Benjamin Blankertz

Beweistheoretische Techniken zur Bestimmung von $\mathbf{\Pi^0_2}$–Skolem Funktionen

1997

Mathematische Logik

Beweistheoretische Techniken zur Bestimmung von Π^0_2–Skolem Funktionen

Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften im Fachbereich Mathematik und Informatik der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Benjamin Blankertz
aus Berlin
– 1997 –

Dekan:	Prof. Dr. Friedrich-Karl Holtmeier
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Wolfram Pohlers
Zweiter Gutachter:	HDoz. Dr. Andreas Weiermann
Tage der mündlichen Prüfungen:	
– Mathematische Logik:	
– Reine Mathematik:	
– Informatik:	
Tag der Promotion:	

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Ideen dieser Arbeit 4

1.2 Resultate 6

1.3 Hinweis zur Rechtschreibung 8

1.4 Danksagung 8

2 Die beweisbar rekursiven Funktionen von PA **9**

2.1 Introduktion 9

2.2 Formales Praeludium 10

2.3 Exposition 12

2.4 Durchführung 15

2.5 Koda 26

3 Ordinalzahlen und Hierarchien **27**

3.1 Das Bezeichnungssystem $\mathrm{T}(M)$ 29

3.2 Das Bezeichnungssystem $\mathrm{T}(\mathcal{K})$ 34

3.3 Subrekursive Hierarchien 40

3.4 Produkte und $\lhd$–Vergleiche 41

4 Kripke-Platek Mengenlehren und Zwischensysteme **45**

4.1 Die Sprachen $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(M)}$ und $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\mathcal{K})}$ 45

4.2 Kripke-Platek Mengenlehren 50

4.3 Die Zwischensysteme $\mathrm{RS}(\vartheta)^{\star}$ 51

5 Operator kontrollierte Herleitungen **57**
5.1 Das infinitäre System RS(M) 61
5.2 Transformationen des η–Parameters 66
5.3 Das infinitäre System RS($\mathcal{K}$) 68

6 Einbettungen **71**

7 Kollabierung und imprädikative Schnittelimination **79**
7.1 Schnittelimination in RS(M) 79
7.2 Schnittelimination in KP+(Π_3–Ref) 88

8 Hauptsätze und Resultate **109**

9 Epilog **119**

A Analyse von KP$\boldsymbol{\omega}$ **123**

B Normabschätzungen für die Einbettung **137**

C Sternherleitung von Lomega **149**

Symbolverzeichnis und Index **158**

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit gehört innerhalb der mathematischen Logik in das Gebiet der Beweistheorie, dessen Name sich von der Tatsache ableitet, dass in ihm formale Beweise die Objekte der Untersuchung sind. Seit Gentzens Beweis der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie mit einer Induktion über eine Wohlordnung der Länge ε_0 als einzigem nicht-finiten Argumentationsmittel spielen Ordinalzahlanalysen eine wichtige Rolle in der Beweistheorie. Ein Leitmotiv für beweistheoretische Ordinalzahlanalysen ist eine Fragestellung, die auf Georg Kreisel zurückgeht: *Haben wir mehr Erkenntnis als die Wahrheit eines Satzes gewonnen, wenn wir wissen, aus welchem Axiomensystem er abgeleitet werden kann?* Diese Arbeit geht einen der Aspekte an, unter denen man tatsächlich durch die Kenntnis einer formalen Theorie, die eine gegebene Aussage beweist, zusätzliche Information erhält. Haben wir von einer berechenbaren Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in einer der hier untersuchten Theorien gezeigt, dass zu jedem x ein Funktionswert $f(x)$ existiert, so gewinnen wir eine Aussage über das Wachstumsverhalten dieser Funktion.

Den beweistheoretischen Zugriff auf imprädikative Theorien hat Wolfram Pohlers durch Methode der lokalen Prädikativität ermöglicht. Gerhard Jäger hat dieses Prinzip auf Mengenlehren angewendet. Dabei hat er Theorien verwendet, deren Entwicklung auf Saul Kripke und Richard Platek zurückgeht. Durch die stetige Weiterentwicklung gibt es inzwischen sehr elegante Ordinalzahlanalysen von Kripke-Platek Mengenlehren, bis hin zu der stärksten Theorie KP+(Π_3–Ref), für die bislang eine solche Analyse vollständig veröffentlicht[1] wurde. Besonders durch die Einführung der Operator kontrollierten Herleitungen[2] von Wilfried Buchholz sind die Beweisgänge sehr durchsichtig geworden. Um aus einer Ordinalzahlanalyse eine Klassifizierung der beweisbar rekursiven Funktionen zu gewinnen, gibt es schon lange ein allgemeines Konzept[3]. Allerdings benutzt es schwere metamathematische Methoden und die Ausführung ist technisch so unerfreulich, dass man lieber davon Abstand nimmt, diesen Weg für stärkere Mengensysteme einzuschlagen. Einen beträchtlichen Fortschritt auf diesem Gebiet hat Andreas Weiermann[4] erzielt, und zwar über einen neuen Zugang zu subrekursiven Hierarchien, den er in Zusammenarbeit mit Wilfried Buchholz und Adam Cichon entwickelt hat[5]. Diese Methode hat zwei Nachteile. Zum einen kann man sie nur bei Ordinalzahlanalysen einsetzen, die auf Bezeichnungssystemen mit totalen Kollabierungsfunktionen beruhen. Diese gibt es zwar noch für Theorien bis zu der Stärke von KPM, aber es ist nicht klar, ob man sie für KP+(Π_3–Ref) entwickeln kann, geschweige denn für noch stärkere Theorien, deren Analyse die Zukunft bringen mag. Zum anderen lässt sich das Verfahren nicht in Zusammenklang mit den Operator kontrollierten Herleitungen bringen. Daher muss man die Analyse im „alten Stil" durchführen und handelt sich dabei einige technische Schwierigkeiten ein. Der Blick auf den wesentlichen Beweisgang scheint verstellt.

Also ist es wünschenswert diese Technik weiterzuentwickeln und mit den Operator kontrollierten Herleitungen zu verheiraten. Dieses Ziel ist mit der vorliegenden Arbeit erreicht. Da für das angestrebte Ergebnis endliche Ordinalzahlen die entscheidende Rolle spielen, ist es klar, dass der Weg neue Rechnungen „auf unterster Ebene" erfordert. Aber außer diesen zusätzlichen Rechnungen braucht man an einer vorliegenden Ordinalzahlanalyse im Stil von

---

[1] in [Rathjen 1994b]

[2] in [Buchholz 1991a]

[3] Dies wird z.B. in [Pohlers 1992] skizziert.

