \cap B \leqslant D$.*

(2) (*Transitivité.*) *Si $A \leqslant B$ et $B \leqslant C$, alors $A \leqslant C$.*

(3) (*Continuité.*) *Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système filtré de sous-ensembles de C (c'est à dire pour tout $i, j \in I$ il existe $k \in I$ avec $A_i \cup A_j \subseteq A_k$) tel que $A_i \leqslant C$ pour tout i, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \leqslant C$.*

(4) *Soient $A_1, A_2 \leqslant B$ des sous-ensembles forts et acl_0-clos de B. Alors $A_1 \cap A_2 \leqslant B$.*

Si de plus $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, alors on a les propriétés suivantes.

(5) *Pour tout $A \subseteq K$ il existe un unique ensemble $\mathrm{cl}_0^K(A)$ qui est minimal parmi les ensembles A' ayant les propriétés suivantes : $A' \supseteq A$, $A' \leqslant K$ et $A' = \mathrm{acl}_0(A')$. Si $\mathrm{d}_0(A)$ est fini, alors $\mathrm{d}_0(\mathrm{cl}_0^K(A))$ est fini aussi. De plus, on a $\mathrm{d}_K(A) = \delta(\mathrm{cl}_0^K(A))$.*

(6) *Soient $A \subseteq B \subseteq C$ finis. Alors, on a $\mathrm{d}_K(C/A) = \mathrm{d}_K(C/B) + \mathrm{d}_K(B/A)$, $\mathrm{d}_K(B/A) \leqslant \mathrm{d}_K(C/A)$ et $\mathrm{d}_K(C/A) \geqslant \mathrm{d}_K(C/B)$.*

(7) *$\mathrm{d}_K(a/B) \in \{0, 1\}$ pour tout singleton a, et l'opérateur de clôture géométrique (aussi appelée d-clôture) $\mathrm{cl}_{\mathrm{d}}^K(B) := \{a \in K \mid \mathrm{d}_K(a/B) = 0\}$ définit une prégéométrie.* □

Nous introduisons encore un autre opérateur de clôture pour lequel on réserve le terme de clôture autosuffisante.

* Notre énoncé est plus général que celui montré dans [**9**]. Or, chaque fois que nous citons ce papier, il est sous-entendu que la même preuve donne le résultat dans notre contexte plus général. Concernant les notations, il y a une différence considérable avec [**9**], où sont empruntés des notations qui pouvaient parfois prêter à confusion. Ainsi, nous écrivons $\mathrm{cl}_0(A)$, $\mathrm{cl}_\omega(A)$ et $\mathrm{cl}_{\mathrm{d}}(A)$, parfois avec un superscript K, pour les ensembles notés $\bar{A}$, $\mathrm{cl}(A)$ et $\mathrm{cl}^{\mathrm{geom}}(A)$, respectivement, dans [**9**].

Définition 3.7. Soit K une fusion et $A \subseteq K$. Alors on pose $\mathrm{cl}_\omega^K(A) := \langle \mathrm{cl}_0^K(A) \rangle$, la *clôture autosuffisante* de A (dans K).

Notons que la clôture autosuffisante de A est égale à la plus petite fusion contenant A qui est contenue dans K de manière autosuffisante.

Dans la suite, on écrira d, cl_0 et cl_ω au lieu de d_K, cl_0^K et cl_ω^K, si l'on ne risque pas d'ambiguïté. (Cet usage est justifié par la Remarque 3.8 ci-dessous.) On observe que $\mathrm{acl}_0(A) \subseteq \mathrm{cl}_0(A) \subseteq \mathrm{cl}_\omega(A) \subseteq \mathrm{cl}_\mathrm{d}(A)$.

Puisque cl_d donne lieu à une prégéometrie, il y a une notion de dimension associée. Clairement, cette dimension est égale à la dimension d déjà définie pour les ensembles finis. Nous étendons donc la définition de d, et à partir de maintenant, $\mathrm{d}(A/B)$ dénote la dimension (au sens de la prégéométrie) pour des ensembles A et B arbitraires.

Remarque 3.8. Soient $K \leqslant L$ des fusions et $A \subseteq K$. Alors, $\mathrm{d}_K(A) = \mathrm{d}_L(A)$, $\mathrm{cl}_0^K(A) = \mathrm{cl}_0^L(A)$ et $\mathrm{cl}_\omega^K(A) = \mathrm{cl}_\omega^L(A)$.

Démonstration. Par transitivité de $\leqslant$ et Lemme 3.6 (4), $\mathrm{cl}_0^K(A) = \mathrm{cl}_0^L(A)$. Le résultat sur cl_ω en découle. Puis, $\mathrm{d}_K(A) = \delta(\mathrm{cl}_0^K(A)) = \delta(\mathrm{cl}_0^L(A)) = \mathrm{d}_L(A)$, par le Lemme 3.6 (5). □

Voilà un lemme facile que nous utiliserons très souvent.

Lemme 3.9. *Soit $B \leqslant K$.*

(1) *Soit $A \subseteq_\omega K$ avec $\delta(A/B) \leqslant 0$. Alors, $\delta(A/B) = 0$ et $AB \leqslant K$.*

(2) *Pour tout uplet $\bar{a} \in \mathrm{acl}_1(B)$, on a $\mathrm{d}_2(\bar{a}/B) = \mathrm{d}_0(\bar{a}/B)$, $\delta(\bar{a}/B) = 0$ et $B\bar{a} \leqslant K$. En particulier, $\mathrm{acl}_i(B) \leqslant K$ pour $i = 1, 2$ et $\langle B \rangle \leqslant K$.*

Démonstration. Soit $A \subseteq_\omega K$ avec $\delta(A/B) \leqslant 0$. Alors, $\delta(A/B) = 0$ suit du fait que $\delta(A'/B) \geqslant 0$ pour tout $A' \subseteq_\omega K$ par la définition de l'autosuffisance. Puis, soit $C \subseteq_\omega K$ arbitraire. Donc, $0 \leqslant \delta(AC/B) = \delta(C/AB) + \delta(A/B) = \delta(C/AB)$, d'où $AB \leqslant K$, et (1) est montré.

La deuxième partie suit de la première, par induction et continuité. Il suffit de noter que pour toute expansion de théories prégéométriques $T' \subseteq T$ et $\bar{a}, B \subseteq M \models T$, on a $\mathrm{d}(\bar{a}/B) \leqslant \mathrm{d}'(\bar{a}/B)$. □

Lemme 3.10. *Soit $K \in \tilde{\mathcal{C}}$. Supposons que pour $i = 1, 2$, des $\mathcal{L}_i$-types $p_i(x_I) \in S^I(K)$ soient donnés, avec $p_0 := p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0} = p_2 \restriction_{\mathcal{L}_0}$. Alors il existe une extension $L \in \tilde{\mathcal{C}}$ de K et $A \subseteq L$ tel que $A \models p_1 \cup p_2$ et L est contrôlée par A au-dessus de K.*

Démonstration. Par le lemme de consistance de Robinson, il existe A avec $KA \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$ et $A \models p_1 \cup p_2$.

(∗) Pour tout $B \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$ il y a un $L \in \tilde{\mathcal{C}}$ contrôlé par B.

Il suffit de montrer (∗), ce que nous faisons maintenant.

On choisit des $\mathcal{L}_i$-plongements $\iota_i : B \subseteq M_i \models T_i$ $(i = 1, 2)$, où les M_i sont suffisamment saturés. Quitte à choisir un $\mathcal{L}_0(B)$-isomorphisme de $\mathrm{acl}_0(\iota_1(B))$ avec $\mathrm{acl}_0(\iota_2(B))$, on peut supposer que $B = \mathrm{acl}_0(B)$. Si B n'est pas acl_1-clos, on choisit b' dans M_1 avec $b' \in \mathrm{acl}_1(B) \setminus B$ (nous supposons que les ι_i sont des inclusions). On pose $B' := \mathrm{acl}_0(Bb')$, et on fait de B' un $T_2^{\forall}$-modèle (une $\mathcal{L}_2$-extension de B) en exigeant que $\mathrm{d}_2(b'/B) = 1$. Pour cela, il suffit de choisir un élément $b'' \in M_2$ avec $b'' \notin \mathrm{acl}_2(B)$; l'application qui envoie b' sur b'' s'étend en un $\mathcal{L}_0(B)$-isomorphisme $B' \simeq B'' := \mathrm{acl}_0(Bb'')$. En utilisant cette application, on peut équiper B' d'une $\mathcal{L}$-structure telle que $B' \models T_1^{\forall} \cup T_2^{\forall}$. Tout uplet $\bar{a}$ de B' qui n'est pas entièrement contenu dans B, est interalgébrique (au sens de $\mathcal{L}_0$) au-dessus de B avec b', et donc $\delta(\bar{a}/B) = \delta(b'/B) = 0 + 1 - 1 = 0$. On en déduit que $B \leqslant B'$.

Maintenant, on continue avec B' au lieu de B. Posons $B_0 := B$ et $B_1 := B'$. Si B_1 n'est pas acl_1-clos, on choisit $b' \in \mathrm{acl}_i(B_1) \setminus B_1$, et comme avant on trouve $B_1 \leqslant B_2 = \mathrm{acl}_0(B_1 b') \models T_1^{\forall} \cup T_2^{\forall}$. Ainsi, prenant la réunion pour les ordinaux limites, on obtient une suite croissante $(B_\beta)_\beta$ de modèles de $T_1^{\forall} \cup T_2^{\forall}$, avec $B_\beta \subseteq \mathrm{acl}_1(B)$ pour tout β. Il est clair que cette chaîne s'arrête, et il existe donc α tel que $B_\alpha = \mathrm{acl}_1(B_\alpha)$. Par transitivité et continuité de l'autosuffisance, $B = B_0 \leqslant B_\alpha$.

Posons $B^1 := B_\alpha$. En échangeant les rôles de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, on obtient, à l'aide d'une deuxième chaîne, une structure $B^1 \leqslant B^2 \models T_1^{\forall} \cup T_2^{\forall}$ telle que $B^2 = \mathrm{acl}_2(B^1)$. On continue en alternant $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ et on obtient donc $B \leqslant B^1 \leqslant B^2 \leqslant \cdots \leqslant B^n \leqslant \cdots$ tels que $B^{2m+1} = \mathrm{acl}_1(B^{2m})$ et $B^{2m+2} = \mathrm{acl}_2(B^{2m+1})$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Soit $L := \bigcup_{n<\omega} B^n$. Alors, par construction, on a $L = \langle B \rangle$ et $B \leqslant L$, c'est à dire L est contrôlée par B. □

Définition 3.11. Soient $K \subseteq L, M$ trois structures dans $\tilde{\mathcal{C}}$ (nous continuons à écrire des inclusions au lieu de plongements). On dit que $N \in \tilde{\mathcal{C}}$ contenant L et M est un *amalgame libre de L et M au-dessus de K* s'il satisfait aux conditions suivantes :

(α) $M \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\,i}_{K} L$, pour $i = 0, 1, 2$ et

(β) N est contrôlée par ML.

Par abus du langage, on écrit $N = M \otimes_K L$ si N est un amalgame libre de M et L au-dessus de K, même si on n'a pas l'unicité de l'amalgame libre.

Lemme 3.12. *Dans la classe $\tilde{\mathcal{C}}$, les amalgames libres existent.*

Démonstration. Soit $K \subseteq L, M$ trois structures dans $\tilde{\mathcal{C}}$. Notons d'abord que si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\,i}_{B} C$ pour un $B = \mathrm{acl}_i(B)$, alors $\mathrm{acl}_i(AB) \cap \mathrm{acl}_i(BC) = B$, et donc $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\,0}_{B} C$ aussi, car T_0 est modulaire.

Pour $i = 1, 2$, on choisit une extension libre $p_i(x_I)$ de $\mathrm{tp}_i(L/K)$ à M. Par le paragraphe précédent, $p_i(x_I) \restriction_{\mathcal{L}_0}$ ne dévie pas au-dessus de K au sens de la théorie T_0, et donc $p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0} = p_2 \restriction_{\mathcal{L}_0}$, car $\mathrm{tp}_0(L/K)$ est stationnaire (K étant un modèle de T_0 par la Remarque 3.2).

Pour terminer, il suffit d'appliquer le Lemme 3.10 à p_1 et p_2 au-dessus de M. □

En fait, la preuve qu'on vient de donner montre le résultat suivant qui est plus fort.

Remarque 3.13. Soient $K \subseteq L, M$ des structures dans $\tilde{\mathcal{C}}$. On pose $p_i(x_I) := \mathrm{tp}_i(L/K)$. Puis, pour $i = 1, 2$, soit $\tilde{p}_i$ une extension libre de p_i à M. Alors, il y a un amalgame libre $N = L \otimes_K M$ tel que, considérant L et M comme sous-structures de N, on a $\mathrm{tp}_i(L/M) = \tilde{p}_i$ pour $i = 1, 2$. □

Notation. Soit K une fusion, et $B, A, C \subseteq K$. Alors on pose $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_B C$ si $\mathrm{d}(A_0/B) = \mathrm{d}(A_0/BC)$ pour tout $A_0 \subseteq_\omega A$, et nous dirons que A et C sont d-*indépendants* au-dessus de B.

Ici, nous utilisons $\mathrm{d} = \mathrm{d}_K$, et nous devrions donc également noter quelque part le fait que $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}$ dépend (*a priori*) de K. Cependant, si nous passons de K à $K' \geqslant K$, la signification de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}$ ne change pas, par la Remarque 3.8.

Lemme 3.14 ([9, Lemma 3.11]). *Soient K_1, K_2 deux fusions qui sont fortement plongées dans K. On pose $K_0 := K_1 \cap K_2$ et $L := \langle K_1 K_2 \rangle$. Sont équivalents :*

(1) $K_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{K_0} K_2$ *;*

(2) *L est isomorphe à un amalgame libre $K_1 \otimes_{K_0} K_2$ et L est autosuffisant dans K ;*

(3) $K_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{i}_{K_0} K_2$ *($i = 1, 2$) et $K_1 K_2 \leqslant K$.* □

Lemme 3.15 (Lemme d'amalgamation asymétrique [9, Lemma 3.13]). *Soient $K, L, M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ avec $K \leqslant L$ et $K \subseteq M$. Alors, M est autosuffisant dans tout amalgame libre $N := L \otimes_K M$, et N est dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$.* □

On combine les Lemmes 3.12 et 3.15 pour obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 3.16. *La classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$ a la propriété d'amalgamation (AP).* □

Remarque 3.17. Si on remplace $\tilde{\mathcal{C}}_0$ par la classe des $\mathcal{L}$-structures acl_0-closes $M \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$ satisfaisant $\delta(\bar{a}) \geqslant 0$ pour tout $\bar{a} \in M$ fini, on peut perdre la propriété d'amalgamation. Il y a même de tels exemples avec T_1 et T_2 fortement minimales triviales (voir l'Exemple 5.8 (1)).

Définition 3.18. On dit que $M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ est *riche* si pour tout $k \leqslant l$ dans $\mathcal{C}_0$, et tout plongement fort $k \leqslant M$ il existe un k-plongement fort de l dans M.

La classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$ a la propriété d'amalgamation, et par le Lemme 3.15, on peut plonger deux fusions K, L fortement dans une même fusion M si et seulement si on peut établir un $\mathcal{L}$-isomorphisme entre $\langle \emptyset \rangle_K$ et $\langle \emptyset \rangle_L$. Donc, $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$ n'est pas toujours connexe, les composantes connexes étant données par les $\mathcal{L}$-types d'isomorphisme de fusions $\emptyset$-engendrées.

Cela a pour conséquence que deux fusions riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ n'ont pas forcément la même théorie élémentaire. Néanmoins, on a le résultat suivant.

Proposition 3.19. *Dans chaque composante connexe de $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$, il existe des structures riches, et cela en cardinalité au plus $2^{\aleph_0}$. Deux fusions riches sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes si et seulement si elles se trouvent dans la même composante connexe de $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$.*

Démonstration. La classe $\mathcal{C}_0$ contient au plus $2^{\aleph_0}$ structures à $\mathcal{L}$-isomorphisme près, de même la classe $\mathcal{C}_0(k_0) := \{k_0 \leqslant l \mid l \in \mathcal{C}_0\}$ des $\mathcal{L}$-structures dans $\mathcal{C}_0$ au-dessus d'un certain $k_0 \in \mathcal{C}_0$ (à k_0-isomorphisme près). On obtient une fusion riche contenant fortement une fusion $M_0 \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ en utilisant une construction à la Fraïssé-Hrushovski, à l'aide d'une induction transfinie.

Pour $M_0 \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ de cardinalité au plus $2^{\aleph_0}$, on construit $M_0 \leqslant M_1$ avec les propriétés suivantes :

(1) $M_1 \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et $\mathrm{card}(M_1) \leqslant 2^{\aleph_0}$,

(2) pour tout $k \leqslant l \in \mathcal{C}_0$ et tout plongement fort $\iota : k \overset{\leqslant}{\hookrightarrow} M_0$ il existe un k-plongement fort de l dans M_1 étendant ι.

