Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2007) **8**(3), 415–443 © Cambridge University Press 415
doi:10.1017/S1474748008000091 Printed in the United Kingdom

DIE BÖSE FARBE

ANDREAS BAUDISCH[1], MARTIN HILS[1,2,3],
AMADOR MARTIN-PIZARRO[1,3]
UND FRANK O. WAGNER[3]

[1] *Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, D-10099 Berlin, Germany* (baudisch@mathematik.hu-berlin.de; hils@mathematik.hu-berlin.de)
[2] *Equipe de Logique Mathématique, Université Denis-Diderot Paris VII, 75251 Paris Cedex 05, France*
[3] *Université de Lyon; Université Lyon 1; CNRS, Institut Camille Jordan, 43 bd du 11 nov. 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France*
(pizarro@math.univ-lyon1.fr; wagner@math.univ-lyon1.fr)

(Eingegangen 2. Juli 2007; angenommen 7. November 2007)

Zusammenfassung Wir konstruieren einen schlechten Körper der Charakteristik Null. Mit anderen Worten, wir konstruieren einen algebraisch abgeschlossenen Körper mit einem Dimensionsbegriff analog der Zariski-Dimension, zusammen mit einer unendlichen echten multiplikativen Untergruppe der Dimension Eins, so daß der Körper selbst Dimension Zwei hat. Dies beantwortet eine alte Frage von Zilber.

Abstract We construct a bad field in characteristic zero. That is, we construct an algebraically closed field which carries a notion of dimension analogous to Zariski-dimension, with an infinite proper multiplicative subgroup of dimension one, and such that the field itself has dimension two. This answers a longstanding open question by Zilber.

Schlüsselwörter: Modelltheorie; Körper von endlichem Morleyrang; Schlechter Körper; Amalgamierungskonstruktion

Keywords: model theory; fields of finite Morley rank; bad field; amalgamation construction

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 03C65
Secondary 03C50; 03C45; 03C35

1. Einleitung

Morleyrang ist eine modelltheoretische Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffs für algebraische Varietäten, der für definierbare Mengen in beliebigen mathematischen Strukturen definiert werden kann; eine Struktur ist ω-stabil, falls der Morleyrang ordinale Werte annimmt. Das Analogon zur Anzahl irreduzibler Komponenten von maximaler Dimension ist der Morleygrad; eine frühe Vermutung von Zilber besagt, daß eine Struktur vom Morleyrang und -grad 1 (eine *streng minimale Menge*) von einer bekannten

Geometrie herrührt: Der trivialen (degenerierten) Geometrie, der Geometrie eines Vektorraumes über einem Schiefkörper, oder der Zariskigeometrie über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Diese Vermutung wurde 1988 von Hrushovski widerlegt [**10**], indem er die Fraïssésche Konstruktion des universellen homogenen Modells einer zusammenhängenden Klasse endlicher relationaler Strukturen mit Amalgamierungseigenschaft in genialer Weise variierte. Die Methode wurde von Poizat und Goode [**7**] in zwei Schritte zerlegt: Konstruktion einer generischen Struktur vom Rang ω und Kollaps zu einer streng minimalen Menge; sie hat seither zahlreiche weitere Anwendungen gefunden. So konnte Hrushovski zwei streng minimale Mengen mit definierbarem Morleygrad in disjunkten Sprachen zu einer streng minimalen Menge fusionieren [**9**] (siehe auch [**4**]); insbesondere folgt daraus, daß es eine streng minimale Menge gibt, die zwei verschiedene Körperstrukturen trägt (eventuell sogar in verschiedenen Charakteristiken), die zueinander so unabhängig wie möglich liegen. Die im Hrushovskischen Artikel enthaltene Randbemerkung, die Fusion sollte sich auch durchführen lassen, wenn die beiden streng minimalen Mengen Expansionen einer gemeinsamen Vektorraumstruktur über einem endlichen Körper sind, wurde vom zweiten Autor und Hasson [**8**] im monobasierten Fall durchgeführt; in demselben Artikel wird auch der unkollabierte Fall einer Fusion vom Rang ω behandelt. Der Kollaps zu einer streng minimalen Fusion gelang schließlich dem ersten und dritten Autor zusammen mit Ziegler [**5**]; in einer Variante derselben Ideen zeigten sie auch [**6**] die Existenz eines Körpers beliebiger positiver Charakteristik vom Morleyrang 2 mit einer additiven Untergruppe vom Rang 1 durch Kollaps eines entsprechenden von Poizat [**15**] konstruierten Körpers vom Rang $\omega \cdot 2$. Somit gibt es insbesondere eine streng minimale Menge mit einer Addition, aber zwei voneinander unabhängigen Multiplikationen.

Schlechte Körper sind Körper von endlichem Morleyrang mit einem Prädikat für eine nichttriviale divisible echte multiplikative Untergruppe. Sie wurden im Zusammenhang mit der Analyse einfacher Gruppen von endlichem Morleyrang eingeführt, wo eine Boreluntergruppe (maximale auflösbare Untergruppe) etwa die Form $K^+ \rtimes T$ mit $1 < T < K^\times$ haben könnte. Gemäß der Vermutung von Cherlin–Zilber, einer algebraischen Variante der Zilberschen Vermutung, sollte eine einfache Gruppe von endlichem Morleyrang algebraisch sein; die Abwesenheit von schlechten Körpern würde die Untersuchung der Boreluntergruppen vereinfachen. In positiver Charakteristik ist ihre Existenz unwahrscheinlich [**17**, **18**]; in Charakteristik 0 hat Poizat [**15**] tiefe Ergebnisse von Ax [**1**] verwendet, um einen Körper vom Rang $\omega\cdot 2$ mit multiplikativer Untergruppe vom Rang ω zu konstruieren, nachdem er bereits zuvor [**14**] einen Körper vom Rang $\omega \cdot 2$ mit Prädikat für eine Teilmenge vom Rang ω konstruiert hatte; dies widerlegte insbesondere eine Vermutung von Berline und Lascar, derzufolge der Rang eines Körpers (falls ordinal) ein Monom der Form ω^α sein sollte. Poizat [**14**] erhielt auch durch Amalgamation kollabierte Strukturen; Baldwin und Holland [**2**] wiesen nach, daß diese unter bestimmten Bedingungen ω-saturiert und damit ω-stabil von Morleyrang 2 sind. Der Beweis dieses Resultats wurde vom ersten und dritten Autor sowie Ziegler [**3**] mit einer einfachen Axiomatisierung neu gefaßt. Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, daß nach einem Satz von Macintyre [**12**] ein Körper von ordinalem Morleyrang algebraisch abgeschlossen sein muß.

Poizat folgend nennen wir das Prädikat für eine multiplikative Untergruppe *grün* (eine additive Untergruppe ist rot, und eine Teilmenge schwarz). In diesem Artikel führen wir den Kollaps des grünen Körpers durch und zeigen somit die Existenz eines schlechten Körpers der Charakteristik 0. Die Konstruktion lehnt sich eng dem roten Kollaps in [**6**] an, wobei wir anstelle der Lokalendlichkeit des Vektorraumes über $\mathbb{F}_p$ die Ergebnisse von Ax/Poizat verwenden.

2. Algebraische Lemmata

In diesem Abschnitt führen wir die Resultate aus der algebraischen Geometrie auf, die wir im Laufe des Beweises benötigen. Wir verwenden die folgende Bezeichnung: $\mathbb{C}$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper der Characteristik 0. Eine Varietät V ist immer eine abgeschlossene Untervarietät von $(\mathbb{C}^*)^n$ (betrachtet als affine Varietät). Ein Torus ist eine zusammenhängende Untergruppe von $(\mathbb{C}^*)^n$, gegeben durch endlich viele Gleichungen der Form: $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} = 1$. Für einen Torus T ist die lineare Dimension $\operatorname{ldim}(T)$ (als $\mathbb{Q}$-Vektorraum modulo Torsion) gleich der algebraischen Dimension $\dim(T)$ (als Varietät). Gegeben eine abgeschlossene irreduzible Untervarietät V von $(\mathbb{C}^*)^n$, ist der *minimale Torus* von V der kleinste Torus T, so daß V in einer Nebenklasse $\bar{a} \cdot T$ von T enthalten ist. Wir setzen $\operatorname{ldim}(V) := \dim(T)$, und $\operatorname{cd}(V) := \dim(T) - \dim(V) = \operatorname{ldim}(V) - \dim(V)$, die *Kodimension* von V. Eine irreduzible Untervarietät $W \subseteq V$ heiße cd-*maximal*, falls für alle irreduziblen $W \subsetneq W' \subseteq V$ gilt, daß $\operatorname{cd}(W') > \operatorname{cd}(W)$. Trivialerweise sind irreduzible Komponenten von V sowie maximale in V enthaltene Torusnebenklassen cd-maximal.

Zunächst sei ein grundlegendes Ergebnis über Tori in Erinnerung gerufen.

Anmerkung 2.1. Eine zusammenhängende algebraische Untergruppe eines Torus ist wieder ein Torus.

Folgendes Ergebnis wurde von Poizat bewiesen [**15**, Corollaires 3.6 und 3.7].

Satz 2.2. *Sei $V(\bar{x}, \bar{z})$ eine uniform definierbare Familie von Varietäten in $(\mathbb{C}^*)^n$. Dann existiert eine endliche Familie $\mathcal{T}(V) = \{T_0, \ldots, T_r\}$ von Tori in $(\mathbb{C}^*)^n$, so daß für jeden Torus $T \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$, jede Varietät $V_{\bar{b}} = V(\bar{x}, \bar{b})$ aus der Familie und jede irreduzible Komponente W von $V_{\bar{b}} \cap \bar{a} \cdot T$ (mit $\bar{a}$ in W) ein i in $\{0, \ldots, r\}$ existiert, so daß $W \subseteq \bar{a} \cdot T_i$ und $\dim(T_i) - \dim(V \cap \bar{a} \cdot T_i) = \dim T - \dim W$ ist.*

Zusatz: Der minimale Torus jeder cd*-maximalen Untervarietät von $V_{\bar{b}}$ liegt in der der Familie $\mathcal{T}(V)$.*

Offensichtlich können wir annehmen, daß die Tori aus der Familie paarweise verschieden sind, mit $T_0 = (\mathbb{C}^*)^n$ und $T_1 = \{1\}^n$.

Bemerkung 2.3. Wir werden in der gesamten Arbeit nur den Zusatz aus Satz 2.2 verwenden. Während jedoch Poizat das Ergebnis lediglich benutzt, um die Saturiertheit der konstruierten Modelle zu zeigen, benötigen wir Satz 2.2 schon für die Konstruktion selbst.

Bemerkung 2.4. Die Aussage von Satz 2.2 ist falsch in positiver Charakteristik. Wir bedanken uns bei Bays und Zilber für das folgende Beispiel. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei $V \subseteq (K^*)^4$ definiert durch die Gleichungen $x + y = 1$ und $z + u = 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n \subseteq (K^*)^4$ der durch die Gleichungen $z^{p^n} = x$ und $u^{p^n} = y$ definierte Torus. Man sieht leicht:

- V ist irreduzibel mit $\dim(V) = 2$ und $\mathrm{cd}(V) = 2$.
- $X_n := V \cap T_n$ ist eine irreduzible Kurve mit minimalem Torus T_n und es gilt $\mathrm{cd}(X_n) = 1$.
- X_n ist eine cd-maximale Untervarietät von V.

Eine Familie von Tori mit den Eigenschaften wie in Satz 2.2 enthielte dann notwendigerweise alle Tori T_n. Diese sind jedoch paarweise verschieden.

Folgerung 2.5. *Sei $V(\bar{x}, \bar{z})$ eine uniform definierbare Familie von Varietäten.*

(1) *Ist T der minimale Torus von $V_{\bar{b}}$, so existiert $\theta(\bar{z}) \in \mathrm{tp}(\bar{b})$, so daß T der minimale Torus für alle $V_{\bar{b}'}$ mit $\models \theta(\bar{b}')$ ist. Insbesondere gibt es also eine definierbare Umgebung von $\bar{b}$, in der* ldim *und* cd *konstant sind.*

(2) *Sei $V_{\bar{b}} = \bigcup_{k=1}^{m} W_k$ die Zerlegung von $V_{\bar{b}} = V(\bar{x}, \bar{b})$ in irreduzible Komponenten, mit $d_k := \dim(W_k)$, $l_k := \mathrm{ldim}(W_k)$ und $c_k := \mathrm{cd}(W_k)$. Dann existiert ein $\theta(\bar{z}) \in \mathrm{tp}(\bar{b})$, so daß für alle $\bar{b}' \models \theta$ gilt: $V_{\bar{b}'}$ besitzt genau m irreduzible Komponenten $(W'_k : 1 \leqslant k \leqslant m)$ mit (bei geeigneter Anordnung) $\dim(W'_k) = d_k$, $\mathrm{ldim}(W'_k) = l_k$ und $\mathrm{cd}(W'_k) = c_k$.*

Beweis. Der erste Teil folgt sofort aus Satz 2.2, da irreduzible Komponenten cd-maximal sind, ihre minimalen Tori also in der Familie $\mathcal{T}(V)$ aus Satz 2.2 liegen.

Es ist ein klassisches Resultat (siehe etwa [**16**]), daß die Zerlegung einer Varietät in ihre irreduziblen Komponenten definierbar ist. Teil (2) folgt also aus (1). □

3. δ-Arithmetik

Sei $\mathbb{C}$ ein sehr großer algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, d.h. ein Monstermodell für ACF_0. Sei $\mathcal{L}_{\mathrm{mult}} := \{\cdot, 1, 0, =\} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{Ring}} = \{+, \cdot, 1, 0, =\}$, und $T_{\mathrm{mult}} := \mathrm{Th}_{\mathcal{L}_{\mathrm{mult}}}(\mathbb{C})$. Das Primmodell von T_{mult} besteht gerade aus den Einheitswurzeln $\mu(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ zusammen mit 0. Diese Struktur ist $\mathcal{L}_{\mathrm{mult}}$-isomorph zur Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (multiplikativ geschrieben), erweitert um ein neues Element. Insbesondere ist T_{mult} modular und nichttrivial, und seine Geometrie ist die projektive Geometrie über $\mathbb{Q}$.

Für $A \subseteq \mathbb{C}$ sei $\langle A \rangle$ die divisible Hülle (bezüglich der Multiplikation) von $A^* := A \setminus \{0\}$ in $\mathbb{C}^*$ vereinigt mit 0. Das ist gerade der algebraische Abschluß von A in $\mathbb{C}$ bezüglich $\mathcal{L}_{\mathrm{mult}}$ und liefert das Primmodell von T_{mult} über A. Für ein Tupel $\bar{a} \in \mathbb{C}^*$ ist also $\mathrm{MR}(\bar{a})$ bezüglich $\mathcal{L}_{\mathrm{mult}}$ gleich der linearen $\mathbb{Q}$-Dimension (modulo Torsion). Wir schreiben hierfür $\mathrm{ldim}(\bar{a})$. Mit $\dim(\bar{a}/B)$ bezeichnen wir die Dimension des Locus von $\bar{a}$ über B, was dasselbe ist wie der Transzendenzgrad, oder der Morleyrang in ACF_0.

Wir betrachten nun $\langle\cdot\rangle$-abgeschlossene Teilmengen B von $\mathbb{C}$, in der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{Ring}}$. Solche Teilmengen sind in der Regel keine Unterkörper. Man kann jedoch formal in einer Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{Morley}}$ arbeiten, einer Morleyisierung von ACF_0, die neben $\mathcal{L}_{\mathrm{mult}}$ nur Relationssymbole enthält. Wir werden aber weiter die Körperaddition $+$ verwenden und auch vom erzeugten Körper, dem algebraischen Abschluß etc. sprechen. Dies dürfte nicht zu Unklarheiten führen. Die Klasse der beschriebenen Strukturen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}$. Einbettungen in $\mathcal{D}$ sind elementare Abbildungen bezüglich $\mathcal{L}_{\mathrm{Ring}}$, also $\mathcal{L}_{\mathrm{Morley}}$-Einbettungen. Eine Struktur $A \in \mathcal{D}$ heiße *endlich erzeugt* über $B \subseteq A$, falls $A = \langle \bar{a} B \rangle$ ist, für ein endliches $\bar{a} \in A$. Das sind natürlich gerade die divisiblen Hüllen der Untergruppen von $\mathbb{C}^*$ von endlichem Rang über $\langle B \rangle$ (plus die 0). Ist für $A, B \subseteq \mathbb{C}$ die Struktur $\langle AB \rangle$ über $\langle B \rangle$ endlich erzeugt, so setzt man

$$\delta(A/B) := 2\,\mathrm{tr}(A/B) - \mathrm{ldim}(A/B).$$

Offenbar gilt $\delta(A/B) = \delta(\langle AB \rangle / \langle B \rangle)$. Da T_{mult} modular ist, erhält man mit den üblichen Argumenten folgendes:

Lemma 3.1.