[4] in [Weiermann 1996]

[5] in [Buchholz et al. 1994]

[Buchholz 1991a] bzw. [Rathjen 1994b] nur geringfügige Änderungen vorzunehmen.

Wir führen verfeinerte Operatoren $\mathcal{H}^\eta$ ein, bei denen der endliche Kontent der Ordinalzahlen durch den Parameter η kontrolliert wird. Entscheidend dafür, dass sich die Analyse so leicht auf diese Operatoren anpassen lässt, ist die Entdeckung, dass man den Parameter η während des verwickelten Vorgangs der Schnittelimination nicht, wie die Herleitungslänge, zu kollabieren braucht. Dies hätte manigfaltige technische Schwierigkeiten mit sich gebracht. Anstattdessen kann man den Parameter ganz am Ende der Analyse durch Anwendung einer einzigen Kollabierungsfunktion in den abzählbaren Bereich bringen (siehe η–Kollabierung, Satz 8.5).

Um den Leser mit der neuen Technik zur Bestimmung der beweisbar rekursiven Funktionen einer Theorie vertraut zu machen, wird im ersten Kapitel die Zahlentheorie PA (Peano Arithmetik) untersucht. Dabei wurde viel Wert auf Motivation und Ausführlichkeit in den Beweisen gelegt. Die Analyse geht auf eine Entdeckung von Andreas Weiermann zurück und ist in [Blankertz et al. 1996] veröffentlicht. Im Hauptteil folgt die Untersuchung der Mengenlehren KPM und KP+(Π_3–Ref). Da die Ordinalzahlanalysen dieser Theorien von Wilfried Buchholz und Michael Rathjen sehr schön und ausführlich veröffentlicht sind, wurden diejenigen Sätze, die unverändert übernommen werden können, nur zitiert. Hingegen sind alle zusätzlichen Rechnungen, die das neue Verfahren benötigt, detailliert niedergeschrieben. Der Anhang widmet sich mit dem ersten Kapitel der Analyse von KPω. Das Ergebnis hätte im Hauptteil en passent mit erledigt werden können. Dadurch, dass es hier seperat behandelt wird, können aber einfacher konzipierte Operatoren eingesetzt werden. Dieser Ansatz mag für weitere Forschung in diesem Gebiet von Interesse sein. Außerdem stellt die Art, wie der endliche Kontent des Operators kontrolliert wird, einen Zwischenschritt von PA zu KPM dar und kann somit das Verständnis der schweren Analysen erleichtern. Die restlichen beiden Anhangskapitel enthalten elementare, aber aufwendige Beweise, die wegen ihres geringen Stellenwertes für die Analyse aus dem Hauptteil verbannt wurden.

1.1 Ideen dieser Arbeit

Bei der beweistheoretischen Untersuchung einer Theorie verwendet man infinitäre Systeme, die – zumindest für bestimmte Formelklassen – Schnittelimination erlauben. In der bekannten Analyse von PA spielt PA_ω diese Rolle. Während der Schnittelimination für imprädikative Theorien müssen die Ordinalzahlen im gesamten Beweisbaum kollabiert werden, um die problematischen Schlussregeln (die das Imprädikative ausmachen) durch unproblematische ersetzen zu können. Damit dieser Vorgang zu einem korrekten Beweisbaum führt (Kollabierungsfunktionen sind notwendigerweise nicht überall streng monoton), dürfen dort nur bestimmte Ordinalzahlen auftreten. Dazu wird in dem infinitären System jede Herleitung von einem Operator kontrolliert, der bestimmt, welche Ordinalzahlen in welchen Herleitungsschritten erlaubt sind.
Von diesem Gedanken ist die im ersten Kapitel verwendete Methode zur Bestimmung der beweisbar totalen Funktionen von PA inspiriert. Jede Herleitung wird von einer Funktion kontrolliert, in der Art, dass Existenzbeispiele in Abhängigkeit von Numeralen, die im weiteren Verlauf der Herleitung durch Allschlüsse gebunden werden, nicht stärker wachsen dürfen als die kontrollierende Funktion. Eine schnellwachsende Funktionenhierarchie $(\mathrm{F}_\gamma)_{\gamma<\varepsilon_0}$, die in diesem Kalkül die Ordinalzahlanalyse erlaubt, majorisiert die beweisbar totalen Funktionen von PA[6]. Bei diesem Verfahren kann also direkt die angestrebte Funktionenhierarchie als Kontrollinstanz in der Herleitungsrelation eingesetzt werden.
In diesem Aspekt ist die Lage bei der Analyse von $\mathrm{KP}\omega$ ähnlich. Bei der reinen Ordinalzahlanalyse kann man Operatoren

$$\mathcal{H}_\eta(X) = \{\alpha :\ \mathrm{SC}_\Omega(\alpha) < \bar{\theta}\eta\check{X}\} \quad \text{mit } \check{X} := \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n$$
$$\text{für } X = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$$

verwenden. Sie stellen sicher, dass die Kollabierungsfunktion ($\alpha \mapsto \bar{\theta}\alpha 0$) für $\alpha > \eta$ (unter gewissen Zusatzbedingungen) auf den Ordinalzahlen aus dem

[6]Eine ausführliche Übersicht über den Beweisgang bietet die Movitation im Abschnitt 2.3.

Operator streng monoton ist. Dieser Operator wird nun durch eine Forderung an die Norm der beinhalteten Ordinalzahlen eingeschränkt, nämlich durch $N_\Omega(\alpha) < \mathrm{F}_{\bar\theta\eta\check{X}}(0)$. Diese Restriktion korrespondiert wieder direkt zum angestrebten Ziel, der Majorisierung der beweisbar rekursiven Funktionen durch die Hierarchie $(\mathrm{F}_\gamma)_{\gamma<\bar\theta\varepsilon_{\Omega+1}0}$: Aus einem schnittfreien Beweis der Totalität der Funktion $\{e\}$

$\mathcal{H}_\eta \vert\!\frac{\alpha}{0}\ \forall x{\in}\omega\ \exists y{\in}\omega\ T'(e,x,y)$ folgt mit Allinversion
$\mathcal{H}_\eta[x] \vert\!\frac{\alpha}{0}\ \exists y{\in}\omega\ T'(e,x,y)$ für alle $x \in \omega$.
Der letzte Schluss war ein Existenzschluss, hatte also die Prämisse[7]
$\mathcal{H}_\eta[x] \vert\!\frac{\alpha_0}{0}\ T'(e,x,t)$.
Es ist $|t| \in \mathcal{H}_\eta[x]$, also gilt $|t| = N_\Omega(|t|) < \mathrm{F}_{\bar\theta\eta x}(0) < \mathrm{F}_{\bar\theta\eta\omega}(x)$.