On énumère l'ensemble des problèmes d'amalgamation $\iota : k \overset{\leqslant}{\hookrightarrow} M_0$, $k \in \mathcal{C}_0$ et $k \leqslant l \in \mathcal{C}_0(k)$ qui apparaissent dans (2), via $(\iota_\beta, k_\beta \leqslant l_\beta)_{\beta<\alpha}$. Il est facile de voir que $\alpha \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Pour obtenir M_1, nous construisons une chaîne $(N_\beta, \leqslant)_{\beta<\alpha}$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$, avec $N_0 := M_0$, $\mathrm{card}(N_\beta) \leqslant 2^{\aleph_0}$ pour tout β et telle que $(\iota_\beta, k_\beta \leqslant l_\beta)_{\beta<\alpha}$ est résolu au niveau $N_{\beta+1}$, c'est à dire on peut plonger fortement l_β dans $N_{\beta+1}$ au-dessus de $\iota_\beta : k_\beta \overset{\leqslant}{\hookrightarrow} M_0 \leqslant N_\beta$.

Si $\lambda < \alpha$ est un ordinal limite, on pose $N_\lambda := \bigcup_{\gamma<\lambda} N_\gamma$, et pour $\beta = \gamma + 1 < \alpha$ il suffit de prendre un amalgame libre $N_\beta = N_\gamma \otimes_{k_\gamma} l_\gamma$, par le Corollaire 3.16. On pose $M_1 := \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta$.

Pour obtenir une fusion riche M (contenant fortement M_0 et avec $\mathrm{card}(M) \leqslant 2^{\aleph_0}$), il suffit de répéter cette construction en remplaçant M_0 par M_1. Ainsi, on obtient une chaîne $(M_i, \leqslant)_{i<\omega}$. Montrons que $M := \bigcup_{i<\omega} M_i$ est riche. Pour cela, il suffit de noter que l'image de tout plongement fort ι d'un $k \in \mathcal{C}_0$ est contenue dans l'un des M_i (car k est finiment engendrée), et tout problème d'amalgamation au-dessus de ι est alors résolu dans M_{i+1}, et *a fortiori* dans M aussi.

Le fait que deux structures riches de la même composante connexe sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes est vrai plus ou moins par définition de la richesse. Il suffit de noter que si $k_i = \mathrm{cl}_\omega(k_i) \leqslant M_i$ (où M_i est riche pour $i = 1, 2$), $f : k_1 \cong k_2$ et $a_1 \in M_1$, alors $k_1 \leqslant l_1 := \mathrm{cl}_\omega^{M_1}(k_1 a_1) \in \mathcal{C}_0$. Comme M_2 est riche, on trouve donc une copie l_2 de l_1 avec $l_2 \leqslant M_2$, et telle qu'il existe un isomorphime $\tilde{f} : l_1 \cong l_2$ étendant f. □

Le lemme suivant est rassurant.

Lemme 3.20. *Soit M une fusion riche. Alors $M \models T_1 \cup T_2$.*

Démonstration. Par symétrie, il suffit de voir que $M \models T_1$. Considérons M comme sous-ensemble (acl_1-clos) de $M_1 \models T_1$, et soit $\varphi(x, \bar{y})$ une $\mathcal{L}_1$-formule et $\bar{b} \in M$ tel que $M_1 \models \exists x \varphi(x, \bar{b})$. Par le test de Tarski, il suffit de trouver $a \in M$ avec $M_1 \models \varphi(a, \bar{b})$ pour pouvoir conclure que $M \preccurlyeq_{\mathcal{L}_1} M_1$.

Posons $k := \mathrm{cl}_\omega^M(\bar{b})$, et choisissons $p_1(x) \in S_{T_1}(k)$ contenant $\varphi(x, \bar{b})$. Si p_1 est réalisé dans $k = \mathrm{acl}_1(k)$, on a rien à faire (car $k \subseteq M$). Sinon, nécessairement $\mathrm{d}_1(p_1) = 1$, et *a fortiori* $p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0}$ est le type T_0-générique au-dessus de k. On choisit $p_2(x) \in S_{T_2}(k)$ avec $\mathrm{d}_2(p_2) = 1$ (par conséquent, $p_2 \restriction_{\mathcal{L}_0}$ est le type générique, aussi).

On applique le Lemme 3.10 à (p_1, p_2) pour obtenir $a' \models p_1 \cup p_2$ avec $ka' \leqslant \langle ka' \rangle =: l$. Clairement, $k \leqslant \mathrm{acl}_0(ka') \leqslant l \in \mathcal{C}_0$. Comme M est riche, on peut k-plonger l (fortement) dans M. L'image a de a' par ce plongement est la solution de $\varphi(x, \bar{b})$ cherchée. $\square$

3.2. Décomposition des extensions finiment engendrées

Dans cette section, nous expliquons comment on peut décomposer des extensions auto-suffisantes de structures dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ en des extensions « élémentaires ». Pour cela, nous suivons entièrement [**9**, § 4].

Nous travaillons à l'intérieur d'une fusion riche K^*. Les notions cl_0, d, etc., seront par rapport à K^*.

Définition 3.21. Soit $K \leqslant L$ une extension dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$, avec $L \leqslant K^*$. On dit que cette extension est

- *finiment engendrée* si $L = \langle K\bar{a} \rangle$ pour un uplet $\bar{a}$ fini,
- *générique* si $L = \langle Ka \rangle$ pour un singleton a avec $\mathrm{d}(a/K) = 1$,
- *parasite* si elle est finiment engendrée et $\delta(L/K) = 0$,
- *primitive* si elle est parasite, propre et il n'y a pas de $K' \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ tel que $K \subsetneq K' \subsetneq L$ et $K' \leqslant L$.

Lemme 3.22. *Soient $K \leqslant K' \leqslant K^*$, et $K \leqslant L \leqslant K^*$ avec L/K primitive. Alors ou bien $L \subseteq K'$, ou bien $L' := \langle LK' \rangle$ est égale à un amalgame libre $K' \otimes_K L$ (et $L' \leqslant K^*$).*

Démonstration. D'abord, $L \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{\mathrm{d}}_{L \cap K'} K'$ suit de $\mathrm{d}(L/K) = 0$ et $K \subseteq K'$. Si $L \cap K' \supsetneq K$, alors $L \subseteq K'$, car L/K est primitive. Sinon, on conclut par le Lemme 3.14. $\square$

Techniquement, il est pratique de considérer une notion différente de primitivité pour des extensions de sous-ensembles acl_0-clos d'une fusion.

Définition 3.23. Soit $B \subseteq A \subseteq K^* \in \tilde{\mathcal{C}}_0$. On dit que l'extension A/B est *première*, si A et B sont acl_0-clos, $\mathrm{d}_0(A/B)$ est fini et $\geqslant 2$, $\delta(A/B) = 0$ et $\delta(A'/B) > 0$ pour tout ensemble acl_0-clos A' avec $B \subsetneq A' \subsetneq A$ (en particulier $B \leqslant A$).

Le nombre $\mathrm{d}_0(A/B)$ est appelé la *longueur* de l'extension.

Remarque. Notre définition exclut les « extensions premières de longueur 1 », qui correspondraient aux extensions de la forme $A := \mathrm{acl}_0(B\alpha)$, où α est dans exactement un des $\mathrm{acl}_i(B)$, $i = 1, 2$.

Lemme 3.24 ([9, Lemma 4.4]). *Soit A/B une extension première de longueur n (au sein de K^*) et soit $B \subseteq B' \subseteq K^*$ avec B' acl_0-clos. On pose $A' := \mathrm{acl}_0(AB')$.*

(1) *Si $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{i}_{B} A$ pour $i = 1, 2$, alors A'/B' est première de longueur n. En particulier, $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{0}_{B} A$.*

(2) *$\delta(A/B') = \delta(A'/B') \leqslant 0$, et on a égalité si et seulement si ou bien $A \subseteq B'$ ou bien A'/B' est première (de longueur n).*

(3) *Si $B' = \mathrm{cl}_0(B')$, alors $A \subseteq B'$ ou A'/B' est première de longueur n.* $\square$

Maintenant, on introduit des filtrations de $\langle\cdot\rangle$ qui seront utilisées dans plusieurs preuves qui marchent par induction. Les opérateurs $\langle\cdot\rangle_1^n$, $\langle\cdot\rangle_2^n$ et $\langle\cdot\rangle^n$ ($n \in \mathbb{N}$) définissent des filtrations différentes.

Définition 3.25. Pour $X \subseteq K^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $\langle X\rangle_1^n$, $\langle X\rangle_2^n$ et $\langle X\rangle^n$ de manière suivante. D'abord, on pose $\langle X\rangle_1^0 := \langle X\rangle_2^0 := \langle X\rangle^0 := \mathrm{acl}_0(X)$.

Inductivement, on définit

$$\langle X\rangle_i^{m+1} := \mathrm{acl}_i(\langle X\rangle^m) \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

et finalement

$$\langle X\rangle^{m+1} := \mathrm{acl}_0(\langle X\rangle_1^{m+1} \cup \langle X\rangle_2^{m+1}).$$

Notons que $\langle X\rangle_2^{m+1} = \mathrm{acl}_2(\langle X\rangle_1^m)$ et $\langle X\rangle_1^{m+1} = \mathrm{acl}_1(\langle X\rangle_2^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cela suit de l'identité $\mathrm{acl}_2(\mathrm{acl}_1(X)) = \mathrm{acl}_2(\mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}_1(X)\,\mathrm{acl}_2(X)))$, par induction sur m et symétrie.

De plus, si $X \leqslant K^*$, alors $\langle X\rangle_i^m$ et $\langle X\rangle^m$ sont forts dans K^* aussi (par le Lemme 3.9).

Lemme 3.26. *Soient $B \subseteq A, C$ des ensembles forts dans K^*. Supposons que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{B} C$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{B} C$. Alors on a les indépendances suivantes.*

(a) *$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{B} C$ pour $i = 1, 2$, et $AC \leqslant K^*$.*

(b) *$\langle A\rangle_i^m \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{j}_{\langle B\rangle_i^m} \langle C\rangle_i^m$ et $\langle A\rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{j}_{\langle B\rangle} \langle C\rangle$, pour $i = 1, 2$, $j = 0, 1, 2$ et tout $m \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. L'argument dans la preuve du Lemme 3.14 pour montrer (1) $\Rightarrow$ (3) donne (a). Quant à (b), on a évidemment $\langle A\rangle_i^m \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{\langle B\rangle_i^m} \langle C\rangle_i^m$ pour tout choix de m et i. Pour établir (b), par induction (sur m), symétrie, continuité et utilisant (a), il suffit de montrer $\mathrm{acl}_1(A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{\mathrm{acl}_1(B)} \mathrm{acl}_1(C)$. Or, $\mathrm{acl}_1(A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{1}_{\mathrm{acl}_1(B)} \mathrm{acl}_1(C)$ est une conséquence de $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{1}_{B} C$, et on en déduit $\mathrm{acl}_1(A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{\mathrm{acl}_1(B)} \mathrm{acl}_1(C)$, par modularité de T_0. □

Considérons une extension générique L/K avec $L = \langle Kg\rangle \leqslant K^*$. Supposons que $\bar{a} \in L$ avec $\mathrm{d}(\bar{a}/K) = 0$. Alors, $g \notin \mathrm{cl}_0(K\bar{a})$, car $\mathrm{d}(g/K) = 1$. L'hypothèse $\mathrm{cl}_0(K\bar{a}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{K} \mathrm{acl}_0(Kg)$ étant trivialement satisfaite, on déduit donc du Lemme 3.26 (b) que $\mathrm{cl}_0(K\bar{a}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{K} L$, et en particulier que $\bar{a} \in K$. Cela montre le corollaire suivant.

Corollaire 3.27. *Soit L/K une extension générique et $c \in L \setminus K$. Alors,* $\mathrm{d}(c/K) = 1$. □

Le lemme suivant établit le lien entre les extensions premières et les extensions primitives.

Lemme 3.28 ([9, Lemmas 4.8, 4.11]).

(a) *Soit $K \leqslant A_1 \leqslant K^*$ avec $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et A_1/K première. Alors, $\langle A_1\rangle/K$ est une extension primitive.*

(b) *Soit L/K une extension primitive. Alors, il y a un unique ensemble minimal $A = \mathrm{cl}_0(A) \supset K$ contrôlant L/K. L'extension A/K est première, et on appelle* longueur *de L/K la longueur de A/K.* □

Proposition 3.29 (Lemme de décomposition [9, Corollary 4.9]). *Soit $K \leqslant L$ une extension finiment engendrée (avec $L \leqslant K^*$) telle que $\mathrm{d}(L/K) = d$. Alors, il y a une décomposition $K = K_0 \leqslant K_1 \leqslant \cdots \leqslant K_{d+n} = L$, où K_i/K_{i-1} est générique pour $i \leqslant d$ et primitive pour $i > d$.*

Si L/K est parasite et si $K = K_0 \leqslant K_1 \leqslant \cdots \leqslant K_n = L$ et $K = K'_0 \leqslant K'_1 \leqslant \cdots \leqslant K'_{n'} = L$ sont deux décompositions en extensions primitives on a $n = n'$. □

On finit la section avec quelques lemmes supplémentaires.

Lemme 3.30. *Soit k une fusion fortement plongée dans une fusion finiment engendrée. Alors, k est finiment engendrée aussi.*

Plus généralement, si $K \leqslant L' \leqslant L \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ avec L/K finiment engendrée, alors L'/K est finiment engendrée aussi.

Démonstration. Soit $k \leqslant l$ avec l finiment engendrée. En particulier, $\mathrm{d}(k) \leqslant \mathrm{d}(l)$, et ces deux dimensions sont finies. On choisit $B \subseteq_\omega k$ fini avec $\mathrm{d}(k/B) = 0$. Puis, comme l est finiment engendrée, on peut choisir $B \subseteq A \subseteq_\omega l$ tel que A contrôle l.

Posons $B' := \mathrm{acl}_0(A) \cap k$ (donc $\mathrm{d}_0(B')$ est fini). Alors, $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^0_{B'} k$ par construction, de même $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^{\mathrm{d}}_{B'} k$, car $\mathrm{d}(k/B) = 0$ et $B \subseteq B'$. Il suffit d'appliquer le Lemme 3.26 (b) pour obtenir $\langle A \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^0_{\langle B' \rangle} \langle k \rangle$, en d'autres termes $l \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^0_{\langle B' \rangle} k$. Donc, $k = \langle B' \rangle$ est finiment engendrée.

La preuve concernant $K \leqslant L' \leqslant L$ est similaire. □

Lemme 3.31. *Soit K une fusion, $K \subseteq A, B \subseteq K^*$. On suppose que $A = \mathrm{cl}_0(A)$, $B = \mathrm{cl}_0(B)$, $\delta(B/A) = 0$ et $[\mathrm{acl}_1(B) \cup \mathrm{acl}_2(B)] \cap A = K$. Alors $\langle B \rangle \cap A = K$.*

Démonstration. Posons $B' := \mathrm{acl}_1(B)$. Par symétrie, raisonnant par induction, il suffit de montrer que $\mathrm{acl}_2(B') \cap A = K$. On a $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^0_K A$ par hypothèse, donc $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^0_B A$. Comme A est fort et $\delta(B/A) = 0$, nécessairement $AB \leqslant K^*$, aussi. Cela donne $\delta(B'_0/AB) = \delta(B'_0/B) = 0$ pour tout $B'_0 \subseteq_\omega B'$, et alors $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^2_B A$. On en déduit que $\mathrm{acl}_2(B') \cap A \subseteq \mathrm{acl}_2(B) \cap A = K$. □

4. Axiomatisation

Dans cette section, nous continuons à considérer un contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) comme dans § 3. De plus, nous supposons les hypothèses suivantes.

Hypothèses 4.1 (hypothèses de définissabilité).

- Les théories T_i sont géométriques, c'est à dire elles éliminent $\exists^\infty$.
- T_0 est ω-catégorique.

En particulier (voir la Remarque 3.4), $\tilde{\mathcal{C}}_0$ est une classe élémentaire. Pour des exemples de théories géométriques, nous référons à l'Exemple 2.13.

Soit T_ω la $\mathcal{L}$-théorie (en général incomplète) des fusions riches, dans le contexte de fusion (T_0, T_1, T_2). Nous étudierons d'abord des questions de définissabilité et d'uniformité concernant l'autosuffisance et les autres notions jusqu'alors introduites, ce qui nous permettra de donner des axiomes explicites pour T_ω. Nous verrons ensuite que le fait d'être riche est significatif modèle-théoriquement, puisque tout modèle $\aleph_1$-saturé de T_ω est riche et, réciproquement, toute fusion riche est un modèle ω-saturé de T_ω. Cela est le contenu du Théorème 4.13. En particulier, on en déduit une description des complétions de T_ω et des $\mathcal{L}$-types.