(1) $\delta(\bar{a}\bar{b}/C) = \delta(\bar{b}/C) + \delta(\bar{a}/\bar{b}C)$ *(Additivität).*

(2) *Sind* $C \subseteq B \in \mathcal{D}$, *so ist* $\delta(\bar{a}/B) \leqslant \delta(\bar{a}/B \cap \langle C\bar{a} \rangle)$ *(Submodularität).*

Lemma 3.2. *Seien* $\bar{a}$ *und* B *gegeben,* W *der Locus von* $\bar{a}$ *über* $\mathrm{acl}(B)$*. Dann gilt* $\delta(\bar{a}/\mathrm{acl}(B)) = \dim(W) - \mathrm{cd}(W)$, *und allgemeiner*

$$\delta(\bar{a}/B) = \dim(W) - \mathrm{cd}(W) - \mathrm{ldim}(\langle \bar{a}B \rangle \cap \mathrm{acl}(B)/B).$$

Beweis. Für den ersten Teil genügt es zu bemerken, daß (über einer algebraisch abgeschlossenen Menge B) die kleinste Nebenklasse eines Torus, die $\bar{a}$ enthält, über B in $\mathcal{L}_{\mathrm{mult}}$ definiert ist, und somit gibt deren Dimension gerade $\mathrm{ldim}(\bar{a}/B)$. Der zweite Teil folgt leicht aus der Modularität von T_{mult}. $\square$

Definition 3.3.

- Sei $M \subseteq N \in \mathcal{D}$ mit $\mathrm{ldim}(N/M) = n \geqslant 2$. Dann heiße N/M *minimal präalgebraisch* (*der Länge* n), falls $\delta(N/M) = 0$ und $\delta(N'/M) > 0$ für alle $N' = \langle N' \rangle \in \mathcal{D}$ mit $M \subsetneq N' \subsetneq N$.
- Sei $B \subseteq \mathbb{C}$ und $p(\bar{x}) \in S^n(B)$ ein starker Typ (in ACF_0). Dann heiße p *minimal präalgebraisch*, falls für $\bar{a} \models p$ die Erweiterung $\langle B\bar{a} \rangle / \langle B \rangle$ minimal präalgebraisch der Länge n ist (insbesondere ist $\bar{a}$ multiplikativ unabhängig über B).
- Eine Formel $\varphi(\bar{x})$ vom Morleygrad 1 heiße *minimal präalgebraisch*, falls der generische Typ in $\varphi(\bar{x})$ minimal präalgebraisch ist.

Bemerkung 3.4.

- Wegen $0 = \delta(N/M) = \delta(N/N') + \delta(N'/M)$ ist die Bedingung $\delta(N'/M) > 0$ äquivalent zu $\delta(N/N') < 0$.

- Ist N/M minimal prälgebraisch und $\bar{n}$ eine multiplikative Basis von N über M, dann ist $\mathrm{stp}(\bar{n}/M)$ minimal präalgebraisch.
- Für starke Typen ist die Eigenschaft, minimal präalgebraisch zu sein, invariant unter Parallelismus und multiplikativer Translation. Insbesondere ist die Definition, die wir in 3.3 im Falle einer Formel $\varphi(\bar{x})$ geben, wohldefiniert.

4. Kodes

Wie üblich will man minimal präalgebraische Erweiterungen kodieren. Zunächst ist klar, daß jeder starke Typ der generische Typ von genau einer irreduziblen Varietät ist.

Definition 4.1. Die irreduzible Varietät $V = V(\bar{x}, \bar{b})$ heiße *Kodevarietät*, falls sie minimal präalgebraisch ist, d.h. für jedes $B = \langle B \rangle \ni \bar{b}$ ist ein über B generisches $\bar{a} \in V$ multiplikative Basis der minimal präalgebraischen Erweiterung $\langle B\bar{a} \rangle / \langle B \rangle$.

Insbesondere ist ein multiplikatives Translat einer Kodevarietät wieder eine Kodevarietät.

Sei $M \in \mathcal{D}$, $\mathrm{tp}(\bar{a}/M)$ minimal präalgebraisch der Länge n, $N = \langle M\bar{a} \rangle$ und $N' = \langle N' \rangle$ mit $M \subsetneq N' \subsetneq N$. Aus der Modularität von T_{mult} folgt, daß N' eine $\mathcal{L}_{\mathrm{mult}}$-Basis $\bar{a}' \in \langle \bar{a} \rangle$ über M besitzt; sei m ihre Länge. Modulo Torsion hat man $a'_j = \prod a_i^{\lambda_{ij}}$ für $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}$. Ersetzt man nun a'_j durch geeignete Potenzen/Wurzeln, so kann man erreichen, daß alle $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$ sind und zudem die $(\lambda_{ij})_{i<n}$ teilerfremd sind für alle $j < m$. Sei Λ_T die Abbildung

$$(x_i : i < n) \mapsto \left(\prod_{i<n} x_i^{\lambda_{ij}} : j < m \right).$$

Dann beschreiben die Gleichungen $\Lambda_T(\bar{x}) = \bar{1}$ einen Torus T der Dimension $d = n - m$; die Fasern von Λ_T sind genau die Nebenklassen von T. Wegen $\emptyset$-Definierbarkeit von T ist also $\bar{a}' = \Lambda_T(\bar{a})$ die kanonische Basis $[\bar{a} \cdot T]$ von $\bar{a} \cdot T$.

Umgekehrt gilt für jeden Torus T in $(\mathbb{C}^*)^n$ mit $\dim(T) = d$, daß $\bar{a}' := \Lambda_T(\bar{a})$ eine Substruktur $N' := \langle M\bar{a}' \rangle \subseteq N$ erzeugt mit $\mathrm{ldim}(N'/M) = m = n - d$.

Lemma 4.2. *Sei $V(\bar{x}, \bar{b}) \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$ eine irreduzible Varietät, $T \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$ ein Torus und $\bar{a}$ generisch in $V_{\bar{b}}$ über $B \ni \bar{b}$. Dann ist ein Tupel $\bar{a}_1 \in W := V \cap \bar{a} \cdot T$ generisch in W über $B[\bar{a} \cdot T]$ genau dann, wenn es generisch in $V_{\bar{b}}$ ist.*

Beweis. Man beachte, daß $\bar{a}' := [\bar{a} \cdot T]$ über jedem $\bar{a}_2 \in \bar{a} \cdot T$ multiplikativ definierbar ist, also insbesondere über $\bar{a}_1 \in W$. Man erhält

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\bar{a}_1/B\bar{a}') &= \mathrm{tr}(\bar{a}_1\bar{a}'/B) - \mathrm{tr}(\bar{a}'/B) = \mathrm{tr}(\bar{a}_1/B) - \mathrm{tr}(\bar{a}'/B) \\ &\leqslant \mathrm{tr}(\bar{a}/B) - \mathrm{tr}(\bar{a}'/B) = \mathrm{tr}(\bar{a}/B\bar{a}'),\end{aligned}$$

und somit leicht die Behauptung. $\square$

Schon in [**15**] wird das folgende Resultat gezeigt. Wir geben den Beweis, da wir gleich anschließend dieselben Ideen noch einmal brauchen.

Lemma 4.3. *Sei $V(\bar{x}, \bar{z})$ eine uniforme Familie (irreduzibler) Varietäten und $V_{\bar{b}} = V(\bar{x}, \bar{b})$ eine Kodevarietät. Dann existiert eine Formel $\theta(\bar{z}) \in \mathrm{tp}(\bar{b})$, so daß $V_{\bar{b}_1}$ eine Kodevarietät ist für alle $\bar{b}_1 \models \theta$.*

Beweis. Sei $\mathcal{T}(V) = \{T_0, \ldots, T_r\}$ die mit $V(\bar{x}, \bar{z})$ assoziierte Familie von Tori aus Satz 2.2. Sei B beliebig mit $\bar{b} \in B$. Es ist dann $n = \mathrm{ldim}(V_{\bar{b}}) = 2k$, wobei $k = \dim(V_{\bar{b}})$. Man sieht leicht, daß für B-generisches $\bar{g} \in V_{\bar{b}}$ stets $\langle B\bar{g}\rangle \cap \mathrm{acl}(B) = \langle B\rangle$ ist.

Die Formel $\theta(\bar{z})$ drücke aus:

(1) $\dim(V_{\bar{z}}) = k$ sowie $\mathrm{ldim}(V_{\bar{z}}) = n$ (insbesondere ist $V_{\bar{z}} \neq \emptyset$).

(2) Für generisches $\bar{g}$ in $V_{\bar{z}}$ und $i = 2, \ldots, r$ gilt: Ist $V_{\bar{z}} \cap \bar{g} \cdot T_i$ unendlich und W eine irreduzible Komponente maximaler Dimension von $V_{\bar{z}} \cap \bar{g} \cdot T_i$, so ist $\mathrm{cd}(W) > \dim(W)$.

Aufgrund Folgerung 2.5 sind dies definierbare Bedingungen.

Zunächst zeigt man, daß $\models \theta(\bar{b})$. Sei $\bar{g}$ generisch in $V_{\bar{b}}$ und $T \neq T_0$ ein Torus, so daß $V_{\bar{b}} \cap \bar{g} \cdot T$ unendlich ist. Sei $W \subseteq V_{\bar{b}} \cap \bar{g} \cdot T$ eine irreduzible Komponente maximaler Dimension. Nach Lemma 4.2 ist $\bar{g}$ in W über $\mathrm{acl}(\bar{b}, [\bar{g} \cdot T])$ generisch. Es gilt $\bar{g} \notin \mathrm{acl}(\bar{b}, [\bar{g} \cdot T])$ und $[\bar{g} \cdot T] \notin \mathrm{acl}(\bar{b})$; mit Lemma 3.2 folgt aus der minimalen Präalgebraizität von $\langle \bar{g}\bar{b}\rangle / \langle \bar{b}\rangle$

$$\dim(W) - \mathrm{cd}(W) = \delta(\langle \bar{g}\bar{b}\rangle / \mathrm{acl}(\bar{b}, [\bar{g} \cdot T])) = \delta(\langle \bar{g}\bar{b}\rangle / \mathrm{acl}(\bar{b}, [\bar{g} \cdot T]) \cap \langle \bar{g}\bar{b}\rangle) < 0.$$

Sei nun $\bar{b}_1 \models \theta$ und $\bar{g}$ generisch in $V_{\bar{b}_1}$ über $B_1 \ni b_1$. Nach Bedingung (1) in $\theta(\bar{z})$ gilt $\delta(\bar{g}/B_1) = 0$. Wir müssen zeigen, daß $\delta(\bar{g}/[\bar{g} \cdot T], B_1) < 0$ ist für alle Tori T mit $1 \leqslant d := \dim(T) \leqslant n - 1$. Setze $\bar{g}' := [\bar{g} \cdot T]$, und sei W der Locus von $\bar{g}$ über $\mathrm{acl}(B_1\bar{g}')$.

Fall 1: $\bar{g} \in \mathrm{acl}(B_1\bar{g}')$, d.h. W ist ein Punkt. Dann ist

$$\begin{aligned}\delta(\bar{g}/B_1\bar{g}') &= -\,\mathrm{ldim}(\bar{g}/B_1\bar{g}') = \mathrm{ldim}(\bar{g}'/B_1) - \mathrm{ldim}(\bar{g}\bar{g}'/B_1) \\ &= \mathrm{ldim}(\bar{g}'/B_1) - \mathrm{ldim}(\bar{g}/B_1) = (n-d) - n = -d < 0.\end{aligned}$$

Fall 2: $\mathrm{cd}(W) = \mathrm{cd}(V_{\bar{b}_1})$. Wegen $W \subsetneq V_{\bar{b}_1}$ ist nach Lemma 3.2

$$\delta(\bar{g}/B_1\bar{g}') \leqslant \dim(W) - \mathrm{cd}(W) < \dim(V_{\bar{b}_1}) - \mathrm{cd}(V_{\bar{b}_1}) = 0.$$

Fall 3: W ist unendlich und $\mathrm{cd}(W) < \mathrm{cd}(V_{\bar{b}_1})$. Wir wählen $W \subseteq \tilde{W} \subseteq V_{\bar{b}_1}$ irreduzibel und maximal mit $\mathrm{cd}(\tilde{W}) \leqslant \mathrm{cd}(W)$. Offenbar ist $\tilde{W}$ cd-maximal und besitzt einen minimalen Torus T_i aus $\mathcal{T}(V)$; wegen $\mathrm{cd}(W) < \mathrm{cd}(V_{\bar{b}_1})$ ist $i \neq 0$, und $i \neq 1$ wegen der Unendlichkeit von W. Wir haben $\tilde{W} \subseteq V \cap \bar{g} \cdot T_i$. Sei $\tilde{W}'$ irreduzible Komponente maximaler Dimension in $V \cap \bar{g} \cdot T_i$. Nach Wahl von θ gilt $\mathrm{cd}(\tilde{W}') > \dim(\tilde{W}')$. Also ist

$$\delta(\bar{g}/B_1\bar{g}') \leqslant \dim(W) - \mathrm{cd}(W) \leqslant \dim(\tilde{W}) - \mathrm{cd}(\tilde{W}) \leqslant \dim(\tilde{W}') - \mathrm{cd}(\tilde{W}') < 0.$$

$\square$

Der vorstehende Beweis gibt uns den Hinweis, wie man—uniform in den Parametern—eine generische (definierbare) Teilmenge $\varphi_1(\bar{x}, \bar{b})$ einer Kodevarietät $V(\bar{x}, \bar{b})$ finden kann mit für die spätere Kodierung wichtigen Eigenschaften. Ist $V(\bar{x}, \bar{z})$ eine uniforme Familie von Kodevarietäten und $\mathcal{T}(V) = \{T_0, \ldots, T_r\}$, so definieren wir $\varphi_1(\bar{x}, \bar{z}) \subseteq V(\bar{x}, \bar{z})$ wie folgt:

- Für $\bar{a} \in V_{\bar{b}}$ gelte $\models \varphi_1(\bar{a}, \bar{b})$ genau dann wenn für $i = 2, \ldots, r$ folgendes erfüllt ist: Ist $V_{\bar{b}} \cap \bar{a} \cdot T_i$ unendlich und W eine irreduzible Komponente maximaler Dimension, so ist $\mathrm{cd}(W) > \dim(W)$.

Nach Folgerung 2.5 ist dies eine definierbare Bedingung.

Lemma 4.4. *Sei $(V_{\bar{z}}(\bar{x}) : \bar{z} \models \theta)$ eine Familie von Kodevarietäten, und sei $\varphi_1(\bar{x}, \bar{z})$ wie eben definiert. Dann ist für $\bar{b} \models \theta$ die Menge $\varphi_1(\bar{x}, \bar{b})$ generisch in $V_{\bar{b}}$, und für alle $\bar{a} \models \varphi_1(\bar{x}, \bar{b})$ und $B \ni \bar{b}$ gilt:*

(1) $\delta(\bar{a}/B) \leqslant 0$.

(2) *Ist $\delta(\bar{a}/B) = 0$, so ist entweder $\bar{a} \in \langle B \rangle$ oder $\bar{a}$ ist generisch in $V_{\bar{b}}$ über B.*

Beweis. Aus dem Beweis von Lemma 4.3 folgt, daß $\varphi_1(\bar{x}, \bar{b})$ generisch in $V_{\bar{b}}$ ist. Wir nehmen an, daß $\bar{a}$ nicht in $V_{\bar{b}}$ über B generisch ist und auch nicht in $\langle B \rangle$ liegt; wir müssen $\delta(\bar{a}/B) < 0$ zeigen. Sei W der Locus von $\bar{a}$ über $\mathrm{acl}(B)$. Analog zum Beweis von Lemma 4.3 gibt es drei Fälle:

Fall 1: $\bar{a} \in \mathrm{acl}(B)$ (das ist der Fall, in dem W gleich einem Punkt ist). Dann gilt wie vorhin, daß $\delta(\bar{a}/B) = -\operatorname{ldim}(\bar{a}/B) < 0$.