Insgesamt ergibt sich $\forall x\ \exists y{<}\mathrm{F}_{\bar\theta\eta\omega}(x)\ \{e\}(x) = y$, wenn T' eine Version von Kleenes T–Prädikat in der Sprache der Mengenlehre ist.
Leider scheint sich diese glatte Beweisführung nicht auf KPM übertragen zu lassen. Dort haben wir Kollabierungsfunktionen ψ_κ für alle regulären $\kappa \le M$. Eine Einschränkung der Operatoren à la $N\alpha < \mathrm{F}_{\psi_\Omega\eta}(0)$, die das Vorhandensein weiterer Kollabierungsfunktionen ignoriert, greift zu kurz. Auch wenn das Ziel der Schnittelimination durch Anwendung einer einzigen Kollabierungsfunktion ψ_Ω erreicht wird, treten im Induktionsbeweis doch alle möglichen Zwischenkollabierungen für $\kappa > \Omega$ auf. Dabei erweist sich die Forderung $N\alpha < \mathrm{F}_{\psi_\Omega\eta}(0)$ im Operator als zu restriktiv. Schwächt man die Bedingung ab zu $N\alpha < \mathrm{F}_\eta(0)$, sieht man sich vor dem unlösbaren Problem, η in den abzählbaren Bereich zu bekommen. Zu $\eta > \Omega$ findet man kein $\eta' < \Omega$, für das $\mathrm{F}_\eta \le \mathrm{F}_{\eta'}$ gilt. Um den Parameter, der den endlichen Kontent des Operators kontrollieren soll, kollabieren zu können, muss man sich einer komplexeren Bedingung bedienen. Aus [Buchholz et al. 1994] kennen wir die Definitionen:

$$\alpha \lhd^1_x \eta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha < \eta \quad \& \quad N\alpha \le \Phi(N\eta + x) \quad \text{und} \quad \lhd_x := TC(\lhd^1_x)$$
$$\mathrm{F}_\eta(x) := \max\left(\{x+1\} \cup \{\mathrm{F}_\alpha{\circ}\mathrm{F}_\alpha(x) :\ \alpha \lhd^1_x \eta\}\right)$$

[7]Für eine formal korrekte Argumentation wird auf den Satz A.20 (ii) verwiesen.

Aus $\alpha \lhd_x \eta$ folgt $\mathrm{F}_\alpha(x) < \mathrm{F}_\eta(x)$. Wir schränken nun einen Operator $\mathcal{H}$ mit Hilfe der $\lhd_x$–Relation wie folgt ein

$$\mathcal{H}^\eta(X) := \mathcal{H}(X) \cap \{\alpha \in \mathrm{dom}(N) : \alpha \lhd_{\vee X} \eta\} \text{ mit } \vee X := \max\{N\xi : \xi \in X\}.$$

Dadurch haben wir Folgendes erreicht. Während der Schnittelimination kann der Parameter η groß bleiben, d.h. er braucht nicht kollabiert zu werden. Die Bedingung $\alpha \lhd_{\vee X} \eta$ lässt genug Raum, damit die Schnittelimination mit allen Zwischenkollabierungen durchgeführt werden kann. Ist die Schicht eines Terms $t \in \mathrm{L}_\omega$ im Operator $\mathcal{H}^\eta[x]$, es gilt also $|t| \lhd_x \eta$, so kann man diese Relation kollabieren zu $\psi_\Omega|t| \lhd_x \psi_\Omega\eta$. Daraus folgt

$$|t| < \mathrm{F}_{\psi_\Omega|t|}(x) < \mathrm{F}_{\psi_\Omega\eta}(x).$$

Also können die beweisbar rekursiven Funktionen von KPM wie oben bei KPω skizziert, majorisiert werden. Allerdings war es vorschnell zu behaupten, dass die Relation $\lhd_x$ kollabiert werden kann. Diese Eigenschaft können wir nur durch eine speziellere Definition der $\mathcal{H}^\eta$–Operatoren sichern. Das Geheimnis zu lüften, wie dies anzustellen ist, bleibt dem Hauptteil dieser Arbeit überlassen.

1.2 Resultate

Zur einheitlichen Darstellung der Ergebnisse dieser Arbeit definieren wir die beweistheoretischen Ordinalzahlen aller untersuchten Theorien.

- $||\,\mathrm{PA}\,|| := \varepsilon_0$
- $||\,\mathrm{KP}\,\omega|| := \vartheta\varepsilon_{\Omega+1}$
- $||\,\mathrm{KPM}\,|| := \psi_\Omega(\varepsilon_{M+1})$
- $||\,\mathrm{KP} + (\,\Pi_3\text{–Ref})\,|| := \Psi^0_\Omega(\varepsilon_{\mathcal{K}+1})$

Dabei sind Ω, M und $\mathcal{K}$ die kleinste überabzahlbare Kardinalzahl, die kleinste Mahlo Kardinalzahl und die kleinste schwach kompakte Kardinalzahl. ϑ, ψ_Ω und Ψ^0_Ω sind Kollabierungsfunktionen, die ihre Argumente in den abzählbaren

Bereich kollabieren[8]. Da ihre Definition aufwendig ist, wird hier nur auf die Definitionen A.1, 3.4 und 3.15 im Hauptteil verwiesen. Sie werden im Rahmen von Ordinalzahlbezeichnungssystemen definiert, die sich als primitiv-rekursive Prädikate auf den natürlichen Zahlen kodieren lassen. Diese Bezeichnungssysteme, die zu jeder obigen Theorie T entwickelt werden, ermöglichen es jeder bezeichneten Ordinalzahl α eine Norm $N_T\alpha \in \mathbb{N}$ zuzuordnen. Wir klassifizieren die beweisbar rekursiven Funktionen mit Hilfe schnellwachsender Funktionenhierarchien. Sie werden über den Zugang aus [Buchholz et al. 1994] definiert. $2_x(k)$ bezeichne die iterierte zweier Potenzierung, d.h. es ist $2_0(k) := k$ und $2_{x+1}(k) := 2^{2_x(k)}$. Damit können wir für $\alpha > 0$ die verwendeten Funktionen F_α^T uniform definieren. Die Wahl der Startfunktionen F_0^T differiert bei den untersuchten Theorien[9].