Lemme 4.2. *Soit $\bar{a}/\bar{b}$ une extension première et $\varphi_0(\bar{x},\bar{z})$ une $\mathcal{L}_0$-formule isolant $\mathrm{tp}_0(\bar{a},\bar{b})$. Puis, pour $i=1,2$, soient $\varphi_i(\bar{x},\bar{z})$ des $\mathcal{L}_i$-formules rang-complètes telles que $\mathrm{tp}_i(\bar{a}/\bar{b})$ soit générique dans $\varphi_i(\bar{x},\bar{b})$.*

Alors, pour tout $\bar{a}',\bar{b}' \in K' \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ avec $K' \models \bigwedge_{i=0}^{2} \varphi_i(\bar{a}',\bar{b}')$ on a

- *ou bien $\bar{a}' \in \mathrm{cl}_0^{K'}(\bar{b}')$,*
- *ou bien $\bar{a}'/\bar{b}'$ est une extension première (dans ce cas, $\bar{a}'$ est générique dans $\varphi_i(\bar{x},\bar{b}')$ pour $i=1$ et $i=2$).*

En particulier, pour tout ensemble $\tilde{B}' \supseteq \bar{b}'$ on a $\delta(\bar{a}'/\tilde{B}') \leqslant 0$.

Démonstration. Comme $\bar{a}/\bar{b}$ est première et les φ_i sont rang-complètes, pour tout $\bar{b}' \subsetneq \bar{a}_1' \subsetneq \bar{a}'$ on a $\delta(\bar{a}'/\bar{a}_1') < 0$. On rappelle que $\bar{b}'$, ayant le même $\mathcal{L}_0$-type que $\bar{b}$, énumère un ensemble acl_0-clos (c'est pareil pour $\bar{a}'$).

Donc, si $\bar{a}' \cap \mathrm{cl}_0(\bar{b}') \supsetneq \bar{b}'$, alors $\bar{a}' \subseteq \mathrm{cl}_0(\bar{b}')$. Par contre, si $\bar{a}' \cap \mathrm{cl}_0(\bar{b}') = \bar{b}'$, alors $\bar{b}' = \mathrm{cl}_0^{K'}(\bar{b}') \cap \bar{a}' \leqslant \bar{a}'$ par le Lemme 3.6 (1), et donc nécessairement $\delta(\bar{a}'/\bar{b}') = 0$. On en déduit que $\bar{a}'/\bar{b}'$ est une extension première et l'uplet $\bar{a}'$ est $\mathcal{L}_i$-générique dans $\varphi_i(\bar{x},\bar{b}')$ pour $i=1,2$ (on fait un δ-calcul).

La dernière partie suit directement du Lemme 3.24 (2). □

Définition 4.3. Soit $\tau(\bar{x}) = \exists\bar{y}\varphi(\bar{x},\bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule existentielle (avec φ sans quanteurs). On dit que τ est *à quantification bornée*, si $K \models \varphi(\bar{a},\bar{b})$ implique $\bar{b} \in \mathrm{cl}_\omega^K(\bar{a})$ pour tout $\bar{a},\bar{b} \in K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$.

Lemme 4.4. *Soit $B \subseteq K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, et soient $\bar{\alpha}_0 \in \mathrm{cl}_0^K(B)$, $\bar{\alpha}_\omega \in \mathrm{cl}_\omega^K(B)$ et $\bar{\alpha}_\mathrm{d} \in \mathrm{cl}_\mathrm{d}^K(B)$.*

1. *Il existe $\bar{b} \in B$ et $\bar{a} \in \mathrm{cl}_0^K(B)$ ($\bar{a}$ contenant $\bar{b}\bar{\alpha}_0$) et une $\mathcal{L}$-formule sans quanteurs $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ avec $\models \varphi(\bar{a},\bar{b})$ telle que pour toute fusion K' et tout $\bar{b}',\bar{a}' \in K'$, si $\models \varphi(\bar{a}',\bar{b}')$, alors $\bar{a}' \in \mathrm{cl}_0^{K'}(\bar{b}')$ et $\delta(\bar{a}'/\bar{b}') \leqslant \delta(\bar{a}/\bar{b})$.*
2. *Même énoncé que dans (1), en remplaçant $\bar{\alpha}_0$ par $\bar{\alpha}_\omega$ et cl_0 par cl_ω.*
3. *Il existe $\bar{b} \in B$, $\bar{a} \in \mathrm{cl}_\omega^K(\bar{b}\bar{\alpha}_\mathrm{d})$ (contenant $\bar{b}\bar{\alpha}_\mathrm{d}$) et une $\mathcal{L}$-formule sans quanteurs $\varphi(\bar{x},\bar{x}_\mathrm{d},\bar{y})$ avec $K \models \varphi(\bar{a},\bar{\alpha}_\mathrm{d},\bar{b})$ telle que pour tout $\bar{b}',\bar{\alpha}_\mathrm{d}',\bar{a}' \in K'$ avec $K' \models \varphi(\bar{a}',\bar{\alpha}_\mathrm{d}',\bar{b}')$ on a $\bar{a}' \in \mathrm{cl}_\mathrm{d}^{K'}(\bar{b}') \cap \mathrm{cl}_\omega^{K'}(\bar{b}'\bar{\alpha}_\mathrm{d}')$.*

Soit maintenant e un entier non-négatif, $B \subseteq K$ et $\bar{\alpha} \in K$. Alors on a le résultat suivant.

4. *Si $\mathrm{d}_K(\bar{\alpha}/B) \leqslant e$, il existe $\bar{b} \in B$ et une $\mathcal{L}$-formule existentielle à quantification bornée $\tau_\mathrm{d}(\bar{x},\bar{y})$ telle que $K \models \tau_\mathrm{d}(\bar{\alpha},\bar{b})$ et si $K' \models \tau_\mathrm{d}(\bar{\alpha}',\bar{b}')$ pour $\bar{\alpha}' \in K' \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et $\bar{b}' \in K'$, alors $\mathrm{d}_{K'}(\bar{\alpha}'/\bar{b}') \leqslant e$.*

Démonstration. Dans la preuve, on peut supposer que $B = \mathrm{acl}_0(B)$.

(1) Comme $\mathrm{cl}_0^K(B)$ est la réunion des $\mathrm{cl}_0^K(B_0)$ pour $B_0 \subseteq_\omega B$, il existe $\bar{b} \in B$ énumérant un ensemble acl_0-clos tel que $\bar{\alpha}_0 \in \mathrm{cl}_0^K(\bar{b})$. On considère une énumération (finie, car T_0 est ω-catégorique) $\bar{a}$ de $\mathrm{cl}_0^K(\bar{b})$, et on choisit, pour $i = 1, 2$, une formule $\varphi_i(\bar{x}, \bar{z})$ rang-complète par rapport à $\mathrm{tp}_i(\bar{a}/\bar{b})$ (en particulier, $\models \varphi_i(\bar{a}, \bar{b})$). On les choisit telles que $\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \vdash \mathrm{tp}_0(\bar{a}, \bar{b})$ ce qui est possible par le Lemme 2.18. Soient $k^i_{I/J}$ les entiers associés à φ_i et $I, J \subseteq \boldsymbol{n}$ (avec les notations de la Définition 2.17, où $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$). On pose $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) := \varphi_1(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \varphi_2(\bar{x}, \bar{y})$.

Maintenant, soient $\bar{a}', \bar{b}' \in K'$ tels que $\models \varphi(\bar{a}', \bar{b}')$. Prenons $I \subseteq \boldsymbol{n}$ avec $\bar{a}' \not\in \mathrm{acl}_0(\bar{a}'_I \bar{b}')$. Comme $\bar{a}_I \bar{b} \not\leqslant \bar{a}$ (on rappelle que $\bar{a}$ énumère $\mathrm{cl}_0^K(\bar{b})$) on a $0 > \delta(\bar{a}/\bar{a}_I \bar{b}) = k^1_{\boldsymbol{n}/I} + k^2_{\boldsymbol{n}/I} - \mathrm{d}_0(\bar{a}/\bar{a}_I \bar{b})$. Or, $\mathrm{d}_0(\bar{a}'/\bar{a}'_I \bar{b}') = \mathrm{d}_0(a/\bar{a}_I \bar{b})$ (ils ont le même $\mathcal{L}_0$-type) et $\mathrm{d}_i(\bar{a}'/\bar{a}'_I \bar{b}') \leqslant k^i_{\boldsymbol{n}/I}$ pour $i = 1, 2$, car φ_i est rang-complète. Cela donne $\delta(\bar{a}'/\bar{a}'_I \bar{b}') < 0$. Par sous-modularité, on a donc $\bar{a}' \in \mathrm{cl}_0^{K'}(\bar{b}')$, et (1) est montré.

Quant à (2), il suffit d'expliciter une cascade d'algébricités au sens de $\mathcal{L}_1$ et de $\mathcal{L}_2$ dans l'uplet $\bar{a}$ en question (on utilise (1) et le fait que $\mathrm{cl}_\omega(X) = \langle \mathrm{cl}_0(X) \rangle$). C'est facile et on omet les détails.

Montrons (3). On décompose l'extension parasite $k = \mathrm{cl}_\omega^K(B) \leqslant \mathrm{cl}_\omega^K(B\bar{\alpha}_\mathrm{d}) = l$ en primitives ($k = l_0 \leqslant l_1 \leqslant \cdots \leqslant l_n = l$). On se sert constamment de (2) pour pouvoir utiliser explicitement des éléments se trouvant dans la clôture autosuffisante cl_ω.

Traitons le cas $n = 1$, où l/k est une extension primitive. (Si $n > 1$, on raisonne par induction.) Soit $k \leqslant A \leqslant l$ comme dans le Lemme 3.28 (b), c'est à dire A/k est une extension première, A contrôlant l. On choisit une $\mathcal{L}_0$-base $\bar{a}_1$ de A/k, puis on choisit $\tilde{b} = \mathrm{acl}_0(\tilde{b}) \subseteq k$ et $\bar{b} \in B$ avec les propriétés suivantes :

(i) $\bar{a}_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^i_{\tilde{b}} k$ pour tout i,

(ii) $\bar{\alpha}_\mathrm{d} \in \mathrm{cl}_\omega(\tilde{b}\bar{a}_1)$,

(iii) $\tilde{b} \in \mathrm{cl}_\omega(\bar{b})$.

Alors, posant $\tilde{a} := \mathrm{acl}_0(\tilde{b}\bar{a}_1)$, on voit facilement que $\tilde{a}/\tilde{b}$ est une extension première. Soit $\bar{a} := \tilde{a}\bar{\alpha}_\mathrm{d}$. On utilise (2) pour pouvoir se servir de $\tilde{b}$ et pour expliciter toutes les autres cl_ω-dépendances, et le Lemme 4.2 garantit qu'on peut trouver une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ comme requise.

Finalement, sous les hypothèses de (4), on choisit un sous-uplet $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_e})$ de $\bar{\alpha}$ de manière que $\bar{\alpha} \in \mathrm{cl}_\mathrm{d}(B\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_e})$. Puis, on applique (3) à l'ensemble $B\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_e}$ et l'uplet $\bar{\alpha}$. □

Lemme 4.5 (définissabilité de l'autosuffisance). *Il existe un $\mathcal{L}$-type partiel et universel $\Pi(y_0, \ldots, y_{n-1})$ tel que pour toute fusion $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et tout uplet $\bar{b} \in K$ on ait $K \models \Pi(\bar{b})$ si et seulement si $\bar{b} \leqslant K$.*

Démonstration. Soit $\bar{b} \in K$ avec $\bar{b} \not\leqslant K$, et supposons que $\bar{a}$ énumère $\mathrm{cl}_0^K(\bar{b})$. Par la preuve du Lemme 4.4 (1), il existe une $\mathcal{L}$-formule sans quanteurs $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ satisfaite par $(\bar{a}, \bar{b})$ telle que pour tout $\bar{a}', \bar{b}' \in K'$ avec $\models \varphi(\bar{a}', \bar{b}')$ on a $\delta(\bar{a}'/\bar{b}') \leqslant \delta(\bar{a}/\bar{b}) < 0$. En particulier, si $K' \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{b}')$, alors $\bar{b}' \not\leqslant K'$.

Il suffit de mettre dans $\Pi(\bar{y})$ toutes les formules de la forme $\forall \bar{x} \neg \varphi(\bar{x}, \bar{y})$, où $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ est comme ci-dessus. □

Définition 4.6. Soit $k, l \in \mathcal{C}_0$ avec $k \leqslant l$. On suppose qu'il y a des ensembles finis et acl_0-clos $B \leqslant A$ tels que B contrôle k et A contrôle l. On demande que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{i}_{B} k$ pour $i = 0, 1, 2$. Une telle paire A/B est appelée *paire de contrôle* pour l'extension $k \leqslant l$. Si $\mathrm{d}(A/B) = e = \mathrm{d}(l/k)$, on dit que A/B est une paire de contrôle *de dimension e*.

Remarque 4.7. Si A/B est une paire de contrôle (pour une extension l/k), alors B est relativement acl_i-clos dans A pour $i = 0, 1, 2$.

Démonstration. On a $A \cap \mathrm{acl}_i(B) \subseteq A \cap k = B$, comme $B = \mathrm{acl}_0(B)$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{0}_{B} k$. □

Lemme 4.8. *Soit $k \leqslant l$ une extension dans $\mathcal{C}_0$ et $\Lambda \subseteq_\omega l$. Alors, il existe une paire de contrôle A/B pour l/k avec $\Lambda \subseteq A$.*

Démonstration. Comme l est finiment engendrée, quitte à agrandir Λ, on peut supposer que $\langle \Lambda \rangle = l$. Posons $A_1 := \mathrm{cl}_0(k\Lambda)$, et choisissons $\Lambda \subseteq A_0 \subseteq_\omega A_1$ avec $\mathrm{acl}_0(A_0 k) = A_1$. Puis, on choisit $B = \mathrm{cl}_0(B) \subseteq_\omega k$ contrôlant k et satisfaisant $A_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{i}_{B} k$ pour $i = 0, 1, 2$. Finalement, on pose $A := \mathrm{acl}_0(BA_0)$. On vérifie que A/B est une paire de contrôle pour l/k. □

Pour pouvoir axiomatiser la théorie T_ω, il nous faudra étudier des familles de paires de contrôle. Considérons $B \leqslant A$, une paire de contrôle pour $k \leqslant l$. On énumère B avec $\bar{b}$ et $A \setminus B$ avec $\bar{a}$, et on pose $\bar{b}_0 := \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_0(\bar{a}/k))$, où $\mathrm{Cb}(\cdot)$ dénote la *base canonique* d'un type. Comme $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{0}_{\bar{b}} k$, $\bar{b}_0 \in \mathrm{acl}_0^{\mathrm{eq}}(\bar{b})$. Par ailleurs, $\bar{b}_0 \in \mathrm{dcl}_0^{\mathrm{eq}}(k)$. Soit $\psi_0(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0)$ une $\mathcal{L}_0$-formule isolant $\mathrm{tp}_0(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}_0)$.

Par définissabilité de la dimension dans T_i (voir le Fait 2.16), il existe des $\mathcal{L}_i$-formules $\psi_i(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0)$ pour $i = 1, 2$, avec les propriétés suivantes.

PC(i) $\models \psi_1(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}_0) \wedge \psi_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}_0)$.

PC(ii) $T_i \vdash \psi_i \to \psi_0$ pour $i = 1, 2$.

PC(iii) La formule $\varphi_i(\bar{x}, \bar{z}) := \exists \bar{z}_0 \psi_i(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0)$ est une formule rang-complète par rapport à $\mathrm{tp}_i(\bar{a}/\bar{b})$ pour $i = 1, 2$.

PC(iv) Pour tout $\bar{b}'$, $\bar{b}_0'$, et $i = 1, 2$, $\mathrm{d}_i(\psi_i(\bar{x}, \bar{b}', \bar{b}_0')) = \mathrm{d}_i(\varphi_i(\bar{x}, \bar{b}'))$.

Définition 4.9. Soit $\Psi := (\psi_1, \psi_2)$ une paire de formules. On dit que Ψ est une *famille de paires de contrôle (de dimension e)* s'il existe une paire de contrôle A/B de dimension e (pour une extension l/k dans $\mathcal{C}_0$), telle que Ψ satisfasse aux conditions PC(i)–PC(iv) données ci-dessus. Gardant les mêmes notations, pour une telle famille, on pose $\theta_\Psi(\bar{z}, \bar{z}_0) := \exists \bar{x}\psi_1(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0) \wedge \exists \bar{x}\psi_2(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0)$.