Fall 2: W ist unendlich und $\mathrm{cd}(W) = \mathrm{cd}(V_{\bar{b}})$. Wie vorhin ist $W \subsetneq V_{\bar{b}}$, und somit $\delta(\bar{a}/B) \leqslant \dim(W) - \mathrm{cd}(W) < \dim(V_{\bar{b}}) - \mathrm{cd}(V_{\bar{b}}) = 0$.

Fall 3: W ist unendlich und $\mathrm{cd}(W) < \mathrm{cd}(V_{\bar{b}})$. Identisches Argument wie in 4.3. Was dort aus der Generizität und θ folgte, ist hier Bestandteil von $\varphi_1(\bar{x}, \bar{b})$. □

Gegeben Formeln $\varphi(\bar{x})$ und $\psi(\bar{x})$ schreiben wir $\varphi(\bar{x}) \sim \psi(\bar{x})$, falls der Morleyrang der symmetrischen Differenz von φ und ψ kleiner als $\mathrm{MR}(\varphi(\bar{x}))$ ist. (Dann ist $\mathrm{MR}(\varphi) = \mathrm{MR}(\psi)$, und $\sim$ ist symmetrisch.) Sei $p \in S^n(B)$ ein minimal präalgebraischer (starker) Typ, und $\bar{g} \models p \mid B$. Dann ist $\bar{g}$ eine $\mathcal{L}_{\mathrm{mult}}$-Basis der minimal präalgebraischen Erweiterung $\langle B \rangle \subseteq \langle B\bar{g} \rangle$, und es gilt $\mathrm{tr}(\bar{g}/B) = k = \frac{1}{2}n$ und $\delta(\bar{g}/[\bar{g} \cdot T], B) < 0$ für jeden von T_0 und T_1 verschiedenen Torus T. Nach Definition 3.3 ist die Eigenschaft, minimal präalgebraisch zu sein, invariant unter 'affinen Transformationen' (die entsprechen $\mathcal{L}_{\mathrm{mult}}$-Basiswechseln). Das gilt für starke Typen wie für Formeln von Morleygrad 1. Wir erklären nun, was genau das bedeutet. Bis auf Torsion ist die multiplikative Gruppe von $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, also operiert die Gruppe GL_n auf den starken Typen 'modulo Torsion'. Ein n-dimensionaler Torus $T \subseteq (\mathbb{C}^*)^n \times (\mathbb{C}^*)^n$, der surjektiv auf die ersten n sowie auf die letzen n Koordinaten projiziert, nennen wir *Korrespondenztorus.* Sind X_1, X_2 definierbare Teilmengen (vom Morleygrad 1) von $(\mathbb{C}^*)^n$, so daß $(X_1 \times X_2) \cap T$ generisch auf X_1 und auf X_2 projiziert, so sagen wir, daß T eine *Toruskorrespondenz* zwischen X_1 und X_2 induziert. Offenbar gilt dann folgendes:

Lemma 4.5. *Sei $\varphi(\bar{x})$ minimal präalgebraisch:*

- *Gibt es eine Toruskorrespondenz zwischen $\varphi(\bar{x})$ und einer Formel $\psi(\bar{x})$ von Morleygrad 1, so ist auch $\psi(\bar{x})$ minimal prälgebraisch.*
- *Sei $\bar{m} \in (\mathbb{C}^*)^n$. Dann ist $\varphi(\bar{x} \cdot \bar{m})$ minimal präalgebraisch.*

Definition 4.6. Sei $X \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$ definierbar von Morleygrad 1. Eine Formel $\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ und ein Korrespondenztorus T *kodieren* $X = X(\bar{x})$, wenn es ein $\bar{b}$ gibt, so daß T eine Toruskorrespondenz zwischen $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ und $X(\bar{x})$ induziert, wobei $\mathrm{dM}(\varphi(\bar{x}, \bar{b})) = 1$; φ *kodiert* X, falls die Korrespondenz die Identität ist (d.h. $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \sim X$).

Definition 4.7. Ein *Kode* α ist eine $\emptyset$-definierbare Formel $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{z})$ sowie ganze Zahlen n_α, k_α mit folgenden Eigenschaften:

(a) Die Länge von $\bar{x}$ ist $n_\alpha = 2k_\alpha$.

(b) $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ ist eine Teilmenge von $(\mathbb{C}^*)^{n_\alpha}$.

(c) $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ ist entweder leer oder hat Morleyrang k_α und Morleygrad 1.

(d) Ist $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \neq \emptyset$, so ist $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ minimal prälgebraisch und besitzt einen irreduziblen Zariski-Abschluß $V_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$.

(e) Sei $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \neq \emptyset$; dann gilt $\delta(\bar{a}/B) \leqslant 0$ für alle $\bar{b} \in B$ und $\bar{a} \models \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$, wobei $\delta(\bar{a}/B) = 0$ genau dann, wenn $\bar{a} \in \langle B \rangle$ oder $\bar{a}$ in $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ über B generisch ist.

(f) Jedes multiplikative Translat $\varphi_\alpha(\bar{x} \cdot \bar{m}, \bar{b})$ für $\bar{m} \in (\mathbb{C}^*)^{n_\alpha}$ von $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ wird ebenfalls von $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{z})$ kodiert.

(g) Falls $\emptyset \neq \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \sim \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$, so ist $\bar{b} = \bar{b}'$.

Aus (g) folgt, daß $\bar{b}$ der kanonische Parameter des von $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ bestimmten minimal präalgebraischen Typs ist.

Lemma 4.8. *Jede minimal präalgebraische Menge X läßt sich von einem Kode α kodieren.*

Beweis. Sei $V_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ die von X bestimmte irreduzible Varietät. Dann ist $V_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ Kodevarietät; wegen Lemma 4.3 gibt es eine Formel $\theta(\bar{z})$, so daß $V_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$—und somit auch jedes multiplikative Translat von $V_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$—eine Kodevarietät ist für alle $\bar{b}' \models \theta$. Sei nun $\varphi_1(\bar{x}, \bar{z}) \subseteq V_\alpha(\bar{x}, \bar{z})$ wie in Lemma 4.4. Dann genügt auch für jedes multiplikative Translat $V_\alpha(\bar{x} \cdot \bar{m}, \bar{z})$ das zugehörige Translat $\varphi_1(\bar{x} \cdot \bar{m}, \bar{z}) \subseteq V_\alpha(\bar{x} \cdot \bar{m}, \bar{z})$ der Aussage von Lemma 4.4. Wir setzen

$$\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{z}\bar{z}') := V(\bar{x} \cdot \bar{z}', \bar{z}) \wedge \varphi_1(\bar{x} \cdot \bar{z}', \bar{z}) \wedge \theta(\bar{z}).$$

Dann kodiert φ_α die Menge X und erfüllt Eigenschaften (a)–(f). Wegen Definierbarkeit der Äquivalenz $\sim$ und Imaginärenelimination kann man annehmen, daß sie auch (g) erfüllt. $\square$

Wir setzen $\theta_\alpha(\bar{z}) := \exists \bar{x} \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{z})$.

Lemma 4.9. *Seien α und β Kodes wie in 4.7. Dann existiert eine endliche Menge von Korrespondenztori $G(\alpha, \beta)$ in $(\mathbb{C}^*)^{2n_\alpha}$, so daß gilt: Ist $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \neq \emptyset$ und induziert T eine Toruskorrespondenz zwischen $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ und $\varphi_\beta(\bar{x}, \bar{b}')$, so ist $T \in G(\alpha, \beta)$.*

Beweis. Falls es keine Toruskorrespondenz zwischen Instanzen von α und β gibt, so setze $G(\alpha, \beta) := \emptyset$. Sonst seien T, $\bar{b}$ und $\bar{b}'$ wie oben beschrieben. Sei V_α die zu α gehörige Familie von Kodevarietäten, und V_β die entsprechende Familie für β. Zudem sei $\mathcal{T}(V_\alpha \times V_\beta) = \{T_0, \ldots, T_\nu\}$. Sei $B := \operatorname{acl}(\bar{b}\bar{b}')$; wir betrachten eine B-generische Lösung $(\bar{a}, \bar{a}')$ von $(V_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \times V_\beta(\bar{x}', \bar{b}')) \cap T$.

Ist $W \subseteq (V_\alpha \times V_\beta) \cap T$ der Locus von $(\bar{a}, \bar{a}')$ über B, dann ist T der minimale Torus von W, und $\dim(W) = \operatorname{cd}(W) = k_\alpha$.

Es genügt nun zu zeigen, daß $W \subseteq (V_\alpha \times V_\beta)$ cd-maximal ist, da dann notwendigerweise T aus $\mathcal{T}(V_\alpha \times V_\beta)$ stammt. Sei also W' Varietät mit $W \subsetneq W' \subseteq (V_\alpha \times V_\beta)$; wir können annehmen, daß auch W' über B definiert ist. Ist $(\bar{g}, \bar{g}')$ generisch in W' über B, dann ist $\operatorname{cd}(W') = \operatorname{ldim}(\bar{g}, \bar{g}'/B) - \operatorname{tr}(\bar{g}, \bar{g}'/B)$. Man hat also

$$\begin{aligned}\operatorname{cd}(W') &= [\operatorname{ldim}(\bar{g}/B) - \operatorname{tr}(\bar{g}/B)] + [\operatorname{ldim}(\bar{g}'/B\bar{g}) - \operatorname{tr}(\bar{g}'/B\bar{g})] \\ &= \operatorname{cd}(W) + \operatorname{ldim}(\bar{g}'/B\bar{g}) - \operatorname{tr}(\bar{g}'/B\bar{g}) > \operatorname{cd}(W) - \delta(\bar{g}'/B\bar{g}) \geqslant \operatorname{cd}(W).\end{aligned}$$

Die echte Ungleichung gilt, da $\operatorname{tr}(\bar{g}'/B\bar{g}) > 0$ ist aufgrund von $W \subsetneq W'$. Die letzte Ungleichung gilt, da $\bar{g}'$ über B in V_β generisch ist, insbesondere also $\varphi_\beta(\bar{x}, \bar{b}')$ realisiert. □

Satz 4.10. *Es existiert eine Menge $\mathcal{C}$ von Kodes mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Zu jeder minimal präalgebraischen definierbaren Menge X existiert ein Kode α aus $\mathcal{C}$ und ein Korrespondenztorus T, so daß X von α und T kodiert wird.*

(2) *Der Kode $\alpha \in \mathcal{C}$ aus (1) ist eindeutig bestimmt, und zu gegebenem X gibt es nur endlich viele Korrespondenztori T, so daß X von α und T kodiert wird (uniform in X).*

Beweis. Wir konstruieren die Klasse $\mathcal{C}$ induktiv als wachsende Vereinigung endlicher Mengen $\mathcal{C}_i$. Genau genommen kodieren wir minimal präalgebraische Teilmengen von $(\mathbb{C}^*)^n$ für alle n einzeln. Sei also $n \geqslant 2$ fest und $(X_i : i < \omega)$ eine Aufzählung aller minimalen präalgebraischen definierbaren Teilmengen von $(\mathbb{C}^*)^n$ bis auf Isomorphismus. Sei α_0 ein Kode für X_0 wie in Lemma 4.8; wir setzen $\mathcal{C}_0 = \{\alpha_0\}$.

Angenommen $\mathcal{C}_i$ ist schon definiert und kodiert alle X_j für alle $j \leqslant i$. Falls X_{i+1} durch ein Element in $\mathcal{C}_i$ und einen Korrespondenztorus T kodiert wird, so setzten wir $\mathcal{C}_{i+1} = \mathcal{C}_i$. Andernfalls gibt es einen Kode α_{i+1} und $\bar{b}_0$ wie in Lemma 4.8, die X_{i+1} kodieren. Definiere:

$$\rho(\bar{z}) := \forall \bar{y} \Big(\bigwedge_{k=0}^{i} \bigwedge_{T \in G(\alpha_k, \alpha_{i+1})} \neg \chi^T_{\alpha_k, \alpha_{i+1}}(\bar{y}, \bar{z}) \Big),$$

wobei $\chi^T_{\alpha,\beta}(\bar b, \bar b')$ ausdrücke, daß T eine Toruskorrespondenz zwischen $\varphi_\alpha(\bar x, \bar b)$ und $\varphi_\beta(\bar x, \bar b')$ induziert (das ist definierbar).

Die Formel $\varphi_{\hat\alpha}(\bar x, \bar z) := \varphi_{\alpha_{i+1}}(\bar x, \bar z) \wedge \rho(\bar z)$ erfüllt Eigenschaften (a)–(g) von Definition 4.7; wir überprüfen Eigenschaft (f). Sei $\bar m$ in $(\mathbb{C}^*)^n$. Angenommen $\varphi_{\hat\alpha}(\bar x \cdot \bar m, \bar b)$ läßt sich nicht von $\varphi_{\hat\alpha}$ kodieren. Das bedeutet, daß es $k \leqslant i$ und ein $T \in G(\alpha_k, \alpha_{i+1})$ gibt, so daß T eine Toruskorrespondenz zwischen $\varphi_{\alpha_k}(\bar x, \bar b_1)$ und $\varphi_{\alpha_{i+1}}(\bar x \cdot \bar m, \bar b)$ induziert. Sei $\bar m_1 \in (\mathbb{C}^*)^{n_\alpha}$ mit $(\bar m_1, \bar m) \in T$. Dann induziert T eine Toruskorrespondenz zwischen $\varphi_{\alpha_k}(\bar x \cdot \bar m_1^{-1}, \bar b_1)$ und $\varphi_{\alpha_{i+1}}(\bar x, \bar b)$. Nach Kodeeigenschaft (f) wird aber $\varphi_{\alpha_k}(\bar x \cdot \bar m_1^{-1}, \bar b_1)$ ebenfalls von φ_{α_k} kodiert, und wir erhalten einen Widerspruch. Daher können wir $\mathcal{C}_{i+1} = \mathcal{C}_i \cup \{\hat\alpha\}$ setzen.

Ist X eine beliebige minimal präalgebraische definierbare Menge, so ist X isomorph zu X_i für ein $i < \omega$. Aus der Konstruktion von $\mathcal{C}$ folgt leicht, daß es einen eindeutigen Kode $\alpha \in \mathcal{C}$ und endlich viele Korrespondenztori gibt, die X_i und somit auch X kodieren (letzteres folgt aus der Endlichkeit von $G(\alpha, \alpha)$, siehe Lemma 4.9). □

Definition 4.11. Die Elemente von $\mathcal{C}$ nennen wir *gute Kodes.*

5. Differenzenfolgen

Wir verwenden folgendes Lemma, das (in allgemeinerer Form) von Ziegler in der unveröffentlichten Arbeit [**19**] bewiesen wurde.

Lemma 5.1. *Sei A algebraisch abgeschlossen. Falls $\bar a$, $\bar b$ und $\bar a \cdot \bar b$ paarweise unabhängig über A sind, ist* $\mathrm{tp}(\bar a/A)$ *generisch in einer A-definierbaren Nebenklasse eines Torus.*

Dies ist wichtig, da eine Kodevarietät keine Torusnebenklasse sein kann, wie schon Mustafin bemerkt hat [**13**, Proposition 3.1].