- $\Phi^{\mathrm{PA}}(x) := x$ und für die anderen Theorien T sei
- $\Phi^T(0) := 1$ und $\Phi^T(x) := 2_x(0)$ für $x > 0$.
- $\mathrm{F}_\alpha^T(x) := \max\left(\{\Phi^T(x)\} \cup \{\mathrm{F}_\gamma^T \circ \mathrm{F}_\gamma^T(x) : \gamma < \alpha \;\&\; N_T\gamma \leq \Phi^T(N_T\alpha + x)\}\right)$

Die bewiesenen Hauptsätze zeigen, dass jede Π_2^0–Skolem Funktion einer Theorie $T \in \{\mathrm{PA}, \mathrm{KP}\omega, \mathrm{KPM}, \mathrm{KP}+(\Pi_3\text{–Ref})\}$ von einer Funktion aus der Hierarchie $(\mathrm{F}_\gamma^T)_{\gamma < ||T||}$ majorisiert wird. Unter Hinzunahme von Wohlordungsbeweisen aus der Literatur bekommen wir als Korollar die

Klassifizierung beweisbar rekursiver Funktionen.
Die rekursiven Funktionen, deren Totalität in T bewiesen werden kann, sind genau diejenigen Funktionen, die durch iterierte Anwendung von Substitution, primitiver Rekursion und $(\mathrm{F}_\gamma^T)_{\gamma<||T||}$–beschränktem μ–Operator auf die Funktionen $(x \mapsto 0)$, $(x \mapsto x+1)$ und $(\vec{x} \mapsto x_i)$ erzeugt werden[10].

---

[8]Dies ist nur bei Anwendung in Normalform garantiert. Sie liegt in allen drei Fällen vor.

[9]Es wird $\mathrm{F}_0^{\mathrm{PA}}(x) = 2x+1$, $\mathrm{F}_0^{\mathrm{KP}\,\omega}(x) = \Phi^{\mathrm{KP}\,\omega}(x)$ und $\mathrm{F}_0^T(x) = x+1$ für $T = \mathrm{KPM}$ und $\mathrm{KP}+(\Pi_3\text{-Ref})$ verwendet. Auf das Wachstumsverhalten der Hierarchien als Ganzes hat diese Wahl keinen Einfluss.

[10]Die Definition dieser verallgemeinerten Art von beschränktem μ–Operator wird in Definition 2.16 gegeben.

Die vorgestellte Technik ist universell. Sie lässt sich auch auf andere Theorien ausweiten, für die man eine Ordinalzahlanalyse mit Operator-Technik durchführen kann. Einen Ausblick gibt Abschnitt 9.

1.3 Hinweis zur Rechtschreibung

Ich habe versucht, die Regeln der neuen Rechtschreibung zu befolgen.

1.4 Danksagung

Besonders danken möchte ich Herrn Professor Wolfram Pohlers, dessen begeisternde Art meine Faszination für Beweistheorie geweckt hat. Er hat mich ermutigt, meine Doktorarbeit diesem Thema zu widmen und hat deren Werdegang mit viel Interesse verfolgt. Zusammen mit Herrn Professor Justus Diller schafft er eine angenehme und freundschaftliche Atmosphäre, für die das Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung bekannt ist. HDoz. Dr. Andreas Weiermann hat mich in seine neuen Beweistechniken eingeführt, und mir damit ermöglicht, an einem spannenden Punkt in die Forschung einzusteigen. Er hatte für meine Fragen stets ein offenes Ohr und gute Tips parat. Für Verbesserungsvorschläge danke ich Ingo Lepper, Wolfgang Burr und vor allem Dr. Arnold Beckmann.
Mein herzlicher Dank gilt allen Mitarbeiterinnen, Mitarbeitern und Studierenden des Instituts, in deren Mitte ich mich wohlfühle und mit denen ich gerne zusammenarbeite. Besonders die lebhafte Art von Martina Pfeifer lässt meine Laune am Arbeitsplatz immer steigen.

Kapitel 2

Die beweisbar rekursiven Funktionen von PA

2.1 Introduktion

Ein wichtiges Maß für die Stärke einer Theorie ist die Klasse der rekursiven Funktionen, mit denen man in der Theorie arbeiten kann. Zugriff auf partiell-rekursive Funktionen hat man über Kleenes T–Prädikat. Allerdings kann man in vielen Theorien nur mit einem kleinen Teil der rekursiven Funktionen arbeiten, da die Theorien zu schwach sind, um die Totalität dieser Funktionen zu beweisen.
In diesem Kapitel wird die Klasse der beweisbar rekursiven Funktionen der Peano Arithmetik (PA) charakterisiert. Seit der ersten Lösung dieser Aufgabe durch Georg Kreisel 1952 hat es viele verschiedene Charakterisierungen und Beweise gegeben. Der hier vorgestellte Ansatz (aus [Blankertz et al. 1996]) ist von großer Durchsichtigkeit und auch technisch leicht nachzuvollziehen. Die Beweise werden ausführlich dargestellt und mit viel Motivation ausgestattet. Ein gründliches Verständnis des Beweishergangs bei der Analyse von PA ist nützlich für die Beschäftigung mit den starken Mengensystemen KPM und KP+(Π_3-Reflektion), deren Analyse das Hauptanliegen dieser Arbeit ist.

2.2 Formales Praeludium

Bei der Analyse von PA betrachten wir ausschließlich Ordinalzahlen unterhalb von ε_0. Als Mitteilungszeichen dienen α, β, γ, während mit $k, l, m, \ldots$ endliche Ordinalzahlen bezeichnet werden. Wir schreiben die natürliche Summe von α und β als $\alpha \oplus \beta$. Für jede Ordinalzahl $\alpha < \varepsilon_0$ ist die Norm von α, in Zeichen $N\alpha$, die Anzahl der Auftreten des Zeichens ω in der Cantor-Normalform von α. Es ist also $N0 = 0$ und $N(\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}) = n + N\alpha_1 + \cdots + N\alpha_n$, falls $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ ist.
Die nicht-logischen Zeichen der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ sind die Symbole für alle primitiv-rekursiven Funktionen (dies beinhaltet Konstanten) sowie das Relationszeichen $=$. Terme werden aus den Funktionszeichen und Variablen (einer abzählbaren Liste $x_0, x_1, \ldots$) wie üblich gebildet. Gleichungen und negierte Gleichungen zwischen Termen sind Primformeln. Aus ihnen werden Formeln mit den logischen Operationen $\wedge, \vee, \forall, \exists$ gebildet. Negation wird als ein durch die de Morganschen Regeln definiertes Zeichen behandelt.
Wir bezeichnen mit $\underline{n}$ die Konstante n und mit S die Nachfolgerfunktion. Wir schreiben x, y für beliebige Variablen, r, s, t für Terme, A, B, C für Formeln und Γ, Δ für Formelmengen. $A \to B$ ist eine Abkürzung für $\neg A \vee B$ und $\Gamma, A_1, \ldots, A_n$ für $\Gamma \cup \{A_1, \ldots, A_n\}$ und Γ, Δ für $\Gamma \cup \Delta$.
Als logischen Rahmen benutzen wir einen Tait-Kalkül. Die Axiome von PA sind die Gleichheitsaxiome $\Gamma, t = t$ und $\Gamma, s \neq t, \neg As, At$ für jede atomare Formel A, Nachfolgeraxiome $\Gamma, \mathrm{S}r \neq \mathrm{S}t, r = t$ und $\Gamma, \mathrm{S}t \neq 0$, definierende Gleichungen für alle primitiv-rekursiven Funktionszeichen (siehe [Pohlers 1989]) und das Induktionsschema $\Gamma, A\underline{0} \wedge \forall x\,(Ax \to A(\mathrm{S}x)) \to \forall x\, Ax$ für beliebige Formeln Ax. Die Herleitungsrelation von PA wird wie folgt definiert.