Lemme 4.10. *Soit $k \leqslant l \in \mathcal{C}_0$. Alors $\mathrm{qftp}_\mathcal{L}(l/k)$ est impliqué par l'ensemble des $\psi_1(\bar{x}, \bar{b}, \bar{b}_0) \wedge \psi_2(\bar{x}, \bar{b}, \bar{b}_0)$, où $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ est une famille de paires de contrôle, $\bar{a} \in l$, $\bar{b} \in k$, $\bar{b}_0 \in \mathrm{dcl}_0^{\mathrm{eq}}(k) \cap \mathrm{acl}_0^{\mathrm{eq}}(\bar{b})$ et $\bar{a}\bar{b}/\bar{b}$ une paire de contrôle de l/k avec $\models \psi_1(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}_0) \wedge \psi_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}_0)$.*

Démonstration. C'est essentiellement le Lemme 4.8, combiné avec le fait que les formules rang-complètes sont cofinales dans $\mathrm{tp}_i(\bar{a}/\bar{b})$ pour $i = 1, 2$. □

Lemme 4.11. *Soit $\Psi = (\psi_1(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0), \psi_2(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0))$ une famille de paires de contrôle de dimension e, et soit $\bar{b}' \in k' \in \mathcal{C}_0$, $\bar{b}'_0 \in \mathrm{dcl}_0^{\mathrm{eq}}(k')$, $\bar{b}'$ contrôlant k', tels que $\models \theta_\Psi(\bar{b}', \bar{b}'_0)$.*

(1) *Soit $k' \subseteq L \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et $\bar{a}' \in L$ une solution générique de $\psi_i(\bar{x}, \bar{b}', \bar{b}'_0)$ au-dessus de k' pour $i = 1$ et $i = 2$. Supposons de plus que $k'\bar{a}' \leqslant \langle k'\bar{a}' \rangle =: l' \subseteq L$. Alors, $\bar{a}'\bar{b}'/\bar{b}'$ est une paire de contrôle pour $k' \leqslant l'$, de dimension e.*

(2) *Des extensions L de k' contenant des uplets $\bar{a}'$ comme dans (1) existent.*

Démonstration. Pour (1), notons que $\bar{b}' \leqslant \bar{a}'\bar{b}'$ suit de PC(iii) et PC(iv). Comme $\bar{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^i_{\bar{b}'} k'$ et $\bar{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^0_{\bar{b}'} \mathrm{acl}_i(\bar{b}')$ pour $i = 1, 2$, on a $\bar{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^i_{\bar{b}'} k'$ pour $i = 0, 1, 2$. Le Fait 2.11 nous donne que $k' \leqslant A'_{k'} := \mathrm{acl}_0(A'k')$ (on raisonne comme dans la preuve du Lemme 3.12), et donc $\bar{a}'\bar{b}'/\bar{b}'$ est une paire de contrôle pour $k' \leqslant l'$ (de dimension e).

Pour montrer (2), il suffit d'appliquer le Lemme 3.10 à (p_1, p_2), où p_i est un $\mathcal{L}_i$-type générique dans $\psi_i(\bar{x}, \bar{b}', \bar{b}'_0)$ au dessus de k'. La condition PC(ii) entraîne que $p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0} = p_2 \restriction_{\mathcal{L}_0}$, car $\bar{b}'_0 = \mathrm{Cb}_0(p_i \restriction_{L_0})$ pour $i = 1, 2$ et $p_i \restriction_{\mathcal{L}_0}$ ne $\mathcal{L}_0$-dévie pas au-dessus de $\bar{b}'$. □

Lemme 4.12. *Soit $\Psi = (\psi_1(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0), \psi_2(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0))$ une famille de paires de contrôle (de dimension e), et soient $\bar{b} \subseteq \tilde{b} = \mathrm{cl}_0(\tilde{b}) \leqslant K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, $\bar{b}_0 \in \mathrm{dcl}_0^{\mathrm{eq}}(\langle \bar{b} \rangle)$ tels que $\models \theta_\Psi(\bar{b}, \bar{b}_0)$. Alors il existe $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_1(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0), \tilde{\psi}_2(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0))$, une famille de paires de contrôle (de dimension e), avec $\tilde{x} \supseteq \bar{x}$, $\tilde{z} \supseteq \bar{z}$ et $\tilde{z}_0 \supseteq \bar{z}_0$, telle que $\models \tilde{\psi}_i \to \psi_i$ pour $i = 1, 2$ et $\theta_{\tilde{\psi}}(\tilde{b}, \tilde{b}_0)$ pour un $\bar{b}_0 \subseteq \tilde{b}_0 \in \mathrm{dcl}_0^{\mathrm{eq}}(\langle \tilde{b} \rangle)$.*

Démonstration. Pour $i = 1, 2$, soient p_i des $\mathcal{L}_i$-types génériques dans $\psi_i(\bar{x}, \bar{b}, \bar{b}_0)$ au-dessus de $k := \langle \tilde{b} \rangle$. Comme $\bar{b}_0 \in \mathrm{dcl}_0^{\mathrm{eq}}(k)$, cela a un sens. Supposons que $\bar{a}_i \models p_i$. Comme dans la preuve du Lemme 4.11, on montre que $\bar{a}_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^0_{\bar{b}} k$ et $p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0} = p_2 \restriction_{\mathcal{L}_0}$, et enfin qu'une application du Lemme 3.10 à (p_1, p_2) fournit une extension $k \leqslant l$, avec l contrôlée par une solution $\bar{a}$ de $p_1 \cup p_2$ au-dessus de k. Soit $\tilde{a} := \mathrm{acl}_0(\tilde{b}\bar{a}) \setminus \tilde{b}$. Alors $\tilde{a}\tilde{b}/\tilde{b}$ est une paire de contrôle de l/k. Par le Lemme 4.10, il existe une famille de paires de contrôle $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_1(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0), \tilde{\psi}_2(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0))$ et $\tilde{b}_0 = \mathrm{Cb}_0(\tilde{a}/\tilde{b}) \supseteq \bar{b}_0$ tel que $\models \tilde{\psi}_1(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{b}_0) \wedge \tilde{\psi}_2(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{b}_0)$ et $\models \tilde{\psi}_i(\tilde{x}, \tilde{b}, \tilde{b}_0) \to \psi_i(\bar{x}, \bar{b}, \bar{b}_0)$ pour $i = 1, 2$. Quitte à rétrécir les $\tilde{\psi}_i$, on peut supposer que $\models \tilde{\psi}_i(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0) \to \psi_i(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0)$ pour $i = 1, 2$. □

Maintenant, on considère la $\mathcal{L}$-théorie $T'_\omega := T'_\omega(1, 2, 3)$ donnée par les groupes d'axiomes suivants.

$T'_\omega(1)$ $\mathrm{Th}(\tilde{\mathcal{C}}_0)$.

$T'_\omega(2)$ $T_1 \cup T_2$.

$T'_\omega(3)$ Soit $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ une famille de paires de contrôle de dimension e. Puis, soit $\tau(\bar{x}, \bar{z})$ une formule existentielle à quantification bornée, telle que $K \models \tau(\bar{a}, \bar{b})$ implique $\mathrm{d}(\bar{a}/\bar{b}) < e$. Pour Ψ et τ, on met l'axiome

$$\forall \bar{z}\bar{z}_0 \exists \bar{x}[\theta_\Psi(\bar{z}, \bar{z}_0) \to \psi_1(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0) \wedge \psi_2(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0) \wedge \neg\tau(\bar{x}, \bar{z})].$$

Théorème 4.13. *Les théories T'_ω et T_ω coïncident. Tout modèle $\aleph_1$-saturé de T'_ω est une fusion riche. Réciproquement, toute fusion riche est un modèle $\aleph_0$-saturé de T'_ω.*

Démonstration. Soit K une fusion riche. On montre d'abord que $K \models T'_\omega$. Il est clair que $K \models T'_\omega(1)$, et le Lemme 3.20 donne $K \models T'_\omega(2)$. Quant au schéma d'axiomes $T'_\omega(3)$, supposons que $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ est une famille de paires de contrôle (de dimension e), et $\bar{b}, \bar{b}_0 \in K$ avec $\models \theta_\Psi(\bar{b}, \bar{b}_0)$. Puis, soit $\tau(\bar{x}, \bar{z})$ une formule comme dans le schéma (3). Quitte à appliquer le Lemme 4.12, on peut supposer que $\bar{b} \leqslant \langle \bar{b} \rangle =: k \leqslant K$. On trouve, par le Lemme 4.11, $k \leqslant l \in \mathcal{C}_0$ et $\bar{a} \in l$ tel que $\bar{a}\bar{b}/\bar{b}$ soit une paire de contrôle (de dimension e) pour l/k et tel que $\bar{a}$ satisfasse $\psi_1(\bar{x}, \bar{b}, \bar{b}_0) \wedge \psi_2(\bar{x}, \bar{b}, \bar{b}_0)$. Comme K est riche, on peut k-plonger l fortement dans K. Identifiant $\bar{a}$ avec son image dans K par un tel plongement, on obtient $K \models \psi_i(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}_0)$ pour $i = 1, 2$. Or, on a aussi $K \models \neg\tau(\bar{a}, \bar{b})$, car $\mathrm{d}(\bar{a}/\bar{b}) = e$. L'axiome correspondant à Ψ et τ dans $T'_\omega(3)$ est donc satisfait par K. En particulier, on a montré la consistance de T'_ω, car les fusions riches existent.

Ensuite, nous montrons que tout modèle $\aleph_1$-saturé de T'_ω est riche. Une fois que cela est établi, la proposition entière est prouvée, i.e. toute fusion riche est modèle ω-saturé de T'_ω (puisque la $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalence avec un modèle ω-saturé entraîne l'ω-saturation) et $T'_\omega = T_\omega$ (puisque toute structure a des extensions élémentaires $\aleph_1$-saturées et deux théories ayant les mêmes modèles κ-saturés pour un certain κ sont équivalentes).

On considère $K \models T'_\omega$, où K est $\aleph_1$-saturé, et $k \leqslant K$ une fusion finiment engendrée. Pour tout $k \leqslant l \in \mathcal{C}_0$ (on suppose que $\mathrm{d}(l/k) = e$), on doit trouver un k-plongement fort de l dans K.

En utilisant le Lemme 4.4 (4), on voit que l'on peut approximer « $\mathrm{d}(\bar{x}/\bar{z}) \geqslant e$ » par des formules de la forme $\neg\tau(\bar{x}, \bar{z})$, où $\tau(\bar{x}, \bar{z})$ est une formule existentielle à quantification bornée forçant $\mathrm{d}(\bar{x}/\bar{z}) < e$. On note que l'ensemble de tels τ est clos par disjonctions finies. Combiné avec le Lemme 4.10, cela montre que les axiomes dans $T'_\omega(3)$ approximent bien une réalisation de $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(l/k)$ qui est autosuffisante. Par $\aleph_1$-saturation de K, on peut donc k-plonger fortement l dans K. □

D'un point de vue esthétique, le Théorème 4.13 n'est pas satisfaisant, car il ne caractérise pas les fusions riches par une propriété modèle-théorique. Si l'on exigeait, dans la définition d'une fusion riche, que tout problème d'amalgamation soit résolu pour tout $k \leqslant l \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ dénombrable, les fusions riches correspondraient exactement aux modèles $\aleph_1$-saturés de T_ω. Cependant, à l'aide d'une notion adaptée de saturation, on peut aussi se contenter de la définition de « riche » que nous avons donnée.

On dira qu'une structure M est $\aleph_\epsilon$-*saturée* si pour tout $\bar{b} \subseteq_\omega M$, tout type au-dessus de $\mathrm{acl}(\bar{b})$ est réalisé dans M. On remarque que d'habitude, dans la définition de la $\aleph_\epsilon$-saturation, la clôture algébrique est prise dans M^{eq}, *mais nous la prenons uniquement dans les réels.* A posteriori, en utilisant le Corollaire 4.24, on pourra caractériser les fusions riches de la façon suivante.

Remarque 4.14. Les fusions riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ sont exactement les modèles $\aleph_\epsilon$-saturés de T_ω. □

Il suffit de modifier la preuve du Théorème 4.13 et d'utiliser le Lemme de décomposition pour établir le résultat suivant.

Remarque 4.15. Dans l'axiomatisation de T'_ω, on peut se restreindre aux familles de paires de contrôle donnant lieu à des extensions primitives ou à des extensions génériques.

Dans la suite, nous mentionnons un cadre dans lequel on peut se dispenser des extensions génériques.

Définition 4.16. Soit $T_0 \subseteq T_1$ une expansion satisfaisant à nos hypothèses générales. On dit que l'expansion $T_0 \subseteq T_1$ *renforce la prégéométrie* si pour tout $A \subseteq M \models T_1$ et tout élément a avec $\mathrm{d}_1(a/A) = 1$ on a $\mathrm{acl}_1(Aa) \supsetneq \mathrm{acl}_0(Aa)$.

Notation. Pour $B \subseteq A$, on pose $B \leqslant_n A$ si et seulement si $\delta(A'/B) \geqslant 0$ pour tout ensemble A' avec $B \subseteq A' \subseteq A$ et $\mathrm{d}_0(A'/B) \leqslant n$.

Lemme 4.17. *Supposons que le contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) est tel que les deux expansions $T_0 \subseteq T_1$ et $T_0 \subseteq T_2$ renforcent la prégéométrie. Alors, toute extension générique de fusions peut être approximée par des extensions parasites.*

Plus précisément, soit $K \leqslant L \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ une extension générique et $\bar{a} \in L$ avec $\delta(\bar{a}/K) = \mathrm{d}(\bar{a}/K) = 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une extension parasite L'/K et $\bar{a}' \in L'$ avec $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\bar{a}'/K) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\bar{a}/K)$ et $K\bar{a}' \leqslant_n L'$.

Démonstration. Soit donc $K \leqslant L = \langle Ka \rangle$ une extension générique (avec $L \leqslant K^*$ pour K^* riche). Observons d'abord que pour $a' \in K^* \setminus K$ on a $\mathrm{d}(a'/K) = 1$ si et seulement si $Ka' \leqslant_n K^*$ pour tout n, c'est à dire a' satisfait à tous les types partiels suivants :

$$\forall y_1 \cdots y_n \delta(x\bar{y}/K) \geqslant 1.$$

Rappelons que les $\mathcal{L}_i$ ne contiennent pas de symboles de fonctions. Il suffit alors de trouver des singletons $a_n \in K^*$ satisfaisant $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\langle Ka_n \rangle^n/K) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\langle Ka \rangle^n/K)$ et $\mathrm{d}_0(\mathrm{cl}_0(Ka_n)/K) \geqslant n$. On va construire une extension parasite $K \leqslant L_n = \mathrm{cl}_\omega(Ka_n)$ avec a_n comme requis.

Nous renvoyons à la Définition 3.25 pour la définition de $\langle \cdot \rangle^n$. Pour construire L_n, on considère d'abord $A'_n := \langle Ka \rangle^n$. Par induction sur n, en utilisant l'hypothèse que les expansions $T_0 \subseteq T_i$ renforcent la prégéométrie et que $\mathrm{d}(a/K) = 1$, on voit que A'_n n'est pas acl_i-clos, pour $i = 1, 2$. On peut donc choisir (dans L) des éléments $c_i \in \mathrm{acl}_i(A'_n) \setminus A'_n$. Maintenant, on applique le Lemme 3.10 aux types $p_i := \mathrm{tp}_i(\mathrm{acl}_0(A'_n c_i)/K)$ au-dessus de K, et on obtient une extension L_n/K qui est contrôlée au-dessus de K par une réalisation de $p_1 \cup p_2$. On vérifie sans peine que L_n/K est parasite. Soit $a_n \in L_n$ l'élément qui correspond à a dans L. Alors, $A_n := \mathrm{cl}_0(Ka_n) \subseteq \langle Ka_n \rangle^{n+1}$ et $A_n \nsubseteq \langle Ka_n \rangle^n$ (par construction).

A fortiori, $\mathrm{d}_0(\mathrm{cl}_0(A_n)/K) \geqslant n+1$, car si $A_n \cap \langle Ka_n \rangle^m = A_n \cap \langle Ka_n \rangle^{m+1}$ pour un m, il s'en suit que $A_n \subseteq \langle Ka_n \rangle^m$ (par le Lemme 3.31). □

Combinant ce résultat avec le Lemme de décomposition, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.18. *Soit* (T_0, T_1, T_2) *un contexte de fusion, où* $T_0 \subseteq T_i$ *renforce la prégéométrie, pour* $i = 1, 2$. *Alors, dans l'axiomatisation de* T_ω*, le schéma (3) prend la forme*

$$\forall \bar{z}\bar{z}_0 \exists \bar{x}[\theta_\Psi(\bar{z}, \bar{z}_0) \to \psi_1(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0) \wedge \psi_2(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0)],$$

où Ψ *parcourt les familles de paires de contrôles donnant lieu à des extensions primitives.* □

Exemples 4.19.

(1) Soit $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_p}$ la théorie d'un espace vectoriel infini sur $\mathbb{F}_p$, et soit T_1 une complétion de la théorie des corps pseudofinis de caractéristique p. La théorie T_1 est une expansion de T_0 (le $\mathcal{L}_0$-réduit est donné par le groupe additif du corps). Alors, $T_0 \subseteq T_1$ renforce la prégéométrie. Cela est aussi vrai, si T_0 est la théorie d'un ensemble infini sans structure et T_1 une théorie complète de corps pseudofinis (de caractéristique arbitraire).

(2) Soit T_0 la théorie d'un ensemble infini sans structure, et soit T_1 le graphe aléatoire (où une expansion d'une théorie géométrique T_0 qu'on peut obtenir en ajoutant un prédicat aléatoire [**6**]). On a $\mathrm{acl}_1(A) = A = \mathrm{acl}_0(A)$, et donc l'expansion $T_1 \supseteq T_0$ ne renforce pas la prégéométrie.

(3) Soit $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$, et T_1 la théorie d'un espace vectoriel infini sur $\mathbb{F}_q$ avec une forme bilinéaire générique $\beta(\cdot\,,\cdot)$. Alors, $T_0 \subseteq T_1$ ne renforce pas la prégéométrie, car dans cet exemple on a $\mathrm{acl}_1 = \mathrm{acl}_0$ aussi.