Lemma 5.2. *Sei V eine Kodevarietät. Dann ist der multiplikative Stabilizator von V endlich. Insbesondere ist V keine Nebenklasse eines Torus.*

Beweis. Sei $V = V_{\bar b} = V(\bar x, \bar b)$ und $T = \mathrm{stab}(V)^0$, ein Torus nach Anmerkung 2.1. Wir wählen $\bar g$ generisch in V und $\bar a$ generisch in T über $\bar b \bar g$. Insbesondere gilt $\bar a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar b} \bar g$, und nach Definition des Stabilizators ist auch $\bar a \cdot \bar g$ generisch in V über $\bar b$. Dann ist $\delta(\bar a/\bar g, \bar b) = \delta(\bar a/\bar b) = \dim(T)$. Andererseits ist $\delta(\bar a \cdot \bar g/\bar g, \bar b) \leqslant 0$, da V eine Kodevarietät ist. Da $\bar a \cdot \bar g$ und $\bar a$ über $\bar g \bar b$ multiplikativ interdefinierbar sind, folgt $\dim(T) = 0$. □

Definition 5.3. Sei $(\bar e_0, \ldots, \bar e_\lambda)$ eine Folge der Länge $\lambda + 1$. Die *i-te Ableitung* ∂_i bildet $(\bar e_0, \ldots, \bar e_\lambda)$ auf $(\bar e_0 \cdot \bar e_i^{-1}, \ldots, \bar e_{i-1} \cdot \bar e_i^{-1}, \bar e_i^{-1}, \bar e_{i+1} \cdot \bar e_i^{-1}, \ldots, \bar e_\lambda \cdot \bar e_i^{-1})$ ab; eine Folge, die durch endlichmaliges Anwenden von Operatoren ∂_i für $i \leqslant \lambda$ entsteht, heißt *abgeleitete Folge.* Ist $\nu < \lambda$ und benutzt die Ableitung nur Operationen ∂_i für $i \leqslant \nu$, so spricht man von einer *ν-abgeleiteten Folge.*

Bemerkung 5.4. Für jedes λ gibt es nur endlich viele verschiedene Ableitungen (genauer gibt es $(\lambda + 2)!$ viele). Zudem sind die Ableitungen unter Permutationen abgeschlossen, da die Transposition (ij) gleich $\partial_j \circ \partial_i \circ \partial_j$ ist, wie man leicht durch Nachrechnen erhält.

Für jeden Kode $\alpha \in \mathcal{C}$ sei $m_\alpha < \omega$, so daß für alle $\bar{b} \models \theta_\alpha$ gilt: $\bar{b}$ ist definierbar über einer (also jeder) Morley-Folge in $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ der Länge m_α.

Satz 5.5. *Für jedes α in $\mathcal{C}$ und $\lambda \geqslant m_\alpha$ gibt es eine Formel $\psi_\alpha(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_\lambda)$ (deren Realisierungen Differenzenfolgen gennant werden) mit folgenden Eigenschaften:*

(h) *Aus $\models \psi_\alpha(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$ folgt $\bar{e}_i \neq \bar{e}_j$ für $i \neq j$.*

(i) *Für jedes $\bar{b} \models \theta_\alpha$ und jede Morleyfolge $\{\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda, \bar{f}\}$ von $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ gilt*

$$\models \psi_\alpha(\bar{e}_0 \cdot \bar{f}^{-1}, \dots, \bar{e}_\lambda \cdot \bar{f}^{-1}).$$

(j) *Gegeben eine Realisierung $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$ von ψ_α gibt es ein eindeutig bestimmtes $\bar{b}$ mit $\models \varphi_\alpha(\bar{e}_i, \bar{b})$ für $i = 0, \dots, \lambda$. Ferner ist $\bar{b}$ im definierbaren Abschluß jedes Segments der Länge m_α der $\bar{e}_i$. Wir nennen $\bar{b}$ den kanonischen Parameter der Differenzenfolge $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda$.*

(k) *Falls $\models \psi_\alpha(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$, dann gilt für jedes $m_\alpha \leqslant \lambda' < \lambda$ auch $\models \psi_\alpha(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\lambda'})$.*

(l) *Sei $i \neq j$. Gegeben eine Realisierung $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$ von ψ_α mit kanonischem Parameter $\bar{b}$ wie in (j), T in $G(\alpha, \alpha)$ und $\bar{e}'_j$ mit $(\bar{e}_j, \bar{e}'_j) \in T$, so ist $\bar{e}_i \not\perp_{\bar{b}} \bar{e}'_j \cdot \bar{e}_i^{-1}$ für eine generische Realisierung $\bar{e}_i$ von $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$.*

(m) *Falls $\models \psi_\alpha(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$, dann gilt $\models \psi_\alpha(\partial_i(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda))$ für $i \in \{0, \dots, \lambda\}$.*

Beweis. Wir konstruieren $\psi_\alpha(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_\lambda)$ rekursiv in λ.

Betrachte die folgende typ definierbare Eigenschaft $\Sigma(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$:

Es gibt ein $\bar{b}'$ und eine Morleyfolge $\bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_\lambda, \bar{f}$ von $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$ mit $\bar{e}_i = \bar{e}'_i \cdot \bar{f}^{-1}$.

Offensichtlich erfüllt Σ Eigenschaften (h)–(k) und (m). Man beachte, daß $(\bar{e}_i : i \leqslant \lambda)$ über $\bar{b}'\bar{f}$ eine Morleyfolge ist; insbesondere liegt ihr kanonischer Parameter $\bar{b}$ in $\mathrm{acl}(\bar{b}'\bar{f})$. Sei $T \in G(\alpha, \alpha)$ und $(\bar{e}_j, \bar{e}^*_j) \in T$. Dann ist $\bar{e}^*_j \in \mathrm{acl}(\bar{e}_j)$ und somit $\bar{e}^*_j \perp_{\bar{b}} \bar{e}_i$ für $i \neq j$. Wäre nun $\bar{e}_i \perp_{\bar{b}} \bar{e}^*_j \cdot \bar{e}_i^{-1}$, so wären $\bar{e}_i^{-1}$, $\bar{e}^*_j$ und $\bar{e}^*_j \cdot \bar{e}_i^{-1}$ paarweise unabhängig über $\bar{b}$, denn wegen

$$\mathrm{MR}(\bar{e}^*_j/\bar{b}, \bar{e}^*_j \cdot \bar{e}_i^{-1}) = \mathrm{MR}(\bar{e}_i/\bar{b}, \bar{e}^*_j \cdot \bar{e}_i^{-1}) = \mathrm{MR}(\bar{e}_i/\bar{b}) = \mathrm{MR}(\bar{e}_j/\bar{b}) = \mathrm{MR}(\bar{e}^*_j/\bar{b})$$

hätte man dann auch $\bar{e}^*_j \perp_{\bar{b}} \bar{e}^*_j \cdot \bar{e}_i^{-1}$. Nach Lemma 5.1 wäre $\mathrm{tp}(\bar{e}_i^{-1}/\bar{b})$ generisch in einer Torusnebenklasse. Das gälte dann auch für $\mathrm{tp}(\bar{e}_i/\bar{b})$; da $\bar{e}_i$ generisch in $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ ist, widerspräche das Lemma 5.2. Somit gilt auch Eigenschaft (l).

Wegen Kompaktheit gibt es einen endlichen Teil ψ_0 von Σ, der (h)–(l) impliziert; wir wählen

$$\psi_\alpha(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_\lambda) := \bigwedge_{\partial \text{ Ableitung}} \psi_0(\partial(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_\lambda)).$$

□

6. Grüne Farbe

Wir betrachten von nun an eine Spracherweiterung $\mathcal{L}^* := \mathcal{L}_{\text{Morley}} \cup \{\ddot{\text{U}}\}$, wobei Ü ein neues einstelliges Prädikat ist, das uns die *grüne Färbung* gibt. Wir betrachten $\mathcal{L}^*$-Strukturen $(A, \ddot{\text{U}}(A))$, wobei A aus $\mathcal{D}$ ist (d.h. $A = \langle A \rangle \subseteq \mathbb{C}$) und $\ddot{\text{U}}(A)$ eine divisible torsionsfreie Untergruppe von $A \setminus \{0\}$, also ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist. Schreiben wir $B \subseteq A$ für solche $\mathcal{L}^*$-Strukturen B und A, so gelte zudem $\ddot{\text{U}}(A) \cap B = \ddot{\text{U}}(B)$.

Wir ändern nun leicht die Definition der Funktion δ. Sei A eine $\mathcal{L}^*$-Struktur wie eben beschrieben, endlich erzeugt im Sinne von $\langle \cdot \rangle$. Man setzt dann $\delta(A) := 2\,\mathrm{tr}(A) - \mathrm{ldim}(\ddot{\text{U}}(A))$. Ist $B \subseteq A$, und ist A endlich erzeugt über B, oder allgemeiner $\mathrm{tr}(A/B)$ sowie $\mathrm{ldim}(\ddot{\text{U}}(A)/\ddot{\text{U}}(B))$ endlich, so setzt man

$$\delta(A/B) := 2\,\mathrm{tr}(A/B) - \mathrm{ldim}(\ddot{\text{U}}(A)/\ddot{\text{U}}(B)).$$

Das ist äquivalent zum Vorgehen von Poizat in [**15**, § 3]. Sprechen wir im folgenden von *Basen*, *erzeugen*, *linear (un-)abhängig* und ähnlichen Begriffen aus der linearen Algebra, so denken wir stets an die zugrundeliegende $\mathcal{L}_{\text{mult}}$-Struktur. Begriffe wie *generisch*, *Morleyfolge*, *unabhängig*, *transzendent* sowie *algebraisch* beziehen sich hingegen auf die Theorie ACF_0, wenn sie nicht anders spezifiziert werden. Unter $\mathrm{acl}(M)$ verstehen wir also den körpertheoretischen algebraischen Abschluß von M.

Bemerkung 6.1. Sei $B \subseteq A$ wie eben. Besitzt A eine grüne Basis über B (d.h. $A = \langle \ddot{\text{U}}(A)B \rangle$), so stimmt obige Definition von $\delta(A/B)$ mit der in Abschnitt 3 gegebenen überein. Insbesondere gilt für grüne Realisierungen $\bar{a}$ einer Kodeinstanz $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ also Kodeeigenschaft (e) aus Definition 4.7.

Sei $B \subseteq A$. Wie üblich sagt man, daß B *selbstgenügsam* (oder *stark*) in A ist, falls $\delta(A'/B) \geqslant 0$ für alle über B endlich erzeugten $A' = \langle A' \rangle$ ist. Man schreibt hierfür $B \leqslant A$. Ist $\bar{b} \in B$ mit $B = \langle \bar{b} \rangle$, so schreiben wir auch $\bar{b} \leqslant A$, falls $B \leqslant A$ gilt. In gleicher Weise setzen wir $\delta(\bar{a}/\bar{b}) := \delta(\langle \bar{a}\bar{b} \rangle / \langle \bar{b} \rangle)$.

Lemma 6.2. *Alle Strukturen seien in einer gemeinsamen $\mathcal{L}^*$-Struktur M enthalten.*

(1) *Für $B \subseteq C \subseteq A$ gilt $\delta(A/B) = \delta(C/B) + \delta(A/C)$.*

(2) *$\delta(\langle AB \rangle / B) \leqslant \delta(A/A \cap B)$ (Submodularität).*

(3) *Ist $C \leqslant M$ und $C' \leqslant M$, so ist auch $C \cap C' \leqslant M$.*

(4) *Für jedes $A \subseteq M$ existiert ein eindeutiges $A \subseteq C = \langle C \rangle \subseteq M$, das minimal ist mit der Eigenschaft $C \leqslant M$. Man nennt C den selbstgenügsamen Abschluß von A (in M) und schreibt hierfür $\mathrm{cl}_M(A)$.*

(5) *Sei $(A_i)_{i<\alpha}$ eine aufsteigende Folge mit $A_i \leqslant K$ für alle $i < \alpha$. Dann gilt auch $\bigcup_i A_i \leqslant M$.*

Wir interessieren uns für die Klasse $\mathcal{K} := \{M \mid \emptyset \leqslant M\}$. Im Unterschied zu [**15**] betrachten wir also nicht nur $\mathcal{L}^*$-Strukturen, deren $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$-Redukte algebraisch abgeschlossene Körper sind, sondern zunächst lediglich Expansionen von Strukturen aus $\mathcal{D}$ mit erblich nichtnegativer Prädimension δ.

Konvention 6.3. Von nun an sei δ stets die mit Hilfe der grünen Punkte definierte Prädimension. Sprechen wir im folgenden von Realisierungen $\bar{a}$ eines Kodes oder von Differenzenfolgen $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$, so gehen wir stillschweigend davon aus, daß die Tupel $\bar{a}$ respektive $\bar{e}_i$ *nur aus grünen Elementen* bestehen.Weiterhin nennen wir eine Erweiterung $M \leqslant N$ in $\mathcal{K}$ *minimal präalgebraisch*, wenn N/M minimal präalgebraisch als Erweiterung von Strukturen in $\mathcal{D}$ ist, und zusätzlich N eine grüne Basis über M besitzt.

Sei $B \leqslant A$ eine starke Erweiterung in $\mathcal{K}$, mit $\operatorname{ldim}(A/B) < \infty$. Wie üblich kann man dann eine Zerlegung von $B \leqslant A$ in einen Turm $B = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_{n-1} \leqslant A_n = A$ finden, so daß A_{i+1}/A_i eine minimal starke Erweiterung ist für alle $i < n$. Dabei heiße eine starke Erweiterung $M \leqslant N$ in $\mathcal{K}$ (mit $M \subsetneq N$) *minimal (stark)*, wenn es kein $M' = \langle M' \rangle$ gibt mit $M < M' < N$. Ohne Mühe erhalten wir folgendes:

Lemma 6.4. *Sei $B \leqslant A$ minimale Erweiterung in $\mathcal{K}$. Dann gibt es folgende Fälle:*

(1) *(Algebraisch): $\ddot{\mathrm{U}}(A) = \ddot{\mathrm{U}}(B)$ und $A = \langle Ba \rangle$ für ein $a \in \operatorname{acl}(B) \setminus B$. Es ist dann $\delta(A/B) = 0$.*

(2) *(Weiß generisch): $\ddot{\mathrm{U}}(A) = \ddot{\mathrm{U}}(B)$ und $A = \langle Ba \rangle$ für ein über B transzendentes a. Dann ist $\delta(A/B) = 2$.*

(3) *(Grün generisch): A besitzt eine aus einem Element a bestehende grüne Basis über B, wobei a transzendent ist über B. Dann ist $\delta(A/B) = 1$.*

(4) *(Minimal präalgebraisch): $B \leqslant A$ ist minimal präalgebraisch im Sinne von Konvention 6.3, d.h. A besitzt eine grüne Basis $\bar{a}$ über B, so daß der (starke) Typ von $\bar{a}$ über B minimal präalgebraisch ist. Dann ist $\delta(A/B) = 0$.*

Die Klasse $\mathcal{K}$ läßt sich axiomatisieren, was sich leicht aus dem folgenden in [**15**] gezeigten Resultat ergibt.

Satz 6.5. *Sei $(M, \ddot{\mathrm{U}}(M))$ eine $\mathcal{L}^*$-Expansion eines algebraisch abgeschlossenen Körpers der Charakteristik* 0. *Dann ist $M \in \mathcal{K}$ genau dann, wenn folgende (definierbare) Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *$\ddot{\mathrm{U}}(M)$ ist eine divisible torsionsfreie Untergruppe der multiplikativen Gruppe von M.*

(2) *$\ddot{\mathrm{U}}(M)$ enthält keinen algebraischen Punkt außer* 1.

(3) *Ist $V(\bar{x}) \subseteq (\mathbb{C}^*)^{2n+1}$ eine $\emptyset$-definierte n-dimensionale Varietät, $\mathcal{T}(V) = \{T_0, \dots, T_r\}$ wie in Satz 2.2 und ist $\bar{a} \in V \cap \ddot{\mathrm{U}}(M)$, so gilt $\bar{a} \in T_i$ für ein $i > 0$.*

Genau genommen folgt (2) aus (1) und (3), was aber für unsere Belange unwesentlich ist.

Die Kategorie $\mathcal{K}$ zusammen mit den starken Abbildungen besitzt die Amalgamierungseigenschaft (AP), ist zusammenhängend (hat JEP), und enthält bis auf Isomorphie nur abzählbar viele endlich erzeugte Strukturen. Man kann also den Fraïssé–Hrushovski–Limes M_ω der endlich erzeugten Strukturen aus $(\mathcal{K}, \leqslant)$ konstruieren. Man nennt M_ω

auch das *generische Modell*. Sei T_ω die $\mathcal{L}^*$-Theorie von M_ω. Eines der Hauptresultate in [**15**] lautet wie folgt.