(Ax) $\vdash \Gamma$ falls Γ ein Axiom von PA ist (s.o.)

($\wedge$) $\vdash \Gamma, A_i$ für alle $i<2$ $\Rightarrow$ $\vdash \Gamma, A_0 \wedge A_1$

($\vee$) $\vdash \Gamma, A_i$ für ein $i<2$ $\Rightarrow$ $\vdash \Gamma, A_0 \vee A_1$

($\forall$) $\vdash \Gamma, Ay$ $\Rightarrow$ $\vdash \Gamma, \forall x\, Ax$ falls y nicht in $\Gamma, \forall x\, Ax$ auftritt

($\exists$) $\vdash \Gamma, At$ $\Rightarrow$ $\vdash \Gamma, \exists x\, Ax$

(cut) $\vdash \Gamma, C$ und $\vdash \Gamma, \neg C \quad \Rightarrow \quad \vdash \Gamma.$

Da wir PA in ein System einbetten wollen, in dem Schnitte eliminiert werden können, ordnen wir jeder Formel einen Rang zu.

Definition 2.1 (Rang einer PA–Formel)

- $\mathrm{rk}(A) := 0$ *falls A eine Primformel ist*
- $\mathrm{rk}(A \vee B) := \mathrm{rk}(A \wedge B) := \max\{\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)\} + 1$
- $\mathrm{rk}(\forall x\, Ax) := \mathrm{rk}(\exists x\, Ax) := \mathrm{rk}(Ax) + 1$

2.3 Exposition

Sei T Kleenes T–Prädikat, d.h. $T(\underline{e}, x, y)$ bedeutet, dass y eine Berechnung der Turingmaschine mit Kode e für die Eingabe x kodiert. Wir wollen nun aus einem PA–Beweis der Totalität einer rekursiven Funktion auf uniforme Weise eine majorisierende Funktion aus einer schnellwachsenden Hierarchie bestimmen. Für beweistheoretische Untersuchungen sind Kalküle von Vorteil, die Schnittelimination erlauben. Daher führen wir die folgenden Überlegungen in dem System PA_ω durch, bei dem das Induktionsschema (das Schnittelimination in PA verhindert) mit Hilfe der ω–Regel ($A\underline{n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \vdash \forall x\, Ax$) hergeleitet werden kann. Als Axiome braucht man dann nur wahre Primformeln. Somit greift die übliche Schnitteliminationstechnik. Eine besondere Form eines solchen Systems liegt dieser Untersuchung zugrunde und wird in Definition 2.3 formal eingeführt. In diesem System wird aber gegenüber PA_ω zusätzliche Information in jeder Herleitung gespeichert. Die folgenden Erläuterungen sollen motivieren, warum und wie dies geschieht.
Die Totalität der rekursiven Funktion f mit Index e wird von der Formel $\forall x\, \exists y\, T(\underline{e}, x, y)$ ausgedrückt. (Formal korrekt müsste es in unserem Kalkül $\forall x\, \exists y\, \chi_T(\underline{e}, x, y) = 0$ lauten, da wir nur Funktionszeichen, aber außer der Gleichheit keine Relationszeichen zugelassen haben.) Wenn dieser Satz in PA herleitbar ist, gibt es eine schnittfreie PA_ω–Herleitung, die nur die folgende Gestalt haben kann:

$$\vdash T(\underline{e}, \underline{n}, \underline{fn}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \qquad \text{(wahre Primformel, also Axiom in } \mathrm{PA}_\omega)$$
$$\vdash \exists y\, T(\underline{e}, \underline{n}, y) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$
$$\vdash \forall x\, \exists y\, T(\underline{e}, x, y)$$

Die Information, die wir suchen, steckt nur in der ersten Zeile und geht beim Übergang zur zweiten durch den Existenzschluss verloren. Es ist der funktionale Zusammenhang zwischen dem Numeral $\underline{n}$, das später beim Allschluss eliminiert wird, und dem Numeral $\underline{fn}$, das als Zeuge für den Existenzschluss dient. Um eine Aussage über das Wachstum einer PA–beweisbar totalen Funktion machen zu können, wollen wir diesen Zusammenhang durch eine zusätzliche Bedingung in der Herleitungsrelation kontrollieren. In der beweistheoretischen Analyse imprädikativer Theorien mittels lokaler Prädikativität braucht man zusätzliche Information in der Herleitungsrelation, um die Beweisbäume zu kollabieren und dadurch partielle Schnittelimination zu ermöglichen. Ein elegantes Verfahren hierzu stellen die Operator kontrollierten Herleitungen aus [Buchholz 1991b] dar. Davon inspiriert führen wir für unser Vorhaben ebenfalls Operator kontrollierte Herleitungen ein. Man kann die Kontrolleigenschaft dieser Herleitungsrelation (Lemma 2.7) als Kollabierung ansehen: Die Beschränkung des Quantors $(\exists x{<}\omega\, Ax)$ wird in den endlichen Bereich kollabiert $(\exists x{<}\mathrm{F}(0)\, Ax)$. Zunächst treffen wir folgende Definition.

Definition 2.2 (Operatoren) *Eine monotone Funktion* $\mathrm{F}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit* $2x \le \mathrm{F}(x)$ *nennen wir Operator. Im Folgenden bezeichnen wir mit* F, F' *immer Operatoren. Zu gegebenem* $n \in \mathbb{N}$ *ist der Operator* $\mathrm{F}[n]$ *definiert durch*

$$\mathrm{F}[n] : \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ x \mapsto \mathrm{F}(\max\{x, n\}).$$

Wir schreiben $\mathrm{F}[k_1, \ldots, k_n]$ *für* $\mathrm{F}[k_1] \cdots [k_n]$ *und benutzen die Abkürzungen*

$$\mathrm{F} \le \mathrm{F}' \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x{\in}\mathbb{N} \quad \mathrm{F}(x) \le \mathrm{F}'(x) \quad \textit{und}$$

$$\mathrm{F} < \mathrm{F}' \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x{\in}\mathbb{N} \quad \mathrm{F}(x) < \mathrm{F}'(x).$$