Pour pouvoir pleinement exploiter le Théorème 4.13, il est commode de considérer la classe $\tilde{\mathcal{C}}_0$ ainsi que la théorie T_ω dans une expansion par définitions de $\mathcal{L}$.

Définition 4.20. Soit $\mathcal{L}^*$ l'expansion par définitions de $\mathcal{L}$ donnée par l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules existentielles (sans paramètres) à quantification bornée.

Formellement, ce nouveau langage $\mathcal{L}^*$ est construit ainsi : pour toute formule existentielle à quantification bornée $\tau(\bar{x}) = \tau(x_0, \ldots, x_{n-1})$ on introduit un nouveau symbole de relation n-aire $R_\tau(\bar{x})$. Puis, on considère T_ω (et toute autre théorie qui implique $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\tilde{\mathcal{C}}_0)$) dans le langage $\mathcal{L}^*$, en ajoutant aux $\mathcal{L}$-axiomes les « définitions » des R_τ, c'est à dire pour tout τ on impose

$$\forall \bar{x}(R_\tau(\bar{x}) \leftrightarrow \tau(\bar{x})).$$

On écrit T_ω^* pour dénoter la théorie T_ω ainsi obtenue dans $\mathcal{L}^*$, de même $\tilde{\mathcal{C}}_0^*$ dénote la classe $\tilde{\mathcal{C}}_0$, considérée dans $\mathcal{L}^*$.

Notation. On écrira tp_ω au lieu de tp_{T_ω} ainsi que acl_ω au lieu de acl_{T_ω}.

Théorème 4.21 (élimination des quanteurs).

(1) *Soient $A_i \subseteq M_i \models T_\omega$ pour $i = 1, 2$ des uplets (pas nécessairement finis). Alors*

$$\mathrm{tp}_\omega(A_1) = \mathrm{tp}_\omega(A_2) \quad \textit{si et seulement si} \quad \mathrm{cl}_\omega^{M_1}(A_1) \cong_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\omega^{M_2}(A_2).$$

(2) *La théorie T_ω^* élimine les quanteurs (dans $\mathcal{L}^*$).*

(3) *La $\mathcal{L}$-théorie T_ω est presque modèle-complète, c'est à dire toute $\mathcal{L}$-formule est équivalente, dans T_ω, à une combinaison booléenne de $\mathcal{L}$-formules existentielles.*

Démonstration. Notons d'abord que (2) est une conséquence de (1), car il y a suffisamment de $\mathcal{L}$-formules pour décrire uniformément la clôture autosuffisante (c'est la partie (2) du Lemme 4.4). Puis, (3) suit de (2). Il suffit donc de montrer (1).

On peut supposer que A_1 et A_2 sont finis. L'implication est claire. Réciproquement, supposons que $\mathrm{cl}_\omega^{M_1}(A_1) \cong_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\omega^{M_2}(A_2)$. Par le Théorème 4.13, les modèles saturés de T_ω sont riches. On peut donc établir un va-et-vient infini au-dessus du $\mathcal{L}$-isomorphisme donné entre les $\mathrm{cl}_\omega^{M_i}(A_i)$, d'où $\mathrm{tp}_\omega(A_1) = \mathrm{tp}_\omega(A_2)$. □

Corollaire 4.22. *Soient $M \subseteq N$ deux modèles de T_ω. Alors $M \preccurlyeq N$ si et seulement si $M \leqslant N$.* □

Corollaire 4.23. *Les complétions de T_ω sont données par les $\mathcal{L}$-types d'isomorphisme possibles de $\langle\emptyset\rangle \in \mathcal{C}_0$, c'est à dire pour $M, N \models T_\omega$ on a $M \equiv N$ si et seulement si $\langle\emptyset\rangle_M \cong_{\mathcal{L}} \langle\emptyset\rangle_N$.* □

Corollaire 4.24. *Pour tout $A \subseteq M \models T_\omega$ on a $\mathrm{cl}_\omega^M(A) = \mathrm{acl}_\omega(A)$, c'est à dire la clôture algébrique au sens de T_ω est donnée par la clôture autosuffisante.*

Démonstration. L'inclusion $\mathrm{cl}_\omega^M(A) \subseteq \mathrm{acl}_{T_\omega}(A)$ suit de la Remarque 3.8, et il suffit donc de montrer que $K := \mathrm{cl}_\omega^M(A)$ est algébriquement clos. Soit $K \leqslant M \leqslant K^* \models T_\omega$ et $\alpha \in K^* \setminus K$. On a $K \leqslant \mathrm{cl}_\omega(K\alpha) =: L \leqslant K^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $L_1, \ldots, L_n$ des copies isomorphes de L au-dessus de K. On peut supposer que K^* est suffisamment saturé, et on peut alors plonger fortement un amalgame libre $L_1 \otimes_K \cdots \otimes_K L_n$ dans K^*. En utilisant le Théorème 4.21, on voit que $\mathrm{tp}_\omega(\alpha/K)$ admet un nombre non-borné de réalisations, d'où $\alpha \notin \mathrm{acl}_\omega(K)$. □

À la fin de cette section, nous étudions une notion d'indépendance inhérente à la construction de la fusion libre.

Définition 4.25. Soient $A, B, C \subseteq K$, où K est une fusion. On pose $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\vert}^{*}_{B} C$ si et seulement si $\mathrm{cl}_\omega(BA) \cap \mathrm{cl}_\omega(BC) = \mathrm{cl}_\omega(B)$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\vert}^{\mathrm{d}}_{B} C$.

Le Lemme 3.14 entraîne le résultat suivant.

Remarque 4.26. Soient $B \subseteq A, C \subseteq K$ des sous-ensembles cl_ω-clos de la fusion K. Alors, sont équivalents :

(1) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B} C$;

(2) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{i}_{B} C$ $(i = 1, 2)$ et $AC \leqslant K$;

(3) $D := \langle AC \rangle$ est un amalgame libre de A et C au-dessus de B et $D \leqslant K$. □

Lemme 4.27. *La notion $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}$ est symétrique et transitive, c'est à dire pour tout A, B, C, D on a les propriétés suivantes.*

- *(Symétrie.) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B} C$ si et seulement si $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B} A$.*
- *(Transitivité.) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B} CD$ si et seulement si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B} C$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{BC} D$.*

Démonstration. La symétrie est claire par définition. Pour montrer la transitivité, il suffit de traiter le cas où $B \leqslant A, C$ et $C \leqslant D$ sont tous cl_ω-clos. Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B} C$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{C} D$, alors $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B} D$ suit de la Remarque 4.26 (2). Pour l'autre direction, notons que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B} D \Rightarrow A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B} C$ suit de la définition de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}$, puisque $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{\mathrm{d}}_{B} D$ entraîne $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{\mathrm{d}}_{B} C$. Le fait que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B} D$ implique $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{C} D$ est une conséquence du Lemme 3.26 : on l'applique à $C \leqslant A', D$, où $A' := \mathrm{acl}_0(AC)$. Comme $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B} C$, A' est fort dans K. Les autres hypothèses du Lemme 3.26, en l'occurrence $A' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{0}_{C} D$ et $A' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{\mathrm{d}}_{C} D$, sont satisfaites, et on déduit donc que $\mathrm{cl}_\omega(AC) \cap D = C$, car $\mathrm{cl}_\omega(AC) = \langle A' \rangle$. □

Lemme 4.28 (caractère local). *Soient M une fusion, $B \subseteq M$ et $\bar{\alpha} \in M$ un uplet fini. Alors il existe $B_0 \subseteq_\omega B$ tel que $\bar{\alpha} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}_{B_0} B$.*

Démonstration. On pose $L := \mathrm{cl}_\omega(B\bar{\alpha})$ et $K := \mathrm{cl}_\omega(B)$. Donc, $L = \langle K\bar{a} \rangle$ pour un uplet fini $\bar{a} \in M$ contrôlant L au-dessus de K, $\bar{a} \supseteq \bar{\alpha}$. Maintenant, on choisit $k \leqslant K$ finiment engendré tel que $\mathrm{d}(\bar{a}/K) = \delta(\bar{a}/K) = \delta(\bar{a}/k) = \mathrm{d}(\bar{a}/k)$, et on pose $l := \langle k\bar{a} \rangle$ (c'est autosuffisant dans M). Le Lemme 3.14 entraîne que L est un amalgame libre de K et l au-dessus de $k' := K \cap l$. Or, k' est une fusion contenue de manière autosuffisante dans une fusion finiment engendrée, et donc finiment engendréee aussi, par le Lemme 3.30. Pour terminer la preuve, il suffit de choisir un ensemble $B_0 \subseteq B$ fini tel que $k' \subseteq \mathrm{cl}_\omega(B_0)$. □

Proposition 4.29. *Dans toute complétion T de T_ω, la notion $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}$ définit une notion d'indépendance, c'est à dire elle satisfait aux propriétés (i)–(vii) de la Définition 2.1.*

Démonstration. L'invariance par automorphisme est claire, et la non-trivialité suit de la définition de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^{*}$ et de l'égalité $\mathrm{acl}_\omega = \mathrm{cl}_\omega$ (Corollaire 4.24).

Ensuite, la propriété d'extension suit de l'existence d'un amalgame libre dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$, combiné avec le fait qu'on peut toujours plonger un amalgame libre de deux fusions fortes de manière autosuffisante dans un modèle suffisamment saturé (donc riche) de T.

Le caractère fini est une conséquence immédiate de : cl_ω est un opérateur finitaire, $\otimes$ ainsi que $\leqslant$ passent à la limite.

Enfin, la symétrie et la transitivité sont montrées dans le Lemme 4.27, tandis que le caractère local est le contenu du Lemme 4.28. □

5. Simplicité

Dans cette section, nous considérons un contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) avec T_1 et T_2 supersimples de rang SU 1 (et T_0 toujours ω-catégorique) et nous montrons—sous une hypothèse supplémentaire—que toute complétion de T_ω est supersimple (Théorème 5.5).

Soit $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{\Gamma}$ une notion d'indépendance. Rappelons qu'une suite d'ensembles $(A_i)_{i<\alpha}$ est $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{\Gamma}$-indépendante au-dessus de B si pour tout $\beta < \alpha$ on a $A_\beta \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{\Gamma}_B \bigcup_{i<\beta} A_i$. Les suites $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{\Gamma}$-indépendantes ont des propriétés similaires à celles des suites indépendantes—c'est à dire $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}$-indépendantes—dans une théorie simple.

Définition 5.1.

(1) On dit qu'une expansion de théories simples $T_0 \subseteq T_1$ *a une algébricité indépendante*, si pour tout $M \models T_1$ et toute suite T_1-indépendante A, B, C au-dessus de M avec A, B, C acl_1-clos et contenant M on a

$$\mathrm{acl}_1(AB)\,\mathrm{acl}_1(AC) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{0}_{BC} \mathrm{acl}_1(BC).$$

(2) Nous disons que le contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) satisfait à *l'hypothèse* A, si l'expansion $T_0 \subseteq T_i$ a une algébricité indépendante pour $i = 1$ et $i = 2$.

Lemme 5.2. *Soit T_0 fortement minimale et modulaire.*

- *Si T_0 a une prégéométrie triviale, alors toute expansion simple $T_0 \subseteq T_1$ a une algébricité indépendante.*
- *Si T_1 est stable, alors $T_0 \subseteq T_1$ a une algébricité indépendante.*

Démonstration. C'est clair pour (1). Quant à (2), soit $M \models T_1$ et soit A, B, C une suite T_1-indépendante au-dessus de M telle que $A, B, C \supseteq M$. Comme T_0 est modulaire et fortement minimale, il suffit de montrer que $\mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}_1(AB)\,\mathrm{acl}_1(AC)) \cap \mathrm{acl}_1(BC) = \mathrm{acl}_0(BC)$. Soient $\bar a \in A$, $\bar b \in B$ et $\bar c \in C$. Soit $\bar f \in \mathrm{acl}_1(BC) \setminus \mathrm{acl}_0(BC)$. Puis, soit $\bar d \in \mathrm{acl}_1(AB)$ avec $\models \varphi_1(\bar d, \bar a, \bar b)$, où $\varphi_1(\bar x, \bar z, \bar b)$ est une $\mathcal{L}_1$-formule à paramètres dans $M\bar b$ qui rend $\bar d$ explicitement algébrique au-dessus de $M\bar b\bar a$. De même pour $\bar e \in \mathrm{acl}_1(AC)$ et une formule $\varphi_1'(\bar y, \bar z, \bar c)$ avec $\models \varphi_1'(\bar e, \bar a, \bar c)$. Puis, soit $\chi_0(\bar w, \bar x, \bar y)$ une $\mathcal{L}_0(M)$-formule, explicitant $\bar w \in \mathrm{acl}_0(M\bar x\bar y)$ avec $\models \chi_0(\bar f, \bar d, \bar e)$. Comme $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}_1}(\bar a/\mathrm{acl}_1(M\bar b\bar c))$ est le cohéritier de sa restriction à M, on trouve $\bar m \in M$ avec $\models \exists \bar x\bar y \varphi_1(\bar x, \bar m, \bar b) \wedge \varphi_1'(\bar y, \bar m, \bar c) \wedge \chi_0(\bar f, \bar x, \bar y)$. On en déduit facilement que $\bar f \in \mathrm{acl}_0(BC)$. □

Remarque. Nous ignorons s'il y a des exemples d'expansions $T_1 \supseteq T_0$ (disons avec T_1 supersimple de rang SU 1 et T_0 fortement minimale et modulaire) sans algébricité indépendante.

Lemme 5.3. *Supposons l'hypothèse A, et soit $K \models T_1 \cup T_2$ une fusion, $K \subseteq A, B, C \subseteq M$, où M est riche et A, B, C une suite $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{*}$-indépendante de sous-ensembles cl_ω-clos de M. On pose $D := \langle BC\rangle = \mathrm{cl}_\omega(BC)$, $E := \langle AB\rangle = \mathrm{cl}_\omega(AB)$ et $F := \langle AC\rangle = \mathrm{cl}_\omega(AC)$. Alors, D, E, F est une suite $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{i}$-indépendante au-dessus de ABC, pour $i \in \{0, 1, 2\}$.*

Démonstration. Par induction sur $m+n+p$, on va montrer le suivant.

$(*)^{m,n,p}$ La suite $(\langle AB\rangle_j^m, \langle AC\rangle_j^n, \langle BC\rangle_j^p)$ est $\mathop{\downarrow}^i$-indépendante au-dessus de l'ensemble ABC, pour $i=0,1,2$ et $j=1,2$.

Une fois que $(*)^{m,n,p}$ est montré, la preuve est terminée. Pour l'établir, il suffit de montrer que $\langle AB\rangle_j^m \langle AC\rangle_j^n \mathop{\downarrow}^i_{BC} \langle BC\rangle_j^p$ pour $i=0,1,2$, puisque nous avons $\langle AB\rangle \mathop{\downarrow}^*_B \langle BC\rangle$ par hypothèse, ce qui entraîne $\langle AB\rangle \mathop{\downarrow}^i_B \langle BC\rangle$ par la Remarque 4.26 et donc aussi $\langle AB\rangle \mathop{\downarrow}^i_{BC} \langle BC\rangle$ pour tout i.

Les ensembles BC, $\langle AB\rangle_j^m \langle AC\rangle_j^n$ et $\langle BC\rangle_j^p$ étant forts, le Lemme 3.26 montre

$$\langle AB\rangle_j^m \langle AC\rangle_j^n \mathop{\downarrow}\limits^{0}_{BC} \langle BC\rangle_j^p \Rightarrow \langle AB\rangle_j^m \langle AC\rangle_j^n \mathop{\downarrow}\limits^{i}_{BC} \langle BC\rangle_j^p \quad \text{pour } i=1,2.$$

On raisonne par l'absurde. Il existe donc $m,n,p \in \mathbb{N}$ avec $m+n+p$ minimal tels que $(*)^{m,n,p}$ soit faux. Par symétrie, on peut supposer que $m \leqslant n \leqslant p$ et

$$\langle AB\rangle_1^m \langle AC\rangle_1^n \mathop{\not\downarrow}\limits^{0}_{BC} \langle BC\rangle_1^p.$$

Par hypothèse, l'expansion $T_0 \subseteq T_1$ a une algébricité indépendante, et donc nécessairement $p \geqslant 2$ (car $m \leqslant n \leqslant p$).