Satz 6.6. *Das generische Modell M_ω ist ω-saturiert. Die Theorie T_ω ist ω-stabil von Morleyrang $\omega \cdot 2$, und Ü besitzt Morleyrang ω.*

Bemerkung 6.7. Ist $(V_{\bar{z}}(\bar{x}) : \bar{z} \models \theta)$ eine Familie von Kodevarietäten und $\varphi_1(\bar{x}, \bar{z})$ wie in Lemma 4.4, so definiert

$$\varphi_1(\bar{x}, \bar{b}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \ddot{\mathrm{U}}(x_i)$$

für alle $\bar{b} \models \theta$ eine streng minimale Menge in der Theorie T_ω.

7. Ein grünes kombinatorisches Lemma

Definition 7.1. Seien B, A und M aus $\mathcal{K}$, mit $B \leqslant A$ und $B \leqslant M$. Eine $\mathcal{L}^*$-Struktur M' aus $\mathcal{K}$ ist ein *Amalgam* von A und M über B, wenn A und M über B stark in M' eingebettet sind und $M' = \langle M, A \rangle$ ist (wir identifizieren A und M mit den Bildern unter der jeweiligen Einbettung). Sind zudem M und A algebraisch unabhängig über B mit $M \cap A = B$, so nennen wir M' ein *freies Amalgam*.

Wie in Poizats Arbeit [**15**] erhalten wir folgendes.

Lemma 7.2. *Seien M, A und B aus $\mathcal{K}$ mit $B \leqslant A$ und $B \leqslant M$. Dann existiert in $\mathcal{K}$ ein Amalgam M' von A und M über B, so daß A und M über B algebraisch unabhängig sind. Ist insbesondere B relativ algebraisch abgeschlossen in A oder in M, so kann das Amalgam frei gewählt werden.*

Der nachstehende Beweis erklärt wie man—uniform in den Parametern—eine untere Schranke für die Länge einer beliebigen Differenzenfolge finden kann, so daß sie eine Morleyteilfolge über eine starke Teilmenge enthält.

Lemma 7.3. *Für jeden Kode α und alle natürlichen Zahlen n existiert eine Zahl $\lambda_\alpha(n) = \lambda \geqslant 0$, so daß für jede starke Erweiterung $M \leqslant N$ in $\mathcal{K}$ und jede Differenzenfolge $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_\mu)$ für α in N mit kanonischem Parameter $\bar{b}$ und $\mu \geqslant \lambda$ gilt: Entweder liegt der kanonische Parameter einer λ-abgeleiteten Folge von $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_\mu)$ in $\mathrm{acl}(M)$, oder die Folge $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_\mu)$ enthält eine Morley-Teilfolge für $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ über M der Länge n.*

Beweis. Sei $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_\mu)$ wie oben gegeben und der erste Fall trete nicht ein. Wir definieren

$$\begin{aligned} X_1 &= \{i \in [m_\alpha, \mu] : \bar{e}_i \text{ ist generisch über } M \cup \{\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{i-1}\}\}, \\ X_2 &= \{i \in [m_\alpha, \mu] : \bar{e}_i \subseteq \langle M \cup \{\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{i-1}\}\rangle\}, \\ X_3 &= [m_\alpha, \mu] \setminus (X_1 \cup X_2). \end{aligned}$$

Nach einer Permutation der Indizes können wir $X_1 < X_3 < X_2$ annehmen; dies kann allenfalls dazu führen, daß Indizes aus X_2 nach $X_3 \cup X_1$ und Indizes aus X_3 nach X_1

wechseln. Da $\bar{b} \in \operatorname{dcl}(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{m_\alpha - 1})$ ist, gilt nach Kodeeigenschaft (e)

$$\delta(\bar{e}_i/M, \bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{i-1}) \leqslant -1 \quad \text{für } i \in X_3$$

und

$$\delta(\bar{e}_i/M, \bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{i-1}) = 0 \qquad \text{für } i \in X_1 \cup X_2.$$

Da $M \leqslant N$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \delta(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_\mu/M) \\ &\leqslant \delta(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{m_\alpha-1}/M) + \sum_{i=m_\alpha}^{\mu} \delta(\bar{e}_i/M, \bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{i-1}) \\ &\leqslant m_\alpha n_\alpha + (-1)|X_3|, \end{aligned}$$

und somit $|X_3| \leqslant m_\alpha n_\alpha$.

Sei $r = m_\alpha + |X_1| + |X_3|$, $s = r(n_\alpha + 1)$ und $I \subseteq \{r, \ldots, \mu\}$ mit $|I| = rn_\alpha + 1$; zur Vereinfachung der Notation nehmen wir zuerst an, daß $I = \{r, \ldots, s\}$ ist. Seien $W_0 \subset V_0, \ldots, W_h \subset V_h$ Varietäten (wobei wir die V_i irreduzibel wählen), so daß $\psi_\alpha(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_s)$ gleich $\bigcup_{i \leqslant h}(V_i \setminus W_i)$ ist, und es sei $\{T_0, \ldots, T_\ell\} = \bigcup_{i \leqslant h} \mathcal{T}(V_i)$. Dann gibt es ein $i_0 \leqslant h$ mit $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_s) \in V_{i_0} \setminus W_{i_0}$; sei W der Locus dieses Tupels über $\operatorname{acl}(M)$. Sei W' mit $W \subseteq W' \subseteq V_{i_0}$ maximal, so daß $\operatorname{cd}(W') \leqslant \operatorname{cd}(W)$ ist. Dann ist W' cd-maximal, und es gibt $j \in \{0, \ldots \ell\}$, so daß T_j minimaler Torus für W' ist. Sei $\bar{m}$ mit $W' \subseteq \bar{m} \cdot T_j \cap V_{i_0}$; da $W \subseteq \bar{m} \cdot T_j$ ist, können wir $\bar{m} \in \operatorname{acl}(M)$ wählen, und ohne Einschränkung ist W' ebenfalls über $\operatorname{acl}(M)$ definiert. Ist $(\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_s)$ generischer Punkt von W' über $\operatorname{acl}(M)$, der grün gefärbt wird, so liegt er in $V_{i_0} \setminus W_{i_0}$, da $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_s)$ Spezialisierung von $(\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_s)$ ist und $V_{i_0} \setminus W_{i_0}$ offen in seinem Zariski-Abschluß ist. Mithin gilt $\psi_\alpha(\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_s)$. Aber

$$\begin{aligned} r \cdot n_\alpha &\geqslant \operatorname{ldim}(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{r-1}/M) = \operatorname{ldim}(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_s/M) \geqslant \operatorname{cd}(W) \geqslant \operatorname{cd}(W') \\ &= \sum_{i \leqslant s} (\operatorname{ldim}(\bar{a}_i/\operatorname{acl}(M), \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1}) - \operatorname{tr}(\bar{a}_i/\operatorname{acl}(M), \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1})) \\ &\geqslant \sum_{r \leqslant i \leqslant s} (\operatorname{ldim}(\bar{a}_i/\operatorname{acl}(M), \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1}) - \operatorname{tr}(\bar{a}_i/\operatorname{acl}(M), \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1})). \end{aligned}$$

Nach Kodeeigenschaft (e) gilt $\delta(\bar{a}_i/\operatorname{acl}(M), \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1}) \leqslant 0$ für $i \geqslant r \geqslant m_\alpha$, d.h.

$$2 \operatorname{tr}(\bar{a}_i/\operatorname{acl}(M), \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1}) \leqslant \operatorname{ldim}(\bar{a}_i/\operatorname{acl}(M), \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1}).$$

Für $\bar{a}_i \notin \langle \operatorname{acl}(M), \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1} \rangle$ ist demzufolge

$$\operatorname{ldim}(\bar{a}_i/\operatorname{acl}(M), \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1}) - \operatorname{tr}(\bar{a}_i/\operatorname{acl}(M), \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1}) \geqslant 1.$$

Folglich gibt es ein $t \in \{r, \ldots, s\}$ mit $\bar{a}_t \in \langle \operatorname{acl}(M), \bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{t-1} \rangle$, und das wird durch die Torusnebenklasse $\bar{m} \cdot T_j$ induziert. Damit induziert $\bar{m} \cdot T_j$ aber auch $\bar{e}_t \in \langle \operatorname{acl}(M), \bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{t-1} \rangle$.

Die möglichen Paare (t, j) definieren eine $(rn_\alpha + 1)(\ell + 1)$-Färbung der $(rn_\alpha + 1)$-Teilmengen I von $\{r, \dots, \mu\}$. Nach dem (endlichen) Satz von Ramsey gibt es eine Zahl μ_0, so daß für $\mu \geqslant \mu_0$ eine einfarbige Teilmenge $J \subseteq \{r, \dots, \mu\}$ mit $|J| \geqslant m_\alpha + rn_\alpha + 1$ existiert. Das heißt, es gibt ein $t \in \{r, \dots, s\}$ und ein $j \leqslant \ell$, so daß für alle $i_r < \dots < i_s$ aus J

$$\bar{e}_{i_t} \in \langle \mathrm{acl}(M), \bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{r-1}, \bar{e}_{i_r}, \bar{e}_{i_{r+1}}, \dots, \bar{e}_{i_{t-1}} \rangle,$$

und dies wird durch $\bar{m} \cdot T_j$ für ein $\bar{m}$ aus $\mathrm{acl}(M)$ induziert (man beachte, daß das Tupel $\bar{m} \in \mathrm{acl}(M)$ variiert). Sei γ_i das $(t+i)$-te Element aus J. Für $i > 0$ liegt dann $\bar{e}_{\gamma_i} \cdot \bar{e}_{\gamma_0}^{-1}$ in $\mathrm{acl}(M)$. Damit ist dann aber auch der kanonische Parameter der abgeleiteten Folge $\partial_{\gamma_0}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\mu)$ in

$$\mathrm{acl}(\bar{e}_{\gamma_1} \cdot \bar{e}_{\gamma_0}^{-1}, \dots, \bar{e}_{\gamma_{m_\alpha}} \cdot \bar{e}_{\gamma_0}^{-1}) \subseteq \mathrm{acl}(M),$$

im Widerspruch zur Annahme.

Somit erhalten wir eine obere Schranke für μ in Abhängigkeit von r, und damit eine untere Schranke für X_1 in Abhängigkeit von μ. □

8. Präalgebraisches Entkommen aus $\mathcal{K}^\mu$

Wir wählen nun Funktionen $\mu^*, \mu : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ mit endlichen Fasern, die folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} \mu^*(\alpha) &\geqslant n_\alpha k_\alpha + 1, \\ \mu^*(\alpha) &\geqslant \lambda_\alpha(m_\alpha + 1), \\ \mu(\alpha) &\geqslant \lambda_\alpha(\mu^*(\alpha)). \end{aligned}$$

Definition 8.1. $\mathcal{K}^\mu$ sei die Teilklasse aller M aus $\mathcal{K}$, so daß in M für jeden guten Kode α jede (grüne) Differenzenfolge für α höchstens die Länge $\mu(\alpha)$ besitzt.

Relativ zu ACF_0 kann man $\mathcal{K}^\mu$ universell axiomatisieren. Alle Modelle der zu konstruierenden Theorie T^μ werden in $\mathcal{K}^\mu$ liegen. Damit werden präalgebraische grüne Erweiterungen von starken Teilmengen zu algebraischen Erweiterungen im Sinne von T^μ. Um die Vollständigkeit von T^μ zu sichern, wollen wir fordern, daß es für jeden guten Kode möglichst viele Realisierungen gibt. Diese Eigenschaft soll durch die Axiome von T^μ elementar beschrieben werden.

Lemma 8.2. *Sei $M \in \mathcal{K}^\mu$, und $M' \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^\mu$ minimal präalgebraische Erweiterung von M. Sei $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)})$ eine Differenzenfolge für einen guten Kode α in M', so daß der kanonische Parameter $\bar{b}$ in $\mathrm{acl}(M)$ liegt. Dann existiert ein i, so daß alle $\bar{e}_j$ mit $i \neq j$ in M liegen und $\bar{e}_i$ eine M-generische Realisierung von $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ ist mit $\langle M\bar{e}_i \rangle = M'$.*

Beweis. Wir können oBdA annehmen, daß $M = \mathrm{acl}(M)$ ist—falls nicht, so definieren wir eine $\mathcal{L}^*$-Struktur auf $\mathrm{acl}(M)$, indem wir $\ddot{\mathrm{U}}(\mathrm{acl}(M)) = \ddot{\mathrm{U}}(M)$ fordern. Wegen Minimalität der Erweiterung M'/M ist M in M' relativ algebraisch abgeschlossen, und wir können M' durch $\langle M' \,\mathrm{acl}(M) \rangle$ ersetzen. Da $M \leqslant M'$ ist, gilt aufgrund von Kodeeigenschaft (e) für jedes j, daß $\bar{e}_j$ in M liegt oder generische Realisierung von $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ über M ist.

Da M in $\mathcal{K}^\mu$ liegt, gibt es ein generisches $\bar{e}_i$; wegen Minimalität der Erweiterung gilt $M' = \langle M\bar{e}_i\rangle$. Wäre nun $\bar{e}_j$ mit $j \neq i$ eine zweite M-generische Lösung, so gäbe es wegen $M' = \langle M\bar{e}_i\rangle = \langle M\bar{e}_j\rangle$ ein Tupel $\bar{m}$ in M und einen Korrespondenztorus $T \in G(\alpha, \alpha)$ mit

$$(\bar{e}_i \cdot \bar{m}, \bar{e}_j) \in T.$$

Sei $\bar{e}'_j := \bar{e}_i \cdot \bar{m}$. Insbesondere ist also $\bar{e}'_j \cdot \bar{e}_i^{-1} \in M$. Da $\bar{e}_i$ generisch über M ist, folgt

$$\bar{e}_i \underset{\bar{b}}{\perp} \bar{e}'_j \cdot \bar{e}_i^{-1},$$

im Widerspruch zur Eigenschaft (l) der Differenzenfolgen. □

Folgerung 8.3. *Seien $M \in \mathcal{K}^\mu$, und $M' \in \mathcal{K}$ mit $M \leqslant M'$ eine minimale Erweiterung. Ist* $\mathrm{ldim}(M'/M) = 1$, *so liegt auch $M' \in \mathcal{K}^\mu$. Andernfalls ist M'/M minimal präalgebraisch, und M' liegt genau dann nicht in $\mathcal{K}^\mu$, wenn es einen guten Kode $\alpha \in \mathcal{C}$ und eine Differenzenfolge $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\alpha)})$ für α in M' gibt, so daß einer der beiden folgenden Fälle auftritt:*

(a) $\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1}$ *liegen in M, $\langle M, \bar{e}_{\mu(\alpha)}\rangle = M'$, und α ist der eindeutig bestimmte gute Kode, der die Erweiterung $M' \geqslant M$ beschreibt.*

(b) *Eine Teilfolge der Länge $\mu^*(\alpha)$ ist eine Morleyfolge für $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ über $M\bar{b}$, wobei $\bar{b}$ der kanonische Parameter der Folge ist.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $\mathrm{ldim}(M'/M) = 1$. Falls $\ddot{\mathrm{U}}(M') = \ddot{\mathrm{U}}(M)$, so können in M' keine neuen grünen Differenzenfolgen existieren, und $M' \in \mathcal{K}^\mu$. Ansonsten ist $\mathrm{ldim}(\ddot{\mathrm{U}}(M')/M) = 1$ und $M' = \langle \ddot{\mathrm{U}}(M'), M\rangle$ (das ist der grün generische Fall). Wäre M' nicht in $\mathcal{K}^\mu$, so gäbe es einen guten Kode α und eine Differenzenfolge $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\alpha)})$ für α in M'. Die Alternativen aus Lemma 7.3 implizieren die Existenz eines über $M\bar{b}$ generischen Elements $\bar{e}$ der (eventuell abgeleiteten) Folge, wobei $\bar{b}$ ihr kanonischer Parameter ist. Das führt zum Widerspruch

$$1 = \mathrm{ldim}(M'/M) \geqslant \mathrm{ldim}(\bar{e}/M\bar{b}) \geqslant 2.$$

Sei nun M' über M minimal präalgebraisch. Sowohl aus (a) als auch aus (b) folgt, daß M' nicht in $\mathcal{K}^\mu$ ist. Ist umgekehrt M' nicht in $\mathcal{K}^\mu$, so existiert ein guter Kode α und eine Differenzenfolge $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\alpha)})$ für α in M'; sei $\bar{b}$ ihr kanonischer Parameter. Können wir die Differenzenfolge so wählen, daß $\bar{b}$ in $\mathrm{acl}(M)$ liegt, so befinden wir uns nach Lemma 8.2 im Fall (a). Sonst besitzen auch alle abgeleiteten Differenzenfolgen keinen kanonischen Parameter in $\mathrm{acl}(M)$, und wegen $\mu(\alpha) \geqslant \lambda_\alpha(\mu^*(\alpha))$ und Lemma 7.3 befinden wir uns im Fall (b).