Bei Operator kontrollierten Herleitungen ist jeder Herleitung ein Operator F zugeordnet und innerhalb einer solchen Herleitung wird jede Formelmenge mit einer speziellen Operatorversion $\mathrm{F}[n]$ versehen. Das Ziel besteht darin zu sichern, dass bei einer Herleitung von $\mathrm{F} \vdash \forall x\, \exists y\, A(x, y)$ der Zeuge für den Existenzschluss auf $\exists y\, A(\underline{n}, y)$ unterhalb von $\mathrm{F}(n)$ zu finden ist. Zur Zeit des

Existenzschlusses weiss man freilich noch nicht, welches Numeral der Formel $A(\underline{n}, y)$ im weiteren Verlauf der Herleitung durch einen Allschluss gebunden wird und somit als Argument für die kontrollierende Funktion F dienen soll. Die Herleitungsrelation sollte daher so beschaffen sein, dass die Information, welches Argument bei einem Allschluss gebunden wird, schon bei früheren Herleitungsschritten zur Verfügung steht. Um diese Idee umzusetzen, verfährt man wie folgt: Bei einem Allschluss ($A\underline{n}$ für alle $n{\in}\mathbb{N} \vdash \forall x\, Ax$) geht man vom Operator $\mathrm{F}[n]$ zu F über, ansonsten wird der Operator von Prämisse zu Konklusion übernommen. Die Herleitungsschritte oberhalb $\vdash A\underline{n}$ haben also den Operator $\mathrm{F}[n]$ zur Disposition. Dadurch ist bei einem früheren Existenzschluss die Information bereitgestellt, um den gewünschten Funktionalzusammenhang herzustellen. Um dies zu nutzen fordert man bei einem Existenzschluss ($A\underline{n} \vdash \exists x\, Ax$) mit Operator F, dass die Bedingung $n < \mathrm{F}(0)$ erfüllt ist. An dem obigen Herleitungsbeispiel kann man sehen, warum dies im Zusammenspiel das gewünschte Resultat liefert.

$$\begin{array}{l} \mathrm{F}[n] \vdash T(\underline{e}, \underline{n}, \underline{fn}) \\ \mathrm{F}[n] \vdash \exists y\, T(\underline{e}, \underline{n}, y) \quad \text{falls } f(n) < \mathrm{F}[n](0) = \mathrm{F}(n) \\ \mathrm{F} \vdash \forall x\, \exists y\, T(\underline{e}, x, y) \end{array}$$

Haben wir also eine F–kontrollierte Herleitung der Totalität einer rekursiven Funktion f, so wissen wir, dass diese von der kontrollierenden Funktion F majorisiert wird ($f < F$). Damit haben wir also ein Werkzeug zum Bestimmen von einhüllenden Funktionen.

Wir wollen diejenigen rekursiven Funktionen majorisieren, deren Totalität von PA bewiesen werden kann. Wie man an obiger Herleitung sieht, ist das System PA_ω so stark, dass es die Totalität jeder rekursiven Funktion herleiten kann. Wir sind aber nur an solchen PA_ω–Herleitungen interessiert, die aus der Einbettung von PA–Herleitungen stammen. Eine Funktionen-Hierarchie $\mathcal{F}$ majorisiert die PA–beweisbar totalen Funktionen, falls für jede von PA in PA_ω eingebettete Herleitung eine kontrollierende Funktion aus $\mathcal{F}$ gefunden werden und jede F–kontrollierte Herleitung mit $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ in eine schnittfreie

F′–kontrollierte Herleitung mit $\mathrm{F}' \in \mathcal{F}$ transformiert werden kann. Der Beweisgang sieht wie folgt aus:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PA} \vdash \forall x\, \exists y\, T(\underline{e}, x, y)\\
&\quad\Rightarrow \quad \mathrm{F} \vdash \forall x\, \exists y\, T(\underline{e}, x, y) \quad \text{für ein } \mathrm{F} \in \mathcal{F}\\
&\quad\Rightarrow \quad \mathrm{F}' \vdash_0 \forall x\, \exists y\, T(\underline{e}, x, y) \quad \text{für ein } \mathrm{F}' \in \mathcal{F}\\
&\text{Mittels } \forall\text{–Inversion erhalten wir}\\
&\quad\Rightarrow \quad \mathrm{F}'[n] \vdash_0 \exists y\, T(\underline{e}, \underline{n}, y) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Der letzte Schluss muss ein $(\exists)$–Schluss sein, also ist der Zeuge $< \mathrm{F}'(n)$.
Es gilt[1] somit $\forall n{\in}\mathbb{N}\ \ \{e\}(n) < \mathrm{F}'(n)$.

Natürlich muss noch irgendwo eine Schwierigkeit liegen, denn bisher ist nicht klar, welche Eigenschaft die Hierarchie $\mathcal{F}$ erfüllen muss, um die beweisbar totalen Funktionen von PA einhüllen zu können. Zur Kontrolle der eingebetteten Herleitungen genügen relativ schwach wachsende (nämlich primitiv-rekursive) Funktionen. Die einzige Hürde, die es noch zu nehmen gilt, ist die Schnittelimination. Um das Reduktionslemma oft genug iterieren zu können, nehmen wir noch eine zusätzliche Bedingung in das System der Operator kontrollierten Herleitungen auf und definieren eine Hierarchie über den Buchholz-Cichon-Weiermann-Zugang zu subrekursiven Hierarchien. Mit dieser Hierarchie kann die PA–Analyse durchgeführt werden.

2.4 Durchführung

Wir beginnen mit der für den Beweisgang zentralen Definition. Grundlage für das System der Operator kontrollierten Herleitungen bildet PA_ω. Es werden daher nur geschlossene Formeln betrachtet. Die kontrollierende Funktion dient dazu, die Größe von Existenzbeispielen abzuschätzen und zwar in Abhängigkeit von Numeralen, die später zu Allschlüssen verwendet werden. Um die Schnittelimination durchführen zu können, wird auch Information über die

[1]Diese Argumentation ist etwas gemogelt, aber auch formal korrekt nicht viel schwieriger, wie man im Beweis von Lemma 2.7 sieht.

Herleitungslänge ($N\alpha < \mathrm{F}(0)$) im Operator gespeichert.

Es sei nochmal darauf hingewiesen, dass wir mit F und F′ in jedem Fall Operatoren im Sinne von Definition 2.2 bezeichnen.