Par minimalité de $m+n+p$, on a

$$\langle AB\rangle_2^m \langle AC\rangle_2^n \mathop{\downarrow}\limits^{1}_{BC} \langle BC\rangle_2^{p-1}$$

ce qui donne

$$\langle AB\rangle_1^{m+1} \langle AC\rangle_1^{n+1} \mathop{\downarrow}\limits^{1}_{\langle BC\rangle_1^1} \langle BC\rangle_1^p$$

(par la définition des hiérarchies $\langle\cdot\rangle_j^k$), et en particulier

$$\langle AB\rangle_1^m \langle AC\rangle_1^n \mathop{\downarrow}\limits^{0}_{\langle BC\rangle_1^1} \langle BC\rangle_1^p. \tag{5.1}$$

Puisque $p \geqslant 2$, on a

$$\langle AB\rangle_1^m \langle AC\rangle_1^n \mathop{\downarrow}\limits^{0}_{BC} \langle BC\rangle_1^1,$$

car $m+n+1 < m+n+p$. Par transitivité et (5.1) on arrive à

$$\langle AB\rangle_1^m \langle AC\rangle_1^n \mathop{\downarrow}\limits^{0}_{BC} \langle BC\rangle_1^p,$$

une contradiction. □

Proposition 5.4 (Théorème d'Indépendance). *Supposons l'hypothèse A, et soit $K \models T_1 \cup T_2$ une fusion, $K \leqslant A_0, A_1, A_2 \in \tilde{\mathcal{C}}_0$. Supposons données des fusions $A_{\{0,1\}}, A_{\{0,2\}}$ et $A_{\{1,2\}}$ ainsi que des K-plongements forts $\iota_k^w : A_k \hookrightarrow A_w$ pour $k \in w$, tels que $A_{\{i,j\}}$ soit un amalgame libre des images de A_i et A_j pour les plongements $\iota_i^{\{i,j\}}$ et $\iota_j^{\{i,j\}}$.*

Alors il existe une K-fusion A et des K-plongements forts $\iota_w : A_w \hookrightarrow A$ satisfaisant

(1) $\iota_w \circ \iota_k^w = \iota_{w'} \circ \iota_k^{w'}$ *si $k \in w \cap w'$ (ce plongement est noté ι_k),*

(2) $\iota_0(A_0)$, $\iota_1(A_1)$, $\iota_2(A_2)$ *est une suite $\downarrow^*$-indépendante au-dessus de K.*

Démonstration. L'argument que nous donnerons doit beaucoup à des suggestions de Massoud Pourmahdian qui ont aidé à simplifier la preuve du Théorème d'Indépendance que nous avions initialement.

On peut supposer que $A_1, A_2 \leqslant A_{\{1,2\}}$, c'est à dire $\iota_1^{\{1,2\}}$ et $\iota_2^{\{1,2\}}$ sont des inclusions. D'abord, nous construisons des $\mathcal{L}_1$-plongements $\iota'_w : A_w \hookrightarrow M' \models T_1$ satisfaisant la condition (1) ainsi que certaines conditions d'indépendance.

On choisit $M' \supseteq A_{\{1,2\}}$, un modèle suffisamment saturé de T_1 (en particulier, $\iota'_{\{1,2\}}$ sera donnée par l'inclusion).

Par le théorème d'indépendance dans T_1, on trouve A'_0 avec

(I) $A'_0 \downarrow^1_K A_1A_2$ et $A'_0 \equiv^1_{A_1} \iota_0^{\{0,1\}}(A_0)$ ainsi que $A'_0 \equiv^1_{A_2} \iota_0^{\{0,2\}}(A_0)$.

On peut choisir A'_0 de telle manière que

(II) $A'_0 \downarrow^1_K A_{\{1,2\}}$.

Identifiant A'_0 et $\iota_0^{\{0,1\}}(A_0)$, on trouve $A'_{\{0,1\}}$ satisfaisant

(III) $A'_{\{0,1\}} \equiv^1_{A'_0A_1} A_{\{0,1\}}$ et $A'_{\{0,1\}} \downarrow^1_{A'_0A_1} A_{\{1,2\}}$.

De même, identifiant A'_0 avec $\iota_0^{\{0,2\}}(A_0)$, on trouve $A'_{\{0,2\}}$ satisfaisant

(IV) $A'_{\{0,2\}} \equiv^1_{A'_0A_2} A_{\{0,2\}}$ et $A'_{\{0,2\}} \downarrow^1_{A'_0A_2} A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}}$.

Finalement, par (III) et (IV), nous avons le suivant.

(V) $A'_{\{0,1\}}$, $A'_{\{0,2\}}$, $A_{\{1,2\}}$ est une suite T_1-indépendante au-dessus de l'ensemble $A'_0A_1A_2$.

Les identifications que nous avons faites fournissent des $\mathcal{L}_1$-plongements $\iota'_{\{0,i\}}$: $A'_{\{0,i\}} \hookrightarrow M'$ pour $i = 1, 2$ qui satisfont évidemment (1).

Voilà les conséquences de (I)–(V) au niveau des $\mathcal{L}_0$-réduits : d'abord, par (III) et (II), on a $A'_{\{0,1\}} \downarrow^1_{A_1} A_{\{1,2\}}$, ce qui donne

(III-0) $A'_{\{0,1\}} \downarrow^0_{A_1} A_{\{1,2\}}$.

Puis, (IV) donne $A'_{\{0,2\}} \downarrow^0_{\mathrm{acl}_1(A'_0A_2)} A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}}$. Par ailleurs, on prétend que

$$\mathrm{acl}_1(A'_0A_2) \mathop{\downarrow}^0_{A'_0A_2} A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}}, \tag{5.2}$$

ce qui donnera (IV-0).

Pour montrer (5.2), notons d'abord que (5.2) est un énoncé qui ne dépend que de $q_1 := \mathrm{tp}_1(A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}})$. Comme $A'_{\{0,1\}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^1_{A_1} A_{\{1,2\}}$, par la Remarque 3.13, il existe un amalgame libre (auxiliaire) $\tilde{A} = A'_{\{0,1\}} \otimes_{A_1} A_{\{1,2\}}$ tel que $\mathrm{tp}_1(\tilde{A}'_{\{0,1\}}\tilde{A}_{\{1,2\}}) = q_1$, où nous écrivons $\tilde{X}$ chaque fois qu'un ensemble X est considéré comme sous-ensemble de $\tilde{A}$. Les fusions $\tilde{A}'_0$, $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ forment une suite $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$-indépendante, avec $\tilde{A}'_{\{0,1\}} = \langle \tilde{A}'_0\tilde{A}_1\rangle$ et $\tilde{A}_{\{1,2\}} = \langle \tilde{A}_1\tilde{A}_2\rangle$.

Or, le Lemme 5.3 implique

$$\langle \tilde{A}'_0\tilde{A}_2\rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{0}_{\tilde{A}'_0\tilde{A}_1\tilde{A}_2} \tilde{A}'_{\{0,1\}}\tilde{A}_{\{1,2\}},$$

et donc en particulier

$$\mathrm{acl}_1(\tilde{A}'_0\tilde{A}_2) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{0}_{\tilde{A}'_0\tilde{A}_2} \tilde{A}'_{\{0,1\}}\tilde{A}_{\{1,2\}}.$$

Comme $\mathrm{tp}_1(\tilde{A}'_{\{0,1\}}\tilde{A}_{\{1,2\}}) = \mathrm{tp}_1(A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}})$, on a montré (5.2).

(IV-0) $A'_{\{0,2\}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_{A'_0A_2} A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}}$.

On combine (III-0) et (IV-0) pour obtenir

(V-0) le système $(K, A'_0, A_1, A_2, A'_{\{0,1\}}, A'_{\{0,2\}}, A_{\{1,2\}}, M')$, avec les indices et plongements évidents, est un système indépendant de modèles de T_0.

Par le Fait 2.4 et (V-0), $\mathrm{tp}_0(A'_{\{0,1\}}, A'_{\{0,2\}}, A_{\{1,2\}})$ est complètement déterminé par le système en question.

Changeant $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$, on peut obtenir des $\mathcal{L}_2$-plongements $\iota''_w : A_w \hookrightarrow M'' \models T_2$ satisfaisant à (1), en considérant $A_{\{1,2\}} \subseteq M'' \models T_2$ suffisamment saturé, et en trouvant A''_0, $A''_{\{0,1\}}$ et $A''_{\{0,2\}}$ vérifiant les analogues de (I)–(V).

Par ce qui est dit plus haut, on a l'égalité

$$\mathrm{tp}_0(A'_{\{0,1\}}A'_{\{0,2\}}A_{\{1,2\}}) = \mathrm{tp}_0(A''_{\{0,1\}}A''_{\{0,2\}}A_{\{1,2\}}).$$

Il suffit d'appliquer le Lemme 3.10 à $\mathrm{tp}_1(A'_{\{0,1\}}A'_{\{0,2\}}A_{\{1,2\}})$ et $\mathrm{tp}_2(A''_{\{0,1\}}A''_{\{0,2\}}A_{\{1,2\}})$ pour obtenir la fusion A cherchée. Notons que les plongements ι_w sont donnés implicitement par notre construction. Puis, (2) suit du fait que A est un amalgame libre de A'_0 et $A_{\{1,2\}}$ au-dessus de K (on applique le Lemme 5.3). □

Théorème 5.5. *Supposons l'hypothèse A. Alors toute complétion T de T_ω est supersimple, et la relation de non-déviation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$ dans T est donnée par $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$.*

Le rang SU *d'une extension parasite est égal à la longueur d'une décomposition en extensions primitives, et* $\mathrm{SU}(g/A) \leqslant \omega$ *pour tout g avec* $\mathrm{d}(g/A) = 1$.

Démonstration. On utilise le Théorème de Kim et Pillay 2.2. Il a déjà été montré que $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$ est une notion d'indépendance dans la Proposition 4.29. Puis, une fois que la simplicité de T est établie, le Lemme 4.28 montre que tout type finitaire ne dévie pas au-dessus d'un ensemble fini, d'où la supersimplicité de T. Or, le Théorème d'Indépendance suit de la Proposition 5.4.

Les énoncés concernant le rang SU découlent des Inégalités de Lascar (voir [**24**, Chapter 5] pour une preuve dans le cas simple), car le rang SU d'une extension primitive est égal à 1 (c'est précisément le contenu du Lemme 3.22). Pour les extensions parasites, c'est clair. Puis, si $g \not\mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^*_B B'$ pour un singleton g avec $\mathrm{d}(g/B) = 1$, forcément $\mathrm{d}(g/B') = 0$. On en déduit que $\mathrm{SU}(g/B') < \omega$, car $\mathrm{cl}_\omega(B'g)/\mathrm{cl}_\omega(B')$ est une extension parasite. □

Le résultat suivant est un corollaire de la Proposition 5.4.

Corollaire 5.6. *Dans la situation du Théorème 5.5, le Théorème d'Indépendance est valide au-dessus de toute fusion $K = \mathrm{cl}_\omega(K) \models T_1 \cup T_2$.* □

Remarque 5.7. Si T_1 et T_2 sont fortement minimales et T_0 ω-catégorique, alors l'hypothèse A est satisfaite par le Lemme 5.2. On peut alors appliquer le Théorème 5.5, ce qui montre que toute complétion T de T_ω est supersimple dans ce cas, avec $\mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ } = \mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^*$. Dans [**10**, § 2.6], nous obtenons des résultats divers de n-amalgamation. Nous montrons entre autres que T a la propriété de n-amalgamation de modèles pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir [**10**, Théorème 2.6.8]).

Voilà un exemple d'un contexte de fusion avec T_1 et T_2 fortement minimales et T_0 ω-catégorique où aucune complétion de $T_1 \cup T_2$ n'est stable.

Exemple 5.8. Soit T_0 la théorie d'une relation d'équivalence E, avec une infinité de classes à 4 éléments, sauf une classe exceptionnelle contenant un seul élément 0, $T_1 := \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_5}$, l'expansion étant donnée par : Exy si et seulement si $x = \alpha y$ pour un $\alpha \in \mathbb{F}_5^* = \{1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3\}$ (pour $\lambda = 2$, par exemple),

$$T_2 := \text{théorie d'une opération de } G_2 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 = \{1, c, d, cd\}$$

agissant trivialement sur 0 et librement sur le complément de $\{0\}$. On trouve T_0 comme réduit via Exy si et seulement si $x = g \cdot y$ pour un $g \in G_2$.

On montre qu'aucune complétion de $T_1 \cup T_2$ n'est stable. Car supposons que $M \models T_1 \cup T_2$ soit stable. En particulier, c'est un groupe stable Γ pour l'addition dans l'espace vectoriel donné par T_1, avec composante connexe Γ^0. Soit x générique dans Γ^0. Comme la multiplication avec λ est un automorphisme définissable de Γ, l'élément λx est générique dans Γ^0 aussi, c'est à dire $\mathrm{tp}(x) = \mathrm{tp}(\lambda x)$. En particulier, si $\lambda x = c \cdot x$ (par exemple), alors $\lambda(\lambda x) = c \cdot (\lambda x)$ aussi. On arrive à une contradiction : $x \neq \lambda^2 x = \lambda(\lambda x) = c \cdot (\lambda x) = c \cdot (c \cdot x) = c^2 \cdot x = x$.

Remarque 5.9. Pour exclure ce genre d'exemples, on peut définir : le contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) (avec T_i fortement minimale) a un *bon contrôle* si pour tout $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et tout $A \subseteq K$ contrôlant K, le $\mathcal{L}$-type d'isomorphisme de K est complètement déterminé par $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(A)$. On montre que si dans une des expansions $T_i \supseteq T_0$ les multiplicités sont préservées, alors (T_0, T_1, T_2) a un bon contrôle. En particulier, c'est donc le cas si $\mathrm{dcl}_0 = \mathrm{acl}_0$, par exemple si T_0 est la théorie d'un espace vectoriel sur un corps fini.

Dans [**9**], il est montré que si on suppose un bon contrôle, alors T_ω est complète et ω-stable avec un unique type générique (de rang ω en général).

Pour conclure la section, nous allons montrer que tout type parasite est monobasé. Pour cela, le lemme suivant est bien utile, car il permet de comprendre facilement la déviation au sein d'un type parasite. On aurait pu énoncer ce lemme déjà depuis un moment.

Lemme 5.10. *Soit L une extension parasite de $K = \mathrm{cl}_\omega(K)$, et soit $M = \mathrm{cl}_\omega(M)$ une extension arbitraire de K. Alors $L \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{*}_{K} M$ si et seulement si $L \cap M = K$ si et seulement si $L \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{0}_{K} M$.*

Démonstration. Il suffit de combiner le Lemme 3.14 avec la Remarque 4.26, car $L \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{K} M$ est automatique pour L/K parasite. □

Proposition 5.11. *Soit T une complétion de T_ω, et supposons que T soit simple avec $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{*}$. Alors, tout type parasite est monobasé.*

Démonstration. C'est une conséquence de la caractérisation de la non-déviation pour les extensions parasites donnée dans le Lemme 5.10. □

6. Paires magnifiques de fusions libres

Dans [**3**], la notion d'une *paire magnifique* de modèles de T est introduite et étudiée, où T est une théorie simple complète. En fait, la définition a un sens dans toute théorie complète avec une notion d'indépendance $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{*}$. Dans cette section, en travaillant dans la classe des paires de fusions, nous montrons que tout modèle suffisamment saturé de la théorie des paires magnifiques de modèles de T_ω est une paire magnifique (en supposant les hypothèses de définissabilité (Hypothèses 4.1)). On obtient comme corollaire que toute complétion T de T_ω a la wnfcp si de plus T est simple avec $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{*}$.

Le concept d'une paire magnifique (d'une théorie simple) est une généralisation commune des deux notions suivantes :

- les *belles paires* (de modèles d'une théorie stable) étudiées par Poizat dans [**17**],
- les *paires génériques* (de modèles d'une théorie simple de rang SU égal à 1) étudiées par Vassiliev dans [**23**].

Il est observé dans [**3**] que pour une théorie stable T, une « paire magnifique » est (essentiellement) la même chose qu'une « belle paire ».

Supposons que T est une $\mathcal{L}$-théorie simple et complète qui élimine les quanteurs. Soit $\mathcal{L}_P := \mathcal{L} \cup \{P\}$, où P est un nouveau prédicat unaire. Une $\mathcal{L}_P$-structure est donc de la forme $(M, P(M))$, pour une $\mathcal{L}$-structure M et $P(M) \subseteq M$.

Définition 6.1. Soit $\kappa \geqslant |T|^+$. Une $\mathcal{L}_P$-structure $(M, P(M))$ est une *paire κ-magnifique* si $P(M) \preccurlyeq_{\mathcal{L}} M \models T$ et si les propriétés suivantes sont satisfaites.

(i)$_\kappa$ Pour tout sous-ensemble $A \subseteq M$ de cardinalité plus petit que κ et tout $\mathcal{L}$-type (finitaire) $p \in S(A)$ il existe $\bar{a} \in M$ réalisant p tel que $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A P(M)$.

(ii)$_\kappa$ Pour tout $A \subseteq M$ de cardinalité plus petit que κ et tout $\mathcal{L}$-type (finitaire) $p \in S(A)$ tel que p ne dévie pas au-dessus de $P(A)$, il existe $\bar{a} \in P(M)$ avec $\bar{a} \models p$.

Fait 6.2 ([3]). *Soit T simple et complète.*

(1) *Des paires κ-magnifiques existent pour tout κ, plus généralement : toute paire se plonge dans une paire κ-magnifique (même librement, voir plus bas pour la définition d'un plongement libre).*

(2) *Deux paires κ-magnifiques (pour $\kappa \geqslant |T|^+$) sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes. En particulier, elles ont la même $\mathcal{L}_P$-théorie élémentaire que l'on note $T^{\mathfrak{P}}$.* $\square$

Si maintenant T est une théorie complète et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^*$ une notion d'indépendance, la Définition 6.1 d'une paire κ-magnifique dans T (par rapport à $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^*$) a un sens. En effet, le Fait 6.2 reste valable dans ce cadre (les arguments donnés dans [**3**] restent valides sans changement).