Für die Eindeutigkeit des Kodes α betrachten wir einen zweiten guten Kode α' mit $M' = \langle M, \bar{e}_{\mu(\alpha')}\rangle$. Dann ist $n_\alpha = n_{\alpha'} = \mathrm{ldim}(M'/M)$, und der Locus von $(\bar{e}_{\mu(\alpha)}, \bar{e}_{\mu(\alpha')})$ über M bestimmt eine Nebenklasse eines Korrespondenztorus in $G(\alpha, \alpha')$. Da $\alpha \neq \alpha'$ beide gut sind, ist aber $G(\alpha, \alpha') = \emptyset$. □

Folgerung 8.4. *Für jeden guten Kode α existiert eine $\forall\exists$-Aussage χ_α, so daß eine Struktur M aus $\mathcal{K}^\mu$ genau dann χ_α erfüllt, wenn sie in $\mathcal{K}^\mu$ keine minimale präalgebraische Erweiterung besitzt, die durch α gegeben ist.*

Beweis. Sei $\alpha \in \mathcal{C}$, M in $\mathcal{K}^\mu$ und $\bar{b} \in M$, so daß eine generische Lösung $\bar{a}$ von $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ eine minimal präalgebraische Erweiterung $M[\bar{a}] := \langle M\bar{a}\rangle$ von M erzeugt. Falls $M[\bar{a}]$ nicht in $\mathcal{K}^\mu$ liegt, gilt (a) oder (b) aus Folgerung 8.3.

Bedingung (a) bedeutet, daß ein guter Kode α' eine Differenzenfolge $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\alpha')})$ in M' besitzt, deren erste $\mu(\alpha')$ Elemente (und insbesondere der kanonische Parameter) in M liegen, so daß $M[\bar{a}] = \langle M\bar{e}_{\mu(\alpha')}\rangle$ ist. Wegen der Eindeutigkeit des Kodes ist $\alpha = \alpha'$; da $M \leqslant M[\bar{a}]$ ist, muß $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$ generisch über M sein. Somit gehen $\bar{a}$ und $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$ durch $\mathbb{Q}$-Basiswechsel über M auseinander hervor. Das ist offenbar äquivalent zur Existenz eines grünen Tupels $\bar{m} \in M$ und von $T \in G(\alpha, \alpha)$, so daß T eine Toruskorrespondenz zwischen $\psi_\alpha(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1}, \bar{x})$ und $\varphi_\alpha(\bar{x} \cdot \bar{m}, \bar{b})$ induziert. Dies können wir wegen der Endlichkeit von $G(\alpha, \alpha)$ durch eine existenzielle Aussage mit Parametern $\bar{b}$ ausdrücken.

Bedingung (b) bedeutet, daß ein guter Kode β eine Differenzenfolge $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)})$ in $M[\bar{a}]$ mit $\mu^*(\beta)$ vielen M-linear unabhängigen Gliedern besitzt. Wegen

$$n_\beta \mu^*(\beta) \leqslant \operatorname{ldim}(M[\bar{a}]/M) = n_\alpha$$

kommen dafür nur endlich viele verschiedene β in Frage. Wir geben den Beweis zunächst unter folgender

Zusatzannahme. ψ_β ist von der Form $V_1 \setminus W_1$, wobei V_1 eine irreduzible Varietät ist und $W_1 \subsetneq V_1$ eine echte Untervarietät, beide über $\operatorname{acl}(\emptyset)$ definiert.

Sei $V_0 = V_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ die zu $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ gehörige Kodevarietät, also der Locus von $\bar{a}$ über $\operatorname{acl}(M)$. Sei $V = V_0 \times V_1$, und $\{T_0, \ldots, T_r\} = \mathcal{T}(V_\alpha(\bar{x}, \bar{z}) \times V_1)$. Ist $W \subseteq V$ der Locus von $(\bar{a}, \bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)})$ über $\operatorname{acl}(M)$, so sieht man leicht mit Lemma 3.2, daß $\operatorname{cd}(W) = \operatorname{cd}(V_0) = k_\alpha$ ist. Da W generisch auf V_0 projiziert, gilt $\operatorname{cd}(W') \geqslant \operatorname{cd}(W)$ für alle $W' \supseteq W$. Sei T der minimale Torus von W und $\bar{m} \in M$ mit $W \subseteq \bar{m} \cdot T$. Die Nebenklasse $\bar{m} \cdot T$ enthält das grüne Tupel $(\bar{a}, \bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)})$.

Eine Torusnebenklasse $\bar{c}\cdot T$, die ein grünes Tupel (in einer Oberstruktur in $\mathcal{K}$) enthalten kann, wollen wir *bunt* nennen. Ist T durch $\prod x_i^{\lambda_{ij}} = 1$ $(j = 1, \ldots, d)$ beschrieben, so überlegt man sich leicht, daß $\bar{c} \cdot T$ genau dann bunt ist, wenn $c'_j := \prod c_i^{\lambda_{ij}}$ grün ist für $j = 1, \ldots, d$. Ist $\bar{c} \cdot T$ bunt und $T \subseteq T'$, so ist offenbar auch $\bar{c} \cdot T'$ bunt.

Wir wählen nun W' maximal mit $\operatorname{cd}(W') = \operatorname{cd}(W)$ und $W \subseteq W' \subseteq V$, so daß W' über M definiert ist. Dann ist W' cd-maximal, der minimale Torus von W' also gleich einem der T_i, und es gilt $W' \subseteq \bar{m} \cdot T_i$. Da $\bar{m} \cdot T \subseteq \bar{m} \cdot T_i$ und $\bar{m} \cdot T$ bunt ist, ist $\bar{m} \cdot T_i$ ebenfalls bunt. Sei $(\bar{a}^*, \bar{e}^*_0, \ldots, \bar{e}^*_{\mu(\beta)})$ generisch in W' über M. Da $\operatorname{tp}(\bar{a}^*/M) = \operatorname{tp}(\bar{a}/M)$, dürfen wir oBdA annehmen, daß $\bar{a}^* = \bar{a}$. Aus $\operatorname{cd}(W') = \operatorname{cd}(W) = \operatorname{cd}(V_0)$ folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{ldim}(\bar{a}, \bar{e}^*_0, \ldots, \bar{e}^*_{\mu(\beta)}/\operatorname{acl}(M)) - \operatorname{tr}(\bar{a}, \bar{e}^*_0, \ldots, \bar{e}^*_{\mu(\beta)}/\operatorname{acl}(M))& \\ = \operatorname{ldim}(\bar{a}/\operatorname{acl}(M)) - \operatorname{tr}(\bar{a}/\operatorname{acl}(M))&\end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{ldim}(\bar{e}_0^*, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)}^*/M\bar{a}) = \mathrm{tr}(\bar{e}_0^*, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)}^*/M\bar{a}) =: \ell. \qquad (*)$$

Man wähle nun in $(\bar{e}_0^*, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)}^*)$ eine $\mathcal{L}_{\mathrm{mult}}$-Basis $f_0, \ldots, f_{\ell-1}$ über $M\bar{a}$. Wegen $(*)$ ist $(f_0, \ldots, f_{\ell-1})$ auch algebraisch unabhängig über $M\bar{a}$. Da $\bar{m}\cdot T_i$ bunt ist, erhalten wir eine Struktur N aus $\mathcal{K}$, wenn wir das Tupel $(\bar{a}^*, \bar{e}^*_{\leqslant\mu(\beta)})$ grün färben und unter $\langle\cdot\rangle$ abschließen. Es gilt

$$N = \langle M\bar{a}\bar{e}_0^*, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)}^*\rangle = \langle M[\bar{a}]f_0, \ldots, f_{\ell-1}\rangle,$$

wobei $f_0, \ldots, f_{\ell-1}$ ein unabhängiges Tupel grün generischer Elemente ist. Setzt man $F_i := \langle M\bar{a}f_0, \ldots, f_{i-1}\rangle$, so ist $F_i \leqslant F_{i+1}$ eine grün generische Erweiterung für $0 \leqslant i \leqslant \ell - 1$. Sukzessives Anwenden von Folgerung 8.3 liefert:

$$M[\bar{a}] \in \mathcal{K}^\mu \quad \text{genau dann wenn } N \in \mathcal{K}^\mu. \qquad (**)$$

Nun ist $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)})$ Spezialisierung von $(\bar{e}_0^*, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)}^*)$, und beide liegen in V_1. Da nach der Zusatzannahme ψ_β Zariski-offen in V_1 ist und $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)})$ die Formel ψ_β erfüllt, gilt auch $\models \psi_\beta(\bar{e}_0^*, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)}^*)$. Wir haben gezeigt, daß die Existenz einer grünen Differenzenfolge für β in $M[\bar{a}]$ der Länge $\mu(\beta)+1$ die Existenz einer ebensolchen Differenzenfolge in $N = M[\bar{a}][\bar{f}]$ impliziert, die auf eine von endlich vielen Arten entsteht. Umgekehrt reicht es wegen $(**)$, die Existenz von $(\bar{e}^*, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)}^*) \in N$ zu fordern, um zu garantieren, daß $M[\bar{a}] \notin \mathcal{K}^\mu$. Man fordert:

- Es existiert ein Tupel $\bar{m} \in M$ und eine irreduzible Komponente W' von $V \cap \bar{m} \cdot T_i$ (wobei $V = V_0 \times V_1$ und $V_0 = V_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ wie oben) mit folgenden Eigenschaften:
  (1) Die Nebenklasse $\bar{m} \cdot T_i$ ist bunt.
  (2) W' projiziert generisch auf V_0.
  (3) Es gilt $\mathrm{cd}(W') = \mathrm{cd}(V_0)$.
  (4) Für generisches $(\bar{a}^*, \bar{e}_0^*, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)}^*)$ in W' gilt $\models \psi_\beta(\bar{e}_0^*, \ldots, \bar{e}_{\mu(\beta)}^*)$.

Die Bedingungen (1)–(4) sind definierbar, man erhält also eine existentielle Aussage mit Parametern $\bar{b}$, genauer gesagt für jeden der endlich vielen Tori $T_i \in \mathcal{T}(V_\alpha(\bar{x}, \bar{z}) \times V_1)$ eine, deren Disjunktion die gewünschte Formel liefert.

Ist ψ_β endliche Vereinigung von lokal abgeschlossenen Mengen $V_i \setminus W_i$ (für $1 \leqslant i \leqslant t$), so führen wir obiges Argument für jedes der i einzeln durch; χ_α ist dann die Disjunktion der erhaltenen Aussagen. □

9. Das Fraïssé-Modell

In diesem Kapitel zeigen wir, daß $\mathcal{K}^\mu$ bezüglich starker Einbettungen die Amalgamierungseigenschaft besitzt. Damit erhalten wir *reiche* Körper im Sinne von Poizat [**14**]. Die Resultate im vorhergehenden Kapitel liefern nun folgende wichtige Schlußfolgerung.

Lemma 9.1. *Seien A, B und M Strukturen in $\mathcal{K}^\mu$, wobei B sowohl starke Unterstruktur von A als auch von M ist. Sei M' freies Amalgam von M und A über B, und $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\alpha)})$ eine Differenzenfolge in M' für einen guten Kode α. Dann gibt es eine abgeleitete Folge, deren kanonischer Parameter in* $\mathrm{acl}(M)$ *oder in* $\mathrm{acl}(A)$ *liegt.*

Beweis. Wir nehmen an, daß die Behauptung des Lemmas nicht wahr ist. Dann erhalten wir nach zweimaligem Anwenden von Lemma 7.3 unter Benutzung der Bedingungen an $\mu(\alpha)$ und $\mu^*(\alpha)$ eine Teilfolge der Länge $m_\alpha+1$, die sowohl Morleyfolge über M als auch über A ist. Wir bezeichnen sie oBdA mit $(\bar{e}_0, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{m_\alpha})$. Sei $E = \{\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{m_{\alpha-1}}\}$. Dann liegt der kanonische Parameter $\bar{b}$ der Folge in $\mathrm{dcl}(E)$, und

$$\bar{e}_{m_\alpha} \mathop{\downarrow}_{\bar{b}} ME \quad \text{und} \quad \bar{e}_{m_\alpha} \mathop{\downarrow}_{\bar{b}} AE.$$

Wir schreiben die Tupel in E als Produkte von grünen Tupeln in M und in A und definieren E_M als die Menge der Faktoren in M und E_A als die Menge der Faktoren in A. Sei $E' = E_M \cup E_A$. Dann gilt auch $\bar{b} \in \mathrm{dcl}(E')$ und da E und E' über M und über A interdefinierbar sind, gilt

$$\bar{e}_{m_\alpha} \mathop{\downarrow}_{\bar{b}} ME' \quad \text{und} \quad \bar{e}_{m_\alpha} \mathop{\downarrow}_{\bar{b}} AE',$$

also auch

$$\bar{e}_{m_\alpha} \mathop{\downarrow}_{BE'} M \quad \text{und} \quad \bar{e}_{m_\alpha} \mathop{\downarrow}_{BE'} A.$$

Sei $\bar{e}_{m_\alpha} = \bar{m} \cdot \bar{a}$ mit $\bar{m}$ aus M und $\bar{a}$ aus A. Da $M \downarrow_B A$ auch $M \downarrow_{BE'} A$ impliziert, ist $\{\bar{e}_{m_\alpha}, \bar{m}, \bar{a}\}$ über BE' paarweise unabhängig. Nach Lemma 5.1 ist dann $\mathrm{stp}(\bar{e}_{m_\alpha}/BE')$ generischer Typ einer Torusnebenklasse, im Widerspruch zu Lemma 5.2. □

Eine Einbettung von B in A ist stark, wenn das Bild von B in A starke Unterstruktur ist.

Satz 9.2. *$\mathcal{K}^\mu$ hat bezüglich starker Einbettungen die Amalgamierungseigenschaft.*

Beweis. Seien $B \leqslant M$ und $B \leqslant A$ Strukturen in $\mathcal{K}^\mu$. Wir suchen eine Erweiterung M' von M in $\mathcal{K}^\mu$ mit $M \leqslant M'$ und $B \leqslant A' \leqslant M'$, wobei A und A' isomorph über B sind. Wir können beide Erweiterungen $B \leqslant A$ und $B \leqslant M$ in Türme von minimalen Erweiterungen zerlegen und daher oBdA annehmen, daß A und M minimale Erweiterungen von B sind. Falls eine der Erweiterungen algebraisch ist, so adjungieren wir die entsprechenden Elemente im $\langle\cdot\rangle$-Abschluß; da es keine neuen grünen Punkte gibt, erhalten wir eine Struktur in $\mathcal{K}^\mu$ und die Behauptung ist gezeigt.

Andernfalls existiert nach Lemma 7.2 das freie Amalgam M' von M und A über B. Wenn $M' \in K^\mu$ ist, so sind wir fertig. Ansonsten zeigen wir, daß M zu A über B isomorph ist. Gemäß Folgerung 8.3 sind sowohl M als auch A über B minimal präalgebraisch. Nach Lemma 9.1 tritt nur der erste Fall von Folgerung 8.3 ein, und es gibt einen guten Kode α mit einer Differenzenfolge $(\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\alpha)})$ in M', deren kanonischer Parameter $\bar{b}$ oBdA in $\mathrm{acl}(M)$ liegt. Nach Lemma 8.2 liegen (bei geeigneter Aufzählung) $\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1}$ in M und $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$ ist eine über M generische Realisierung von α.