Definition 2.3 (Operator kontrollierte Herleitungen)

$$\mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma \quad \textit{gilt, falls } N\alpha < \mathrm{F}(0) \textit{ und einer der folgenden Fälle zutrifft:}$$

(Ax)	$\Gamma \cap \Delta(\mathbb{N}) \neq \varnothing$				
$(\vee)$	$A_0 \vee A_1 \in \Gamma$	&	$\exists i{<}2$	$\exists \alpha_0{<}\alpha$	$\mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha_0}{r}\ \Gamma, A_i$
$(\wedge)$	$A_0 \wedge A_1 \in \Gamma$	&	$\forall i{<}2$	$\exists \alpha_i{<}\alpha$	$\mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha_i}{r}\ \Gamma, A_i$
$(\exists)$	$\exists x\, Ax \in \Gamma$	&	$\exists n{<}\mathrm{F}(0)$	$\exists \alpha_0{<}\alpha$	$\mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha_0}{r}\ \Gamma, A\underline{n}$
$(\forall)$	$\forall x\, Ax \in \Gamma$	&	$\forall n{\in}\mathbb{N}$	$\exists \alpha_n{<}\alpha$	$\mathrm{F}[n]\big|\!\frac{\alpha_n}{r}\ \Gamma, A\underline{n}$
(cut)	$\mathrm{rk}(C) < r$	&		$\exists \alpha_0{<}\alpha$	$\mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha_0}{r}\ \Gamma, (\neg)C$

Dabei haben wir folgende Abkürzungen benutzt:

- $\Delta(\mathbb{N}) = \{A : A \textit{ ist wahre Primformel}\}$
- $\mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma, (\neg)C \quad :\Leftrightarrow \quad \mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma, C \ \ \&\ \ \mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma, \neg C$

Ohne Rückgriff auf spezielle Funktionen, können die folgenden vier Lemmata bewiesen werden.

Lemma 2.4 (Monotonie)
Für $r \leq s\ \ \&\ \ \alpha \leq \beta\ \ \&\ \ N\beta < \mathrm{F}'(0)\ \ \&\ \ \mathrm{F} \leq \mathrm{F}'$ *gilt*

$$\mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}'\big|\!\frac{\beta}{s}\ \Gamma, \Gamma'.$$

Beweis durch Induktion nach α bereitet keine Schwierigkeit.

Lemma 2.5 (Inversion)

(i) $\mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma, \forall x\, Ax \quad \Rightarrow \quad \forall n{\in}\mathbb{N} \quad \mathrm{F}[n]\big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma, A\underline{n}$

(ii) $\mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma, A_0 \wedge A_1 \quad \Rightarrow \quad \forall i{<}2 \quad \mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma, A_i$

(iii) $\mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma, A\ \ \&\ \ \neg A \in \Delta(\mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}\big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma$

Beweis. Alle drei Teile werden leicht mittels Induktion nach α bewiesen. Da im ersten Teil eine Eigenschaft der Operatoren eingeht, soll er gezeigt werden. (i) Ist $\forall x\, Ax$ nicht die Hauptformel des letzten Schlusses, so folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung durch Anwendung eben dieses Schlusses. Andernfalls befinden wir uns in der Situation

$$\mathrm{F}[m] \overset{\alpha_m}{\underset{r}{\vdash}} \Gamma, A\underline{m}, \forall x\, Ax \quad \text{mit } \alpha_m < \alpha \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Die Induktionsvoraussetzung liefert für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{F}[m][n] \overset{\alpha_m}{\underset{r}{\vdash}} \Gamma, A\underline{m}, A\underline{n} \quad \text{mit } \alpha_m < \alpha \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Betrachten wir hiervon nur die Herleitung für $m := n$ und beachten, dass jeder Operator F die Eigenschaft $\mathrm{F}[n][n] = \mathrm{F}[n]$ besitzt, so haben wir

$$\mathrm{F}[n] \overset{\alpha_n}{\underset{r}{\vdash}} \Gamma, A\underline{n}$$

erhellt. Eine Anwendung der Monotonie 2.4 führt von hier zum Ziel. Die Bedingung an die Norm der Herleitungslänge leitet sich einfach aus der entsprechenden Information der gegebenen Herleitung ab: $N\alpha < \mathrm{F}(0) \leq \mathrm{F}[n](0)$

Lemma 2.6 (Reduktion) *Sei C eine Formel $C_0 \vee C_1$ oder $\exists x\, Ax$ von Rang $\leq r$. Für Operatoren $\mathrm{F}' \leq \mathrm{F}$ gilt*

$$\mathrm{F}' \overset{\alpha}{\underset{r}{\vdash}} \Gamma, \neg C \quad \& \quad \mathrm{F} \overset{\beta}{\underset{r}{\vdash}} \Delta, C \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}' {\circ} \mathrm{F} \overset{\alpha + \beta}{\underset{r}{\vdash}} \Gamma, \Delta.$$

Beweis durch Induktion nach β. Interessant ist nur der Fall, dass $C \equiv \exists x\, Ax$ Hauptformel des letzten Schlusses ist. Für ein $n < \mathrm{F}(0)$ haben wir dann

$$\mathrm{F} \overset{\beta_0}{\underset{r}{\vdash}} \Delta, C, A\underline{n} \quad \text{mit } \beta_0 < \beta.$$

Durch die Induktionsvoraussetzung kommen wir zu

$$(1) \quad \mathrm{F}' {\circ} \mathrm{F} \overset{\alpha + \beta_0}{\underset{r}{\vdash}} \Gamma, \Delta, A\underline{n}.$$

Auf die erste der gegebenen Herleitungen wenden wir die Inversion 2.5 (i) an (Teil (ii) braucht man für den Fall $C \equiv C_0 \vee C_1$) und erhalten die Herleitung

$$\mathrm{F}'[n] \Big|\!\frac{\alpha}{r}\ \Gamma, \neg A\underline{n}.$$

Aus der Bedingung $n < \mathrm{F}(0)$ resultiert die Abschätzung $\mathrm{F}'[n] \leq \mathrm{F}' \circ \mathrm{F}$, so dass wir mittels Monotonie ($N(\alpha + \beta_0) < \mathrm{F}' \circ \mathrm{F}(0)$ folgt aus (1))

$$(2) \quad \mathrm{F}' \circ \mathrm{F} \Big|\!\frac{\alpha + \beta_0}{r}\ \Gamma, \Delta, \neg A\underline{n}$$

erlangen. Natürlich gilt $\mathrm{rk}(A\underline{n}) < \mathrm{rk}(\exists x\, Ax) \leq r$. Also steht dem Schneiden der Herleitungen (1) und (2) nichts im Wege. Es muss aber noch geprüft werden, ob der Operator $\mathrm{F}' \circ \mathrm{F}$ die ersehnte Herleitungsschranke $\alpha + \beta$ zulässt. Zu diesem Zweck haben wir jedem Operator das Wachstum $2x \leq \mathrm{F}'(x)$ abverlangt und in die Voraussetzung dieses Lemmas die Bedingung $\mathrm{F}' \leq \mathrm{F}$ aufgenommen. Denn aus den Herleitungen der Voraussetzung folgt $N\alpha < \mathrm{F}'(0)$ und $N\beta < \mathrm{F}(0)$. Mit den benannten Eigenschaften impliziert das $N\alpha + N\beta < \mathrm{F}'(0) + \mathrm{F}(0) \leq 2\mathrm{F}(0) \leq \mathrm{F}' \circ \mathrm{F}(0)$. Damit ist das zu Erweisende erwiesen.