Disons, par abus de langage, que les paires (κ-)magnifiques de modèles de T sont *axiomatisables* si un modèle suffisamment saturé de $T^{\mathfrak{P}}$ est une paire (κ-)magnifique. Dans [**3**], la relation entre l'axiomatisabilité des paires magnifiques d'une théorie simple T et certaines propriétés de T est étudiée en détail, et plusieurs conditions équivalentes à l'axiomatisabilité de $T^{\mathfrak{P}}$ sont données. Dans le cas où les paires magnifiques sont axiomatisables, [**3**] fait une étude systématique de la théorie $T^{\mathfrak{P}}$ (si les paires magnifiques ne sont pas axiomatisables, il faut sortir du cadre des classes élémentaires de structures).

Définition 6.3 ([3]). Une théorie simple a la wnfcp (*weak non-finite cover property*, une version faible de la propriété du non-recouvrement fini) si pour toutes formules $\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ et $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ les propriétés suivantes sont satisfaites.

- (Finitude.) $\mathrm{D}(\psi(\bar{x}, \bar{c}), \varphi) < \omega$ pour tout $\bar{c}$.
- (Définissabilité.) Pour tout nombre entier n il existe une formule $\chi_n(\bar{y})$ telle que $\mathrm{D}(\psi(\bar{x}, \bar{b}), \varphi) = n$ si et seulement si $\models \chi_n(\bar{b})$.

Notons que si T a la wnfcp, alors T élimine $\exists^\infty$.

Fait 6.4 ([3]). *Soit T simple et complète.*

(1) *La théorie $T^{\mathfrak{P}}$ est axiomatisable si et seulement si T a la* wnfcp.

(2) *Si $T^{\mathfrak{P}}$ est axiomatisable, c'est une théorie simple (supersimple si T est supersimple) et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{T^{\mathfrak{P}}}$ a une description concrète en terme de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^T$.*

En général, on doit considérer les paires $|T|^+$-magnifiques mais dans le cadre de la fusion libre, on peut faire mieux.

Définition 6.5. Soit T une théorie complète et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$ une notion d'indépendance telle que tout type finitaire ne $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$-dévie pas au-dessus d'un ensemble fini. Une $\mathcal{L}_P$-structure $(M, P(M))$ est une *paire* $\aleph_\epsilon$*-magnifique* si $P(M) \preccurlyeq_{\mathcal{L}} M \models T$ et si les deux propriétés suivantes sont satisfaites.

(i)$_\epsilon$ Pour tout sous-ensemble $A \subseteq M$ tel que $A = \operatorname{acl}(\bar{b})$ pour un uplet $\bar{b}$ fini, et pour tout $\mathcal{L}$-type (finitaire) $p \in S(A)$ il existe $\bar{a} \in M$ réalisant p tel que $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*_A P(M)$.

(ii)$_\epsilon$ Pour tout $A \subseteq M$ de la forme $A = \operatorname{acl}(\bar{b})$ pour un uplet $\bar{b}$ fini, et pour tout $\mathcal{L}$-type (finitaire) $p \in S(A)$ tel que p ne ($\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$-)dévie pas au-dessus de $P(A)$, il existe $\bar{a} \in P(M)$ avec $\bar{a} \models p$.

Nous allons utiliser des idées de [**2**] pour reformuler la magnificence en terme de richesse. Pour cela, nous revenons à la fusion libre dans un contexte de fusion (T_0, T_1, T_2). Soit $(\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}, \leqslant^{\mathfrak{P}})$ la classe des paires $(A, P(A))$ de fusions avec $P(A) \leqslant A$, où $(B, P(P)) \leqslant^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ si et seulement si $B \leqslant A$, $P(B) \leqslant P(A)$ et $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*_{P(B)} P(A)$. On pose

$$\mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}} := \{(A, P(A)) \in \tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}} \mid A \in \mathcal{C}_0\}.$$

Suivant la terminologie de [**2**], on appelle $\leqslant^{\mathfrak{P}}$ une extension (un plongement) *libre*. Si $(B, P(B)) \leqslant^{\mathfrak{P}} (A, P(A)), (C, P(C))$ sont des paires de fusions, on peut choisir un amalgame libre $D = A \otimes_B C$ et définir $P(D) := \langle P(A)P(C)\rangle$ au sein de D. On effectue un calcul standard de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^*$-indépendance pour vérifier que $P(D) = P(A) \otimes_{P(B)} P(C)$ et $(A, P(A)), (C, P(C)) \leqslant^{\mathfrak{P}} (D, P(D))$, ce qui montre la deuxième partie du lemme suivant. Quant à la première, il suffit d'utiliser le Lemme 4.4.

Lemme 6.6.

(1) *$\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$ est une classe élémentaire.*

(2) *$(\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}, \leqslant^{\mathfrak{P}})$ (ainsi que $(\mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}}, \leqslant^{\mathfrak{P}})$) a la propriété d'amalgamation (AP).* □

Définition 6.7. Un élément $(M, P(M)) \in \tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$ est appelé une *paire riche de fusions* si $(M, P(M))$ est riche pour la classe $(\mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}}, \leqslant^{\mathfrak{P}})$.

Avant de pouvoir identifier les paires riches comme les paires $\aleph_\epsilon$-magnifiques, nous allons montrer qu'une extension finiment engendrée dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$ peut être obtenue comme suite d'extensions plus simples et faciles à décrire.

Définition 6.8. Soit $(B, P(B)) \leqslant^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ une extension libre dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$.

- $(B, P(B)) \leqslant^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ est une *extension de base*, si $A = \langle BP(A)\rangle$. Une telle extension de base est *finiment engendrée/parasite/primitive/générique*, si $P(A)/P(B)$ l'est.

- On dit que $(B, P(B)) \leqslant^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ *ne change pas la base*, si $P(A) = P(B)$. Dans ce cas, l'extension est appelée *finiment engendrée/parasite/primitive/générique*, si A/B est une extension finiment engendrée/parasite/primitive/générique.

Soit $(B, P(B)) \leqslant^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$. Au sein de A, on trouve $A_\beta := \langle BP(A) \rangle = \mathrm{cl}_\omega(BP(A))$. Donc, $P(A_\beta) = P(A)$, et $(B, P(B)) \leqslant^{\mathfrak{P}} (A_\beta, P(A_\beta))$ est une extension de base, alors que $(A_\beta, P(A_\beta)) \leqslant^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ ne change pas la base. En utilisant le Lemme de décomposition (Proposition 3.29) dans la classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$ et le Lemme 3.30, on en déduit le lemme suivant.

Lemme 6.9. *Soit $(B, P(B)) \leqslant^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$ avec A/B finiment engendrée. Alors il existe des fusions $A_0 = B \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n = A$ telles que pour $i = 1, \ldots, n-1$, $(A_i, P(A_i)) \leqslant (A_{i+1}, P(A_{i+1}))$ est d'un des types suivants : extension de base primitive, extension de base générique, extension primitive qui ne change pas la base, extension générique qui ne change pas la base. On peut même les arranger de sorte qu'il existe $r \leqslant n-1$ tel qu'il s'agisse des extensions de base pour $i \leqslant r$ et des extensions qui ne changent pas la base pour $i > r$.* □

Lemme 6.10. *Les paires riches de fusions sont exactement les paires $\aleph_\epsilon$-magnifiques de modèles de T_ω.*

Démonstration. L'argument est similaire à la preuve de [**2**, Proposition 2.3], et nous l'omettons. □

Remarque. En fait, on peut montrer un peu plus : une paire de fusions $(M, P(M))$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$ satisfait à la condition $(i)_\epsilon$ si et seulement si elle est riche pour les extensions qui ne changent pas la base, et elle satisfait à la condition $(ii)_\epsilon$ si et seulement si elle est riche pour les extensions de base. □

Les composantes connexes de $(\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}, \leqslant^{\mathfrak{P}})$ sont précisément données par les composantes connexes de $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$. Évidemment, deux paires riches de fusions $(M, P(M))$ et $(N, P(N))$ ont la même $\mathcal{L}_P$-théorie si et seulement si elles se trouvent dans la même composante connexe de $(\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}, \leqslant^{\mathfrak{P}})$. Dans ce cas, elles sont $(\mathcal{L}_P)_{\infty,\omega}$-équivalentes, car elles se correspondent par va-et-vient infini.

Le lemme suivant établit le lien avec les paires κ-magnifiques (toujours par rapport à $\downarrow^*$).

Lemme 6.11. *Soit $(M, P(M))$ une paire de fusions $\aleph_\epsilon$-magnifique, et κ-saturée en tant que $\mathcal{L}_P$-structure. Alors, $(M, P(M))$ est une paire κ-magnifique.*

Démonstration. Clair. □

Soit $T_\omega^{\mathfrak{P}}$ la théorie des paires $\aleph_\epsilon$-magnifiques de modèles de T_ω. Nous voulons axiomatiser cette $\mathcal{L}_P$-théorie. Soit $T_\omega^{\mathfrak{P}\prime}$ la $\mathcal{L}_P$-théorie donnée par les groupes d'axiomes suivants.

$T_\omega^{\mathfrak{P}\prime}(1)$ Si $(M, P(M))$ est un modèle de $T_\omega^{\mathfrak{P}\prime}(1)$, alors $P(M) \preccurlyeq_{\mathcal{L}} M \models T_\omega$.

$T_\omega^{\mathfrak{P}\prime}(2)$ Soit $\Psi = (\psi_1(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0), \psi_2(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0))$ une famille de paires de contrôle de dimension e et $\tau(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule existentielle à quantification bornée telle que $\models \tau(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$

implique $\mathrm{d}(\bar{a}/\bar{b}\bar{c}) < e$. Alors, on met un axiome de la forme

$$\forall \bar{z}\bar{z}_0 \exists \bar{x} \forall \bar{y} \Bigg\{ \Bigg[\theta_{\Psi}(\bar{z}, \bar{z}_0) \wedge \bigwedge_{i=0}^{m} y_i \in P \Bigg] \\ \rightarrow \Bigg[\psi_1(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0) \wedge \psi_2(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_0) \wedge \neg\tau(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} x_i \notin P \Bigg] \Bigg\}.$$

$T_{\omega}^{\mathfrak{P}'}(3)$ Soit Ψ comme dans le schéma (2), $\tau(\bar{x}, \bar{z})$ existentielle à quantification bornée forçant $\mathrm{d}(\bar{x}/\bar{z}) < e$. Puis, pour $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \subseteq \tilde{x}$, $\bar{z}_0 \subseteq \tilde{z}_0$ et $\bar{z} = (z_0 \ldots, z_{k-1}) \subseteq \tilde{z}$, soit $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_1(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0), \tilde{\psi}_2(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0))$ une autre famille de paires de contrôle (de dimension e), telle que $\models \tilde{\psi}_i \rightarrow \psi_i$ pour $i = 1, 2$, et $\tilde{a} \in \langle \bar{a}\tilde{b} \rangle$ dès que $\models \tilde{\psi}_1(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{b}_0) \wedge \tilde{\psi}_2(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{b}_0)$. Pour une telle situation, on met un axiome de la forme

$$\forall \tilde{z}\tilde{z}_0 \exists \tilde{x} \Bigg\{ \Bigg[\theta_{\tilde{\Psi}}(\tilde{z}, \tilde{z}_0) \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} z_i \in P \Bigg] \\ \rightarrow \Bigg[\tilde{\psi}_1(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0) \wedge \tilde{\psi}_2(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0) \wedge \neg\tau(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} x_i \in P \Bigg] \Bigg\}.$$

Théorème 6.12. *Les théories $T_{\omega}^{\mathfrak{P}}$ et $T_{\omega}^{\mathfrak{P}'}$ coïncident. Plus précisément, sont équivalents pour $(M, P(M))$ une paire de fusions :*

(a) *$(M, P(M))$ est une paire riche de fusions ;*

(b) *$(M, P(M))$ est une paire $\aleph_{\epsilon}$-magnifique de modèles de T_{ω} ;*

(c) *$(M, P(M))$ est un modèle $\aleph_{\epsilon}$-saturé de $T_{\omega}^{\mathfrak{P}'}$.*

Démonstration. L'équivalence (a) $\iff$ (b) est le Lemme 6.10.

On vérifie que le schéma d'axiomes $T_{\omega}^{\mathfrak{P}'}(2)$ est une version approximative de $(i)_{\epsilon}$, tandis que $T_{\omega}^{\mathfrak{P}'}(3)$ est une version approximative de $(ii)_{\epsilon}$. Donnons l'argument concernant $T_{\omega}^{\mathfrak{P}'}(2)$ et la propriété $(i)_{\epsilon}$. Soit d'abord $(M, P(M))$ une paire de modèles de T_{ω} satisfaisant $(i)_{\epsilon}$. On montre que $(M, P(M)) \models T_{\omega}^{\mathfrak{P}'}(2)$. Pour cela, on considère une famille de paires de contrôle $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$, de dimension e, et $\tau(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y})$ comme dans le schéma d'axiomes $T_{\omega}^{\mathfrak{P}'}(2)$, et on suppose que $M \models \theta_{\Psi}(\bar{b}, \bar{b}_0)$ pour des uplets $\bar{b}, \bar{b}_0 \in M$.

Par le Lemme 4.12 on peut supposer que $\bar{b} \leqslant \langle \bar{b} \rangle =: k$ et $(k, P(k)) \leqslant^{\mathfrak{P}} (M, P(M))$, c'est à dire $k \leqslant M$ et $k \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{*}_{P(k)} P(M)$. Soit $p := \mathrm{tp}_{\omega}(\bar{a}'/k)$, où $\bar{a}'$ est une solution $\mathcal{L}_i$-générique de $\psi_i(\bar{x}, \bar{b}, \bar{b}_0)$ $(i = 1, 2)$ au-dessus de k, telle que $k \leqslant k\bar{a}' \leqslant \langle k\bar{a}' \rangle =: l'$ et l' est fortement k-plongée dans $K^* \succcurlyeq_{\mathcal{L}} M$. On applique $(i)_{\epsilon}$ au type $p \in S(k)$ pour trouver $\bar{a} \in M$ réalisant p tel que $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{*}_{k} P(M)$. Posons $l := \langle k\bar{a} \rangle = \mathrm{cl}_{\omega}(k\bar{a})$. Comme $k \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{*}_{P(k)} P(M)$, on a $l \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{*}_{P(k)} P(M)$, et donc, par la définition de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{*}$, $P(l) = l \cap P(M) = P(k)$ ainsi que $l \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{P(k)} P(M)$. Le premier point donne que l'uplet $\bar{a}$ n'a pas de coordonnée dans P, et le deuxième point montre que $e = \mathrm{d}(\bar{a}/k) = \mathrm{d}(\bar{a}/kc_0, \ldots, c_{m-1})$ pour tout uplet $\bar{c} \in P(M)$ fini. L'axiome correspondant à Ψ et τ dans (2) est donc vrai dans $(M, P(M))$.

Réciproquement, soit $(M, P(M))$ une paire de modèles de T_ω satisfaisant $T_\omega^{\mathfrak{P}'}(2)$, telle que $(M, P(M))$ soit $\aleph_\epsilon$-saturé pour sa propre théorie. Soit $p \in S(k)$ avec $k \leqslant M$ finiment engendrée. Soit $\bar{a}' \in K^*$ une solution de p, et posons $l' := \mathrm{cl}_\omega(k\bar{a}')$. Il faut trouver $\bar{a} \in M$ tel que $\bar{a} \models p$ et $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\,^*_k P(M)$. Or, nous montrons plus : on peut trouver une k-copie l de l' dans M, avec $l \leqslant M$ et $l \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\,^*_{P(k)} P(M)$. Pour cela, il suffit que $l \models \mathrm{qftp}_\omega(l'/k)$, $P(l) = l \cap P(M) \subseteq P(k)$ (d'où $P(l) = P(k)$) et $l \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\,^{\mathrm{d}}_k P(M)$). Or, les axiomes (2) montrent que le type décrit est finiment réalisable dans $(M, P(M))$. Par $\aleph_\epsilon$-saturation, on conclut.

L'argument concernant $T_\omega^{\mathfrak{P}'}(3)$ et la propriété $(ii)_\epsilon$ est plus facile, et nous l'omettons.

Nous avons alors montré que toute paire riche de fusions est un modèle de $T_\omega^{\mathfrak{P}'}$ et que tout modèle $\aleph_\epsilon$-saturé de $T_\omega^{\mathfrak{P}'}$ est une paire riche de fusions.