Fall 1: Für eine $(\mu(\alpha)-1)$-abgeleitete Differenzenfolge liegt der kanonische Parameter $\bar{b}$ bereits in $\mathrm{acl}(B)$.

Wir arbeiten mit dieser Folge weiter und nennen sie weiterhin $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)})$. Wir zeigen zunächst, daß $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$ in A liegen muß. Andernfalls ist $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$ generisch in $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ über A und über M, und somit unabhängig von A und von M über B. Wir wählen grüne Tupel $\bar{a} \in A$ und $\bar{m} \in M$ mit $\bar{e}_{\mu(\alpha)} = \bar{m} \cdot \bar{a}$. Dann sind $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$, $\bar{a}$ und $\bar{m}$ paarweise unabhängig über B, im Widerspruch zu Lemmas 5.1 und 5.2.

Da A minimal präalgebraische Erweiterung von B ist, gilt $A = \langle B, \bar{e}_{\mu(\alpha)} \rangle$. Da $A \in K^\mu$, gibt es ein $\bar{e}_i$ in $M \setminus B$; wegen $B \leqslant M$ ist $\bar{e}_i$ generisch über B nach Kodeeigenschaft (e). Dann induziert $\bar{e}_i \mapsto \bar{e}_{\mu(\alpha)}$ einen Isomorphismus von A und M über B.

Fall 2: Keine $(\mu(\alpha)-1)$-abgeleitete Differenzenfolge besitzt einen kanonischen Parameter in $\mathrm{acl}(B)$.

Wie oben sei $\bar{e}_{\mu(\alpha)} = \bar{m} \cdot \bar{a}$ mit grünen Tupeln $\bar{m} \in M$ und $\bar{a} \in A$. Da $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$ generisch über M ist, gilt $0 = \delta(\bar{e}_{\mu(\alpha)}/M) = \delta(\bar{a}/M)$, und $\bar{a}$ erzeugt A über B linear. Wir wenden Lemma 7.3 auf $B \leqslant M'$ und $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)})$ an. Dann existiert eine Morley-Teilfolge der Länge $\mu^*(\alpha)$ über $B\bar{b}$. Da

$$\mu^*(\alpha) \geqslant n_\alpha k_\alpha + 1 > n_\alpha \geqslant \mathrm{MR}(\bar{m}/B\bar{b}),$$

existiert ein $\bar{e}_i$ in M mit $\bar{m} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{B\bar{b}} \bar{e}_i$. Insbesondere besitzen $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$ und $\bar{e}_i$ denselben Typ über $B\bar{b}\bar{m}$, und damit ebenso $\bar{a} = \bar{m} \cdot \bar{e}_{\mu(\alpha)}^{-1}$ und $\bar{m} \cdot \bar{e}_i^{-1}$. Auf Grund der Minimalität induziert dann $\bar{a} \mapsto \bar{m} \cdot \bar{e}_i^{-1}$ einen Isomorphismus von A und M über B. □

Poizat [**14**] folgend nennen wir eine $\mathcal{L}^*$-Struktur M in $\mathcal{K}^\mu$ *reich*, wenn für jedes endlich erzeugte $B \leqslant M$ und jede endlich erzeugte starke Erweiterung $B \leqslant A$ in $\mathcal{K}^\mu$ eine starke Unterstruktur $A' \leqslant M$ existiert mit $A \simeq_B A'$. Da jede algebraische starke Erweiterung einer Struktur aus $\mathcal{K}^\mu$ wieder in $\mathcal{K}^\mu$ liegt, sind reiche Strukturen bezüglich der Körpersprache algebraisch abgeschlossene Körper.

Folgerung 9.3. *Es gibt eine abzählbare reiche Struktur in $\mathcal{K}^\mu$. Diese ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Alle reichen Strukturen sind $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-äquivalent.*

10. Die Axiome für T^μ

Sei T^μ die elementare Theorie der reichen Körper in $\mathcal{K}^\mu$. Zur Erinnerung: für $\bar{a}, B \subseteq M \in \mathcal{K}$ definiere $\delta(\bar{a}/B) := \delta(\langle B\bar{a}\rangle / \langle B \rangle)$; wir sagen, daß B stark ist in M, falls $\langle B \rangle \leqslant M$.

Definition 10.1. Sei $M \models T^\mu$ und B eine Teilmenge von M. Dann sei $\mathrm{cl}_d^M(B)$ die Vereinigung aller endlich erzeugten $A \subseteq M$ mit $\delta(A/\mathrm{cl}(B)) = 0$, und $d_M(A/B) := d(A/B) := \delta(\mathrm{cl}(\langle A, B\rangle)/\mathrm{cl}(B))$.

Es gilt dann $\mathrm{cl}_d^M(B) = \{a \in M : d(a/B) = 0\}$.

Mit den üblichen Argumenten [**15**] zeigt man folgendes.

Lemma 10.2. *In jeder Struktur aus $\mathcal{K}$ gilt:*

(1) $d(\bar{a}\bar{c}/B) = d(\bar{a}/B\bar{c}) + d(\bar{c}/B)$.

(2) *Auf der Menge der grünen Punkte* Ü *definiert der Abschlußoperator* cl_d *eine Prägeometrie, und d ist gleich der Dimensionsfunktion, die dieser Prägeometrie zugeordnet ist.*

Lemma 10.3. *Sei $e \geqslant 0$, und seien $B = \langle B \rangle \leqslant M \in \mathcal{K}$ sowie $\bar{a} \in M$. Dann gilt:*

(1) *Ist $\delta(\bar{a}/B) = e$, so existiert eine existentielle $\mathcal{L}^*$-Formel $\tau_\delta(\bar{x}, \bar{z})$ und ein Tupel $\bar{b} \in B$ mit folgenden Eigenschaften:*

- $\models \tau_\delta(\bar{a}, \bar{b})$,
- *für alle $\bar{a}'$ und alle $\bar{b}' \in B' \subseteq M' \in \mathcal{K}$ mit $\models \tau_\delta(\bar{a}', \bar{b}')$ ist $\delta(\bar{a}'/B') \leqslant e$.*

(2) *Ist $d(\bar{a}/B) = e$, so existiert eine existentielle $\mathcal{L}^*$-Formel $\tau_d(\bar{x}, \bar{z})$ und ein Tupel $\bar{b} \in B$ mit folgenden Eigenschaften:*

- $\models \tau_d(\bar{a}, \bar{b})$,
- *für alle $\bar{a}'$ und alle $\bar{b}' \in M' \in \mathcal{K}$ mit $\models \tau_d(\bar{a}', \bar{b}')$ ist $d(\bar{a}'/\bar{b}') \leqslant e$.*

Beweis. Teil (2) folgt leicht aus (1). Wir beweisen nun (1). Seien $\bar{a} \in M$ und $B \leqslant M$ gegeben. Sei $B = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n = \langle B\bar{a} \rangle =: A$ die Zerlegung von $B \leqslant A$ in minimal starke Erweiterungen. Man hat

$$e = \delta(\bar{a}/B) = \sum_{i=1}^{n} \delta(A_i/A_{i-1}).$$

Wir nehmen zunächst $n = 1$ an, d.h. $B \leqslant A$ ist minimal stark; wir müssen die vier Fälle aus Lemma 6.4 betrachten. Fälle (1)–(3) sind einfach; wir beschränken uns daher auf den Fall (4) einer minimal präalgebraischen Erweiterung. Sei $\bar{c}$ eine grüne Basis von A/B, und $\bar{b} \in B$ mit $\mathrm{ldim}(\bar{a}\bar{c}/B) = \mathrm{ldim}(\bar{a}\bar{c}/\bar{b})$ und $\bar{a}\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\mid}_{\bar{b}} B$. Sei $\alpha \in \mathcal{C}$ der eindeutige Kode, der A/B zugeordnet ist. Wir wählen eine quantorenfreie $\mathcal{L}^*$-Formel $\tilde{\tau}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ mit $\models \tilde{\tau}(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})$, so daß folgendes gilt:

- Die Tupel $\bar{a}$ und $\bar{c}$ sind explizit multiplikativ interdefinierbar über $\bar{b}$.
- $\models \tilde{\tau}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \rightarrow \bigwedge_i \text{Ü}(y_i)$.
- $\bar{c}$ ist Lösung einer Kodeinstanz $\varphi_\alpha(\bar{y}, \bar{b}_1)$, wobei $\bar{b}_1$ (explizit) in $\mathrm{acl}(\bar{b})$ liegt.

Wegen Kodeeigenschaft (e) hat $\tau_\delta(\bar{x}, \bar{z}) := \exists \bar{y} \tilde{\tau}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ die gesuchten Eigenschaften, denn falls $\models \tilde{\tau}(\bar{a}', \bar{c}', \bar{b}')$, so folgt dann $\delta(\bar{a}'/\bar{b}') = \delta(\bar{c}'/\bar{b}') \leqslant \delta(\bar{c}'/\mathrm{acl}(\bar{b}')) \leqslant 0$.

Den allgemeinen Fall reduziert man auf den minimalen Fall, indem man über ein geeignetes Tupel quantifiziert, das die Zerlegung in minimale Erweiterungen widerspiegelt. $\square$

Sind $M, N \in \mathcal{K}$ mit $M \subseteq N$ und ist M in N als $\mathcal{L}^*$-Struktur existentiell abgeschlossen, so folgt aus Lemma 10.3, daß $M \leqslant N$ ist. Wäre nämlich M nicht stark in N, so gäbe es ein Tupel $\bar{a} \in M$ mit $d_M(\bar{a}) > d_N(\bar{a}) = e$. Für τ_d wie in Lemma 10.3 hätten wir dann $N \models \tau_d(\bar{a}, \bar{b})$ für ein $\bar{b} \in \langle\emptyset\rangle \subseteq M$, somit auch $M \models \tau_d(\bar{a}, \bar{b})$ (da τ_d existentiell ist), im Widerspruch zu $d(\bar{a}/\bar{b}) > e$. Wir erhalten insbesondere folgendes.

Lemma 10.4. *Wenn M elementares Untermodell eines T^μ-Modells N ist, so ist M starke Unterstruktur.*

Wir definieren nun eine $\mathcal{L}^*$-Theorie $\tilde{T}^\mu$ wie folgt:

(1) Jedes Modell liegt in der Klasse $\mathcal{K}^\mu$.

(2) Jedes Modell ist ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(3) Wenn M ein Modell ist, α ein guter Kode und $\bar{b}$ aus M ein geeigneter Parameter, dann ist die durch eine grüne M-generische Lösung $\bar{a} \models \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ gegebene Erweiterung $M[\bar{a}]$ von M nicht in $\mathcal{K}^\mu$.

(4) Axiome, die garantieren, daß es in einem ω-saturierten Modell unendlich viele d-unabängige grün generische Elemente gibt.

Poizat [**15**] hat die Bedingung „$\emptyset \leqslant M$“ universell formuliert; da $\psi_\alpha(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_\nu)$ quantorenfrei ist, sind die Axiome in (1) universell. Daß ACF_0 und damit (2) induktiv axiomatisierbar ist, ist bekannt. Folgerung 8.4 liefert die induktive Axiomatisierung von (3), und die $\exists\forall$-Axiomatisierbarkeit von (4) folgt aus Lemma 10.3.

Der Schlüssel zum Verständnis von T^μ ist der folgende Satz.

Satz 10.5. *Eine $\mathcal{L}^*$-Struktur M ist genau dann eine reiche Struktur in $\mathcal{K}^\mu$, wenn sie ein ω-saturiertes Modell von $\tilde{T}^\mu$ ist. Insbesondere gilt $\tilde{T}^\mu = T^\mu$, und $\tilde{T}^\mu$ ist vollständig.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß alle ω-saturierten Modelle von $\tilde{T}^\mu$ reiche Strukturen in $\mathcal{K}^\mu$ sind. Dann zeigen wir, daß die reichen Strukturen in $\mathcal{K}^\mu$ alle Axiome von $\tilde{T}^\mu$ erfüllen. Da reiche Strukturen $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-äquivalent sind (Folgerung 9.3), folgt dann die ω-Saturiertheit der reichen Strukturen.

Sei M ein ω-saturiertes Modell von $\tilde{T}^\mu$. Seien $B \leqslant M$ und $A \geqslant B$ endlich erzeugte Strukturen in $\mathcal{K}^\mu$. Wir wollen A über B in M stark einbetten. OBdA ist A minimal stark über B. Entsprechend Lemma 6.4 gibt es folgende Möglichkeiten:

- A/B ist algebraisch. Axiom (2) liefert das Gewünschte.
- A/B ist minimal präalgebraisch. Betrachte das freie Amalgam M' von M und A über B. Sei α der gute Kode, der die Erweiterung A/B kodiert. Dann ist nach Axiom (3) M' nicht in $\mathcal{K}^\mu$. Da aber $\mathcal{K}^\mu$ die Amalgamierungseigenschaft für starke Einbettungen besitzt (Satz 9.2), muß die gewünschte starke Einbettung von A über B in M existieren.

- A/B ist grün generisch, wird also durch ein grünes transzendentes Element a erzeugt. Das ω-saturierte Modell M enthält wegen Axiom (4) unendlich viele grün generische und d-unabhängige Elemente $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Da $d(B) = e < \infty$, existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $d(g_i/B) = 1$. Dann ist $\langle Bg_i\rangle/B$ grün generisch (und in M), und die Abbildung $a \mapsto e_i$ induziert eine starke Einbettung von A in M über B.

- A/B ist weiß generisch, d.h. A wird durch ein weißes transzendentes Element w über B erzeugt und $\ddot{\mathrm{U}}(A) = \ddot{\mathrm{U}}(B)$. Man überlegt sich leicht, daß für zwei grüne, über B generische und d-unabhängige Elemente g_1 und g_2 die Summe $w' := g_1 + g_2$ weiß B-generisch ist, d.h. $d(w'/B) = 2$. Nach dem letzten Paragraphen existieren solche Elemente g_1, g_2 in M, und dieser Fall ist ebenso erledigt.

Sei nun M in $\mathcal{K}^\mu$ reich; wir wollen $M \models \tilde{T}^\mu$ zeigen. Zuerst zeigen wir, daß M algebraisch abgeschlossen im Sinne der Körpertheorie ist. Sei $a \in \mathrm{acl}(M)$, und $B \leqslant M$ endlich erzeugt mit $a \in \mathrm{acl}(B)$. Wenn a grün ist, so liegt a in B, da $B \leqslant M$. Sonst muß a weiß sein, und $\ddot{\mathrm{U}}(B) = \ddot{\mathrm{U}}(\langle Ba\rangle)$. Die Erweiterung $\langle Ba\rangle \geqslant B$ ist dann in $\mathcal{K}^\mu$ und deshalb über B in M realisiert.

Um Axiom (3) zu zeigen, betrachten wir einen guten Kode α und $\bar{b} \in M$; sei $\bar{a}$ eine M-generische Realisierung von $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$. Wäre $\langle M\bar{a}\rangle \in \mathcal{K}^\mu$, so wählen wir $B_0 \leqslant M$ mit $\bar{b} \in B_0$. Dann ist auch $\langle B_0\bar{a}\rangle \in \mathcal{K}^\mu$; da M reich ist, existiert $\bar{a}_0 \in M$ mit $\langle B_0\bar{a}\rangle \cong \langle B_0\bar{a}_0\rangle =: B_1 \leqslant M$. Wir wiederholen diesen Schritt mit B_1 anstelle von B_0, und finden induktiv eine Folge $B_0 \leqslant B_1 \leqslant B_2 \leqslant \cdots$ in M, so daß $B_{i+1} := \langle B_i\bar{a}_i\rangle \cong \langle B_i\bar{a}\rangle$. Dann ist $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ eine beliebig lange grüne Morley-Folge für $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$; die zugehörigen Differenzenfolgen erfüllen dann ψ_α im Widerspruch zu $M \in \mathcal{K}^\mu$.

Schließlich erfüllt M als reiche Struktur natürlich Axiom (4). $\square$

Zur Erinnerung: Für $A \subseteq M \in \mathcal{K}$, so ist $\mathrm{cl}(A)$ die kleinste $\langle\cdot\rangle$-abgeschlossene Menge mit $A \subseteq \mathrm{cl}(A) \leqslant M$. Wenn A endlich erzeugt ist, so auch $\mathrm{cl}(A)$.