Finalement, il est facile de voir que si la paire $(K, P(K))$ est librement plongée dans $(M, P(M)) \models T_\omega^{\mathfrak{P}'}$, alors $K = \mathrm{acl}_{\mathcal{L}_P}(K)$ (on varie légèrement l'argument donné dans la preuve du Corollaire 4.24). Avec cela, on montre l'$\aleph_\epsilon$-saturation d'une paire riche de fusions, ce qui termine la preuve. □

Corollaire 6.13. *Supposons que la complétion T de T_ω est simple, et que la non-déviation dans T est donnée par $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\,^*$. (C'est par exemple le cas sous l'hypothèse A, pour des expansions T_1 et T_2 de T_0, avec T_1 et T_2 supersimples de rang* SU 1 *et T_0 fortement minimale modulaire et ω-catégorique.) Alors, on a :*

- *la $\mathcal{L}$-théorie T a la* wnfcp *;*
- *la $\mathcal{L}_P$-théorie $T^{\mathfrak{P}}$ est supersimple, où $T^{\mathfrak{P}}$ dénote la théorie d'une paire riche de fusions dans la composante connexe de $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$ associée à T.*

Démonstration. Comme $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\,^* = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$ dans T par hypothèse, les paires κ-magnifiques par rapport à $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\,^*$ que nous avons étudiées sont les « vraies » paires κ-magnifiques, c'est à dire celles par rapport à la relation de non-déviation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$. Le corollaire suit donc du Fait 6.4, car $T^{\mathfrak{P}}$ est axiomatisable par le Théorème 6.12. □

7. Variations sur la fusion

Dans cette section, nous mentionnons deux constructions qui sont similaires à la fusion libre. Si T_1 est une théorie (pré-)géométrique et $T_0 \subseteq T_1$ un réduit fortement minimal et modulaire, nous considérons des *structures bicolores* par rapport à l'expansion $T_1 \supseteq T_0$; de même, nous construisons la *courbe générique* au-dessus de T_1. Sous des hypothèses de définissabilité convenables, ces constructions admettent des axiomatisations explicites ; si de plus T_1 est supersimple de rang SU égal à 1, on obtient des théories supersimples.

Les preuves sont similaires à celles que nous avons données dans la fusion libre, mais les arguments sont plus élémentaires en général. Nous ne donnons donc pas de preuves et nous contentons d'indiquer le type de résultats qu'on obtient. Le cas où T_1 est supersimple de rang SU égal à 1 est traité en détail dans [**10**, Chapitre 4].

7.1. Courbe générique

Soit T_1 une $\mathcal{L}_1$-théorie complète et C un nouveau symbole de relation binaire. Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \{C\}$. On s'intéresse à des $\mathcal{L}$-structures (M, C^M), où $M \models T_1$. Soit $T_1 = \mathrm{ACF}_p$ la théorie d'un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geqslant 0$, et soient $K \models \mathrm{ACF}_p$, $d \geqslant 1$ et $(a_{i,j})$ une suite d'éléments algébriquement indépendants dans K, où $0 \leqslant i, j$ et $i + j \leqslant d$. La courbe $C_d \subseteq K^2$ donnée par l'équation $\sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j = 0$ est une courbe générique de degré d. Soit T_d la $\mathcal{L}$-théorie de (K, C_d^K). Cette théorie s'interprète dans le type de l'uplet $a_{i,j}$ et ne dépend donc pas du choix des $a_{i,j}$. Dans [**4**], les résultats suivants sont montrés.

(1) La suite $(T_d)_{d \geqslant 1}$ tend vers une limite T_ω dans l'espace des $\mathcal{L}$-théories.

(2) Cette limite T_ω est ω-stable de rang de Morley ω.

(3) Si $(K, C) \models T_\omega$ et $(a', b') \in C$, alors posant $C' := C \setminus \{(a', b')\}$, on a $(K, C') \models T_\omega$. De même, il existe $(a'', b'') \in K^2 \setminus C$ tel que pour $C'' := C \cup \{(a'', b'')\}$ on a $(K, C'') \models T_\omega$.

La construction de T_ω se fait par une amalgamation à la Fraïssé–Hrushovski, sans collapse. La complétude et l'ω-stabilité ainsi que (3) s'obtiennent alors facilement. La preuve de (1) est plus difficile. Les propriétés (1) et (3) ont de nombreuses conséquences d'indéfinissabilité. Nous en citons deux.

(I) Pour $m \geqslant 2$, soit R_m un nouveau prédicat m-aire. Alors, il n'existe pas d'énoncé $\varphi(R_m)$ dans le langage des corps augmenté par R_m tel que pour tout ensemble définissable $D \subseteq K^m$ on ait : D est Zariski-clos si et seulement si $K \models \varphi(D)$.

(II) Soit R_m comme dans (I). Alors il n'existe pas d'énoncé $\varphi(R_m)$ tel que pour tout ensemble Zariski-clos $D \subseteq K^m$ on ait : D est irréductible si et seulement si $K \models \varphi(D)$.

Nous allons généraliser la construction de [**4**] au cadre suivant.

Contexte 7.1. T_1 est une $\mathcal{L}_1$-théorie prégéométrique (complète). Pour simplifier l'exposition, on suppose aussi que T_1 élimine les quanteurs et que $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(T_1)$ est dénombrable.

Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \{C\}$, où C est un nouveau symbole de relation binaire. Comme avant, acl_1 dénote la clôture algébrique au sens de T_1, et d_1 la dimension au sens de la prégéométrie induite par acl_1.

Nous travaillons dans la classe $\tilde{\mathcal{C}}$ des $\mathcal{L}$-structures (M, C^M) avec $M = \mathrm{acl}_1(M) \models T_1^\forall$. Pour $A \subseteq_\omega M \in \tilde{\mathcal{C}}$ et $B \subseteq M$ arbitraire on pose $\delta(A) := \mathrm{d}_1(A) - |C^A|$ et $\delta(A/B) := \mathrm{d}_1(A/B) - |C^{AB} \setminus C^B|$. On définit $\tilde{\mathcal{C}}_0 := \{M \in \tilde{\mathcal{C}} \mid \delta(A) \geqslant 0\ \forall A \subseteq_\omega M\}$, et $\mathcal{C}_0$ est la classe des structures finiment engendrées (au sens de acl_1) dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$. Pour $B \subseteq A \subseteq M$, on définit $B \leqslant A$ (B est *autosuffisant* ou *fort* dans A) si et seulement si $\delta(\bar{a}/B) \geqslant 0$ pour tout uplet fini $\bar{a} \in A$. La dimension d est définie comme dans la fusion libre, et on a l'analogue du Lemme 3.6.

La classe $\tilde{\mathcal{C}}_0$ est élémentaire. Pour être en analogie complète avec la fusion libre, nous pourrions écrire $\langle\cdot\rangle$ au lieu de $\mathrm{acl}_1(\cdot)$, mais nous gardons la notation acl_1. Si $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et $B \subseteq K$, par conséquent, on dit que B *contrôle* K si $\mathrm{acl}_1(B) = K$ et $B \leqslant K$. On a donc $B \leqslant \mathrm{acl}_1(B)$ si et seulement si $C^{\mathrm{acl}_1(B)} = C^B$. Pour $K \subseteq L, M \subseteq N$ dans $\tilde{\mathcal{C}}$, on dit que N est un *amalgame libre* de L et M au-dessus de K, si $L \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{1}_{K} M$ et N est contrôlé par LM, c'est à dire $N = \mathrm{acl}_1(LM)$ et $C^N = C^L \cup C^M$.

Les amalgames libres existent dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$. En particulier, la classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$ a la propriété d'amalgamation. De plus, elle est connexe (comme $\mathrm{acl}_1(\emptyset)$ avec aucun point dans C se plonge de manière autosuffisante dans toute structure de $\tilde{\mathcal{C}}_0$). Soit T_ω la $\mathcal{L}$-théorie des structures riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$. Avec des arguments similaires à la fusion libre, on peut établir la proposition suivante.

Proposition 7.2.

(1) *Si T_1 est géométrique, alors la théorie (complète) T_ω admet une axiomatisation explicite, et ses modèles $\aleph_\epsilon$-saturés sont précisément les structures riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$. En particulier, cela fournit une description des types dans T_ω. De plus, il y a une notion d'indépendance naturelle $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}$ dans T_ω.*

(2) *Si T_1 est supersimple de rang* SU *égal à 1, alors T_ω est supersimple de rang* SU *égal à ω et la relation de non-déviation dans T_ω est donnée par $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}$.* □

Corollaire 7.3. *On peut construire et axiomatiser la théorie de la courbe générique dans un corps réel clos, dans un corps p-adiquement clos et dans un corps pseudofini.*

Soit T_1 la théorie d'un corps pseudofini. Comme dans un corps algébriquement clos, le degré fournit une mesure pour décrire la « complexité » d'une courbe plane. On peut donc espérer pouvoir représenter, de manière naturelle, la théorie T_ω comme limite de théories $T_d = \mathrm{Th}(F, C_d)$ où F est pseudofini et C_d une courbe plane de degré d, avec un paramètre générique. Cependant, il n'y a pas de choix unique pour les paramètres génériques, et la limite de telles théories T_d (si elle existe) pourrait dépendre des choix de paramètres.

D'où les questions suivantes (une réponse positive, même à la première partie, paraît probable, mais nous n'avons pas exploré cette question en profondeur ; on ne peut d'ailleurs pas imaginer une réponse positive à la seconde partie qui ne passerait pas par la première).

Questions.

- Est-ce que la limite de telles théories T_d est égale à T_ω, et cela indépendamment du choix des paramètres génériques pour définir les courbes C_d ?

- Est-ce qu'il existe un choix de paramètres pour lequel les théories T_d aient la limite T_ω ?

7.2. Structures bicolores

Afin de construire un contre-exemple à la conjecture de Berline–Lascar (qui dit que le rang U de Lascar d'un corps superstable est toujours de la forme ω^α), Poizat considère des corps algébriquement clos K avec un nouveau prédicat unaire P, désignant un sous-ensemble distinct $P^K \subseteq K$. Il effectue une amalgamation à la Hrushovski, à l'aide de la prédimension $\delta(A) := 2\deg\mathrm{tr}(A) - \dim(P^A)$, où dim est une notion de dimension appropriée sur le prédicat, et il obtient des corps de rang de Morley (et de Lascar) $\omega \cdot 2$; le rang du prédicat est égal à ω.

Dans [**18**], on a $P = N$ (l'ensemble des points noirs), et le prédicat désigne juste un sous-ensemble : on obtient les *corps noirs*. Si $P = R$ désigne un sous-groupe du groupe additif du corps, on construit ainsi les *corps rouges* [**19**]. Enfin, également dans [**19**], Poizat considère le cas où $P = V$ désigne un sous-groupe du groupe multiplicatif du corps, pour obtenir les *corps verts*.

Il y a un cadre naturel qui incorpore deux de ces constructions de *corps bicolores* : les corps noirs (en toute caractéristique) et les corps rouges en caractéristique positive. Nous proposons le cadre des *structures bicolores*. Au niveau de la construction, nous supposerons : T_1 est complète et prégéométrique, et $T_0 \subseteq T_1$ est un réduit fortement minimal et modulaire. En ajoutant un nouveau prédicat unaire R (désignant les *points rouges*) à $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(T_1)$, nous considérons la classe des modèles de $T_1^\forall$ dans $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \{R\}$, à l'aide de la prédimension $\delta(A) := 2\,\mathrm{d}_1(A) - \mathrm{d}_0(R^A)$, où d_i désigne la dimension par rapport à T_i. Pour faciliter l'exposition, nous supposons de plus : les T_i éliminent les quanteurs dans $\mathcal{L}_i$, les langages sont dénomobrables et $\mathrm{acl}_1(\emptyset)$ est infini. On définit la classe des *structures bicolores* comme suit :

$$\tilde{\mathcal{C}}_0 := \{(M, R^M) \mid M = \mathrm{acl}_1(M) \text{ et } (M, R^M) \models T_0^{\mathfrak{P}}\}.$$

Là, $T_0^{\mathfrak{P}}$ désigne la théorie des belles paires de modèles de T_0, considérée dans $\mathcal{L}_0 \cup \{R\}$. Notons que $T_0^{\mathfrak{P}}$ élimine les quanteurs dans ce langage, car T_0 est modulaire.

On définit une notion d'autosuffisance $\leqslant$ (pour des sous-ensembles acl_0-clos de structures dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$) et de dimension $\mathrm{d}(\cdot)$ précisément comme dans la fusion libre, et on obtient alors des opérateurs de clôture cl_0, cl_ω et cl_d, en remplaçant $\langle\cdot\rangle$ par $\mathrm{acl}_1(\cdot)$.

On développe la machinerie des amalgames de Hrushovski comme dans la fusion, à l'exception du fait que la fonction $\mathrm{d}(\cdot)$ n'induit une prégéométrie que si l'on la restreint aux points rouges. L'existence d'amalgames libres donne la propriété d'amalgamation dans $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$, et cette classe est connexe, aussi. On peut donc construire des structures bicolores riches dans $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leqslant)$—riches par rapport à la classe $\mathcal{C}_0$ des structures finiment engendrées au sens de acl_1. Soit T_ω la théorie (complète) des structures bicolores riches.

Théorème 7.4.

(1) *Si T_1 est géométrique et T_0 ω-catégorique, alors T_ω admet une axiomatisation explicite, et ses modèles $\aleph_\epsilon$-saturés sont précisément les structures bicolores riches. En particulier, cela fournit une description des types dans T_ω. De plus, il y a une notion d'indépendance naturelle $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^*$ dans T_ω.*

(2) *Si T_1 est supersimple de rang* SU *égal à* 1 *et T_0 ω-catégorique, alors T_ω est supersimple de rang* SU *au plus $\omega \cdot 2$ (avec $\mathrm{SU}(R) \leqslant \omega$) et la relation de non-déviation dans T_ω est donnée par $\downarrow^*$.* $\square$

Dans bien des cas, il est possible d'effectuer des calculs exacts du rang SU.

Exemple 7.5.

(1) Soit T_1 la théorie d'un corps pseudofini et T_0 la théorie d'un ensemble infini sans structure. Alors $\mathrm{SU}(T_\omega) = \omega \cdot 2$ et $\mathrm{SU}(R) = \omega$.

(2) Soit T_1 la théorie d'un corps pseudofini de caractéristique $p > 0$ et $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_p}$. Alors, comme avant, $\mathrm{SU}(T_\omega) = \omega \cdot 2$ et $\mathrm{SU}(R) = \omega$.

Remerciements. Les résultats font partie de ma thèse de doctorat, préparée à Université Paris 7 et a l'Université Lyon 1, sous la direction de Zoé Chatzidakis et Frank O. Wagner. Les recherches étaient cofinancées par un DAAD Doktorandenstipendium D/02/02345.

Je voudrais remercier Bruno Poizat pour son inspiration constante, fruit de sa curiosité inassouvissable et de sa façon de poser des questions.

Références

1. A. Baudisch, A. Martin-Pizarro et M. Ziegler, Fusion over a vector space, *J. Math. Logic*, à paraître.
2. I. Ben-Yaacov, Lovely pairs of models: the non first order case, *J. Symb. Logic* **69** (2004), 641–662.
3. I. Ben-Yaacov, A. Pillay et E. Vassiliev, Lovely pairs of models, *Annals Pure Appl. Logic* **122** (2003), 235–261.
4. O. Chapuis, E. Hrushovski, P. Koiran et B. Poizat, La limite des théories de courbes génériques, *J. Symb. Logic* **67** (2002), 24–34.
5. Z. Chatzidakis et E. Hrushovski, Model theory of difference fields, *Trans. Am. Math. Soc.* **351** (1999), 2997–3071.
6. Z. Chatzidakis et A. Pillay, Generic structures and simple theories, *Annals Pure Appl. Logic* **95** (1998), 71–92.
7. J. Gagelman, Stability in geometric theories, *Annals Pure Appl. Logic* **132** (2005), 313–326.
8. D. Haskell et D. Macpherson, A version of o-minimality for the p-adics, *J. Symb. Logic* **62** (1997), 1075–1092.
9. A. Hasson et M. Hils, Fusion over sublanguages, *J. Symb. Logic* **71** (2006), 361–398.
10. M. Hils, Fusion libre et autres constructions génériques, Thèse de Doctorat, Université Paris 7 (2006).
11. E. Hrushovski, Strongly minimal expansions of algebraically closed fields, *Israel J. Math.* **79** (1992), 129–151.
12. E. Hrushovski, Simplicity and the Lascar group, prépublication (disponible à http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.41.8167, 1998).
13. E. Hrushovski, Pseudofinite fields and related structures, dans *Model theory and applications* (éd. L. Bélair et al.), Quaderni di Matematica, tome 11, pp. 151–212 (Aracne, Rome, 2002).
14. B. Kim, Forking in simple unstable theories, *J. Lond. Math. Soc.* **57** (1998), 257–267.

15. B. Kim et A. Pillay, Simple theories, *Annals Pure Appl. Logic* **88** (1997), 149–164.
16. A. Pillay, *Geometric stability theory* (Clarendon, Oxford, 1996).
17. B. Poizat, Paires de structures stables, *J. Symb. Logic* **48** (1983), 239–249.
18. B. Poizat, Le carré de l'égalité, *J. Symb. Logic* **64** (1999), 1339–1355.
19. B. Poizat, L'égalité au cube, *J. Symb. Logic* **66** (2001), 1647–1676.
20. S. Shelah, Simple unstable theories, *Annals Math. Logic* **19** (1980), 177–203.
21. S. Shelah, *Classification theory*, éd. révisée (North-Holland, Amsterdam, 1990).
22. L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, London Mathematical Society Lecture Note Series, tome 248 (Cambridge University Press, 1998).
23. E. Vassiliev, Generic pairs of SU-rank 1 structures, *Annals Pure Appl. Logic* **120** (2003), 103–149.
24. F. O. Wagner, *Simple theories* (Kluwer, Dordrecht, 2000).