Folgerung 10.6. *T^μ ist eine vollständige Theorie. Zwei Tupel $\bar{a}$ und $\bar{a}'$ aus T^μ-Modellen M und M' besitzen genau dann den gleichen Typ, wenn es einen $\mathcal{L}^*$-Isomorphismus f von $\mathrm{cl}_M(\bar{a})$ auf $\mathrm{cl}_{M'}(\bar{a}')$ gibt, der $\bar{a}$ auf $\bar{a}'$ abbildet.*

Beweis. Der in Kapitel 9 konstruierte reiche Körper ist nach Satz 10.5 ein Modell von T^μ. Wenn M und M' zwei beliebige Modelle von T^μ sind, so ersetzen wir sie durch elementare Erweiterungen, die ω-saturiert sind. Nach Satz 10.5 sind diese reich und nach Folgerung 9.3 elementar äquivalent. Somit sind auch M und M' elementar äquivalent.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, nehmen wir an, daß M und M' ω-saturiert sind. Nach Lemma 10.4 ändert sich $\mathrm{cl}_M(\bar{a})$ beim Übergang zu einer elementaren Erweiterung nicht. Dann sind M und M' reiche Körper. Somit kann man $f : \mathrm{cl}_M(\bar{a}) \to \mathrm{cl}_{M'}(\bar{a}')$ als Anfang eines Hin-und-Her-Systems ansehen, und f ist elementar.

Nun nehmen wir an, daß $\bar{a}$ in M und $\bar{a}'$ in M' denselben elementaren Typ besitzen. Da $\mathrm{cl}(\bar{a})$ zum algebraischen Abschluß von $\bar{a}$ im Sinne von T^μ gehört, existiert wegen der ω-Saturation von M' eine elementare Abbildung f von $\mathrm{cl}(\bar{a})$ nach M', die $\bar{a}$ auf $\bar{a}'$ abbildet. Sei $A' = f(\mathrm{cl}(\bar{a}))$. Da A' denselben Typ wie $\mathrm{cl}(\bar{a}')$ hat, ist A' stark in M' und wir erhalten $A' = \mathrm{cl}(\bar{a}')$. $\square$

Folgerung 10.7. *Die Theorie T^μ ist modellvollständig.*

Beweis. Wir geben einen einfachen direkten Beweis, der von Martin Ziegler stammt. Es ist zu zeigen, daß für Modelle M und N von T^μ mit $M \subseteq N$ stets $M \leqslant N$ gilt. Denn ist $M \leqslant N$ und $\bar{a}$ ein Tupel in M, so gilt $\mathrm{cl}_M(\bar{a}) = \mathrm{cl}_N(\bar{a})$. Damit ist aufgrund von Folgerung 10.6 die Inklusion eine elementare Abbildung. Wir zeigen allgemeiner folgendes.

Behauptung. Ist $M \models T^\mu$ und $M \subseteq N \in \mathcal{K}^\mu$, so gilt $M \leqslant N$.

Angenommen, die Behauptung sei falsch. Wir wählen ein Gegenbeispiel $M \not\leqslant N_1$ mit $\mathrm{ldim}(N_1/M) = e$ minimal. Da $M = \mathrm{acl}(M)$, gilt offenbar $e \geqslant 2$. Aus der Minimalität von e folgt, daß $\delta(N_0/M) \geqslant 0$ für alle $N_0 = \langle N_0 \rangle$ mit $M \subseteq N_0 \subsetneq N_1$. Insbesondere ist $M \leqslant N_0$. Man wählt nun ein solches N_0 mit $\mathrm{ldim}(N_0/M) = e - 1$. Aus

$$-1 \geqslant \delta(N_1/M) = \delta(N_1/N_0) + \delta(N_0/M)$$

und $\delta(N_1/N_0) \geqslant -1$ folgt $\delta(N_0/M) \leqslant 0$. Da $M \leqslant N_0$ ist, ist die Erweiterung N_0/M präalgebraisch (d.h. ein Turm aus algebraischen und minimal präalgebraischen Erweiterungen) in $\mathcal{K}^\mu$. Insbesondere finden wir N'/M minimal präalgebraisch mit $M \leqslant N' \leqslant N_0$. Dies widerspricht aber Axiom (3), und die Behauptung ist bewiesen. □

Bemerkung 10.8. Man kann zeigen, daß Axiom (4) aus (1)–(3) folgt. Hierzu muß die grün generische Erweiterung durch geeignete präalgebraische Erweiterungen approximiert werden. Andererseits folgt die $\forall\exists$-Axiomatisierbarkeit von T^μ aus der Modellvollständigkeit (Folgerung 10.7) aus allgemeinen Gründen.

11. Rangberechnungen

In diesem Kapitel zeigen wir, daß der Morleyrang von T^μ gleich 2 ist. Es sei acl^μ der algebraische Abschluß in Modellen der Theorie T^μ. Alle modelltheoretischen Bezeichnungen beziehen sich nun auf T^μ. Manchmal machen wir dies durch ein zusätzliches μ deutlich. Wir zeigen, daß $\mathrm{acl}^\mu(\bar{a})$ die Vereinigung aller präalgebraischen Erweiterungen von $\mathrm{cl}(\bar{a})$ ist.

Lemma 11.1. *In Modellen M von T^μ stimmen acl^μ und cl_d^M überein.*

Beweis. Wenn B endlich erzeugt ist, so ist $\mathrm{cl}(B)$ auch endlich erzeugt und Teil von $\mathrm{acl}^\mu(B)$. Deshalb können wir annehmen, daß B endlich erzeugt und stark in M ist.

Zuerst zeigen wir $\mathrm{cl}_d^M(B) \subseteq \mathrm{acl}^\mu(B)$. Sei also $A \subset M$ endlich erzeugt mit $\delta(A/B) = 0$. Da $\mathrm{ldim}(A/B)$ endlich ist, können wir A/B in eine endliche Folge von minimalen Erweiterungen zerlegen; für $A' \supseteq B$ mit $\delta(A'/B) = 0$ ist wegen $B \leqslant M$ auch $A' \leqslant M$. OBdA können wir also annehmen, daß A/B minimal ist. Nach Lemma 6.4 gibt es die folgenden Möglichkeiten:

(i) A ist im körpertheoretischen algebraischen Abschluß von B. Dann gilt natürlich $A \subseteq \mathrm{acl}^\mu(B)$.

(ii) A ist eine minimal präalgebraische Erweiterung von B. Nach Satz 4.10 existieren ein guter Kode α und Parameter $\bar{b}$ in $\mathrm{acl}(B)$, so daß $A = \langle B\bar{a}\rangle$ für eine generische grüne Lösung $\bar{a} \models \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ ist. Es reicht zu zeigen, daß alle grünen Lösungen von $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ in M liegen. Sei hierzu $M \preccurlyeq N$ und $\bar{a}' \in N$ eine Lösung, die nicht vollständig in M liegt. Dann ist $\bar{a}'$ notwendig generisch über M. Dies widerspricht Axiom (3).

Um $\mathrm{acl}^\mu(B) \subseteq \mathrm{cl}_d^M(B)$ zu zeigen, betrachten wir $a \in M \setminus \mathrm{cl}_d^M(B)$. Für $A = \mathrm{cl}(B, a)$ ist dann $\delta(A/B) > 0$. Wir zerlegen A/B in minimale Erweiterungen $B \leqslant A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n = A$. Dann existiert ein $i < n$ mit $\delta(A_{i+1}/A_i) > 0$. Nach Lemma 6.4 erhalten wir $\mathrm{ldim}(A_{i+1}/A_i) = 1$, und die Erweiterung A_{i+1}/A_i ist weiß generisch oder grün generisch. Nach Folgerung 8.3 ist das freie Amalgam von A_{i+1} und jeder starken Erweiterung von A_i in $\mathcal{K}^\mu$. Da M reich ist, erhalten wir unendlich viele $A' \leqslant M$, die über A_i isomorph zu A_{i+1} sind. Nach Folgerung 10.6 haben sie alle denselben elementaren Typ über A_i. Also ist $A_{i+1} \not\subseteq \mathrm{acl}^\mu(A_i)$, und erst recht $a \notin \mathrm{acl}^\mu(B)$, denn A_{i+1} ist algebraisch über $\langle B, a\rangle$ und $B \subseteq A_i$. □

Satz 11.2. *T^μ hat Morleyrang 2 und ist überabzählbar kategorisch. Der weiß generische Typ hat Morleyrang 2, und der grüne generische Typ hat Morleyrang 1. Der algebraische Abschluß in Modellen von T^μ ist durch cl_d gegeben. Allgemeiner gilt für alle Tupel $\bar{a}$ und alle B die Identität*

$$\mathrm{MR}(\bar{a}/B) = \mathrm{U}(\bar{a}/B) = d(\bar{a}/B).$$

Beweis. Sei M ein ω-saturiertes Modell von T^μ, elementar eingebettet in das Monstermodell von T^μ. Wir berechnen $\mathrm{MR}(a/M)$ für Elemente a aus dem Monstermodell. Wegen

$$0 \leqslant d(a/M) \leqslant \delta(a/M) \leqslant 2$$

gibt es 4 Fälle.

- $d(a/M) = 0$: Nach Lemma 10.4 und Lemma 11.1 ist $a \in \mathrm{acl}^\mu(M) = M$. Also ist $\mathrm{MR}(a/M) = 0$.

- $d(a/M) = 1$ und a ist grün: Dann ist $\langle Ma\rangle$ stark im Monstermodell, und $\mathrm{tp}(a/M)$ ist wegen Folgerung 10.6 der eindeutig bestimmte *grün generische Typ*. Da alle anderen grünen Typen über M algebraisch sind, folgt $\mathrm{MR}(a/M) = 1$, und Ü definiert eine streng minimale Menge.

- $d(a/M) = 1$ und a ist nicht grün: Dann muß $\mathrm{cl}(\langle M, a\rangle) \setminus M$ einen grünen Punkt c enthalten. Wir erhalten $\langle Mc\rangle \leqslant \mathrm{cl}(Ma)$ und $d(a/Mc) = 0$. Somit sind a und c bezüglich T^μ interalgebraisch über M, und $\mathrm{MR}(a/M) = \mathrm{MR}(c/M) = 1$.

- $d(a/M) = 2$: Dann gilt $\text{Ü}(\langle Ma\rangle) = \text{Ü}(M)$ und $\langle Ma\rangle$ ist stark im Monstermodell eingebettet. Nach Folgerung 10.6 ist $\mathrm{tp}(a/M)$ der eindeutig bestimmte *weiß generische Typ*, d.h. der *generische Typ* der Körpers. Da alle anderen Typen höchstens Morleyrang 1 besitzen, folgt $\mathrm{MR}(a/M) \leqslant 2$. Nun ist $\text{Ü}(M)$ eine unendliche Untergruppe von M von unendlichem Index. Folglich ist $\mathrm{MR}(a/M) = 2$, und T^μ hat Morleyrang 2.

Nach einem Resultat von Zilber [**20**] ist T^μ als Theorie eines Körpers von endlichem Morleyrang somit überabzählbar kategorisch.

Für den Beweis der Identität $\mathrm{MR}(\bar{a}/B) = \mathrm{U}(\bar{a}B) = d(\bar{a}/B)$ beachte man, daß in überabzählbar kategorischen Theorien stets $\mathrm{MR} = \mathrm{U}$ gilt. Insbesondere ist der Morleyrang also additiv. Wir haben aber bereits gezeigt, daß für Elemente a (d.h. Tupel der Länge 1) die Gleichheit $\mathrm{MR}(a/B) = d(a/B)$ gilt. Da d ebenfalls additiv ist, folgt alles. □

Bemerkung 11.3. Einer Idee von Poizat folgend [**15**] kann man für jede natürliche Zahl $r \geqslant 2$ einen Körper vom Morleyrang r mit einer streng minimalen multiplikativen grünen Untergruppe konstruieren, indem man mit der folgenden Prädimension arbeitet:

$$\delta(A) = r\,\mathrm{tr}(A) - (r-1)\,\mathrm{ldim}(\ddot{\mathrm{U}}(A)).$$

Des weiteren führt analog zu [**3**] die Prädimension

$$\delta(A) = r\,\mathrm{tr}(A) - \mathrm{ldim}(\ddot{\mathrm{U}}(A))$$

zu einem Körper vom Morleyrang r mit einer multiplikativen grünen Untergruppe vom Morleyrang $r-1$.

Frage 11.4. Kirby hat in seiner Dissertation [**11**] Satz 2.2 auf semi-abelsche Värietäten verallgemeinert. Kann man dies verwenden, um einen Körper von endlichem Morleyrang mit einer nichtalgebraischen Untergruppe einer beliebigen semi-abelschen Varietät zu konstruieren?

Danksagung. Der erste und vierte Autor wurden vom europäischen Forschungsvertrag FP6-MRTN-CT-2004-512234 Modnet unterstützt, der dritte Autor durch die Marie Curie Postdoktorandenstelle FP6-MOB-5-009541.

Der vierte Autor ist Juniormitglied des Institut universitaire de France.

Wir danken dem Gutachter für seine detailierten Kommentare, und vor allem auch für die weiterführenden Fragen, die wir hier leider nicht alle beantworten konnten. Wir arbeiten daran!

Literatur

1. J. Ax, On Schanuel's conjecture, *Annals Math.* **93** (1971), 252–258.
2. J. Baldwin und K. Holland, Constructing ω-stable structures: fields of rank 2, *J. Symb. Logic* **65**(1) (2000), 371–391.
3. A. Baudisch, A. Martin-Pizarro und M. Ziegler, On fields and colours, *Alg. Logika* **45**(2) (2006), 159–184.
4. A. Baudisch, A. Martin-Pizarro und M. Ziegler, Hrushovski's fusion, in *Festschrift fuer Ulrich Felgner zum 65 Geburtstag* (Herausgeber F. Haug, B. Loewe und T. Schatz), Studies in Logic, Volume 4, pp. 15–31 (College Publications, London, 2007).
5. A. Baudisch, A. Martin-Pizarro und M. Ziegler, Fusion over a vector space, *J. Math. Logic* **6**(2) (2007), 141–162.
6. A. Baudisch, A. Martin-Pizarro und M. Ziegler, Red fields, *J. Symb. Logic* **72**(1) (2007), 207–225.

7. J. B. Goode, *Hrushovski's geometries*, Seminarberichte der Humboldt Universität zu Berlin, Nr. 104, pp. 106–117 (Humboldt Universität zu Berlin, 1989).
8. A. Hasson und M. Hils, Fusion over sublanguages, *J. Symb. Logic* **71**(2) (2006), 361–398.
9. E. Hrushovski, Strongly minimal expansions of algebraically closed fields, *Israel J. Math.* **79** (1992), 129–151.
10. E. Hrushovski, A new strongly minimal set, *Annals Pure Appl. Logic* **62** (1993), 147–166.
11. J. Kirby, The theory of the exponential differential equations of semiabelian varieties, preprint arXiv:0708.1352v1 (2007).
12. A. Macintyre, On ω_1-categorical fields, *Fund. Math.* **71** (1971), 1–25.
13. E. Mustafin, Structure des groupes linéaires définissables dans un corps de rang de Morley fini, *J. Alg.* **281**(2) (2004), 753–773.
14. B. Poizat, Le carré de l'égalité, *J. Symb. Logic* **64**(3) (1999), 1338–1355.
15. B. Poizat, L'égalité au cube, *J. Symb. Logic* **66**(4) (2001), 1647–1676.
16. L. van den Dries und K. Schmidt, Bounds in the theory of polynomial rings over fields, *Invent. Math.* **76** (1984), 77–91.
17. F. O. Wagner, Fields of finite Morley rank, *J. Symb. Logic* **66**(2) (2001), 703–706.
18. F. O. Wagner, Bad fields in positive characteristic, *Bull. Lond. Math. Soc.* **35** (2003), 499–502.
19. M. Ziegler, Lemma für Daniels beschränkte Automorphismen ('A note on generic types'), preprint arXiv math/0608433v1 (2004).
20. B. I. Zilber, Groups and rings whose theory is categorical, *Fund. Math.* **95** (1977), 173–188.