Es folgt die schönste Stelle der Analyse. Die Kontrolleigenschaft der Operator kontrollierten Herleitungen beweist sich fast von selbst.

Lemma 2.7 (Kollabierung)

$$\mathrm{F} \Big|\!\frac{\alpha}{0}\ \exists x\, Ax \quad \& \quad \mathrm{rk}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists n{<}\mathrm{F}(0) \quad \mathbb{N} \models A\underline{n}$$

Beweis durch Induktion nach α. Da die gegebene Herleitung schnittfrei ist, muss der letzte Schluss ein Existenzschluss sein. Also gilt für ein $n < \mathrm{F}(0)$

$$\mathrm{F} \Big|\!\frac{\alpha_0}{0}\ \exists x\, Ax, A\underline{n} \quad \text{mit } \alpha_0 < \alpha.$$

Ist $\mathbb{N} \models A\underline{n}$ der Fall, so sind wir fertig, andernfalls gelangen wir mit Lemma 2.5 (iii) und anschließender Anwendung der Induktionsvoraussetzung zum Ziel.

Bei der Einbettung einer in PA hergeleiteten Satzmenge erhält man, wie bei der Einbettung in PA_ω, im allgemeinen eine unendliche Herleitungslänge α und einen beliebig großen endlichen Schnittgrad. (Eine unendliche Herleitungslänge wird benötigt, um das Induktionsschema herzuleiten.) Um den Schnittgrad einer solchen Herleitung auch nur um einen Punkt zu senken, muss im schlimmsten Fall das Reduktionslemma α–fach iteriert werden und damit der Kontrolloperator α–mal auf sich selbst angewendet werden. Da dies für beliebige Funktionen keinen Sinn macht, müssen wir an dieser Stelle dazu übergehen, eine spezielle Hierarchie zu betrachten, die eine α–fache Iteration (für $\alpha < \varepsilon_0$) zulässt. Der folgende Zugang zu subrekursiven Hierarchien stammt von Wilfried Buchholz, Adam Cichon und Andreas Weiermann, siehe [Buchholz et al. 1994].

Definition 2.8

- $\alpha \lhd_x^1 \gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha < \gamma \ \& \ N\alpha \leq N\gamma + x$
- $\mathrm{F}_\gamma(x) := \max\left(\{2x+1\} \cup \{F_\alpha \circ \mathrm{F}_\alpha(x) \, : \, \alpha \lhd_x^1 \gamma\}\right)$

Das Maximum ist definiert, da die Norm N die Eigenschaft

$$\mathrm{card}\,\{\alpha < \varepsilon_0 \, : \, N\alpha < k\} < \omega$$

besitzt.

Im Folgenden wird der Nachweis erbracht werden, dass die Hierarchie $(\mathrm{F}_\alpha)_{\alpha<\varepsilon_0}$ die beweisbar rekursiven Funktionen von PA majorisiert. Dass diese Hierarchie äquivalent zu den ε_0–rekursiven Funktionen (bzw. den *ordinal recursive functions* von Georg Kreisel, siehe [Kreisel 1952]) ist, folgt aus [Wainer 1970] und [Buchholz et al. 1994].
Die Eigenschaften, die von der Hierarchie für die weitere Analyse benötigt werden, fasst folgendes Lemma zusammen.

Lemma 2.9 (Eigenschaften von F_γ)

(i) $x < \mathrm{F}_\gamma(x) < \mathrm{F}_\gamma(x+1)$

(ii) $\mathrm{F}_\gamma < \mathrm{F}_\gamma \circ \mathrm{F}_\gamma \leq \mathrm{F}_{\gamma+1}$, *insbesondere gilt* $n < \mathrm{F}_n(0)$.

(iii) $\alpha \lhd_n^1 \gamma \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}_\alpha[n] < \mathrm{F}_\gamma[n]$

(iv) *Jede Funktion* F_α *ist ein Operator.*

(v) *Zu jeder primitiv-rekursiven Funktion* f *gibt es ein* $p < \omega$ *mit* $\forall \vec{k} \in \mathbb{N}\; f(\vec{k}) < \mathrm{F}_{\omega \cdot p}(\max \vec{k})$.

(vi) $N\alpha < \mathrm{F}_\alpha(0)$

(vii) $k < \mathrm{F}_\gamma(n) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}_\gamma[n,k] \leq \mathrm{F}_{\gamma+1}[n]$

(viii) $\alpha_0 < \alpha \;\&\; N\alpha_0 < \mathrm{F}_\gamma(n) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha_0 + 2}[n] \leq \mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha + 1}[n]$

Beweis. (i) und (iv) sind klar nach Definition. (v) lässt sich induktiv nach der Gestalt der Funktion f zeigen (entlang der induktiven Definition primitiv-rekursiver Funktionen).

(ii) $\mathrm{F}_\gamma < \mathrm{F}_\gamma \circ \mathrm{F}_\gamma$ folgt aus (i): $x < \mathrm{F}_\gamma(x)$. Für alle x gilt $\gamma \lhd_x^1 \gamma + 1$, so dass $\mathrm{F}_\gamma \circ \mathrm{F}_\gamma(x) \leq \mathrm{F}_{\gamma+1}(x)$ nach Definition erfüllt ist. Damit folgt $0 < \mathrm{F}_0(0) < \mathrm{F}_1(0) < \cdots$, also $n < \mathrm{F}_n(0)$.

(iii) folgt mit $\mathrm{F}_\alpha < \mathrm{F}_\alpha \circ \mathrm{F}_\alpha$ aus der Definition.

(vi) Es ist $N\alpha \trianglelefteq_0^1 \alpha$, also folgt mit (ii) und (iii) $N\alpha < \mathrm{F}_{N\alpha}(0) \leq \mathrm{F}_\alpha(0)$.

(vii) $k < \mathrm{F}_\gamma(n)$ ergibt mit den Abschätzungen $x < \mathrm{F}_\gamma(x)$ und $\mathrm{F}_\gamma \circ \mathrm{F}_\gamma \leq \mathrm{F}_{\gamma+1}$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_\gamma[n,k](x) = \mathrm{F}_\gamma(\max\{n,k,x\}) &< \mathrm{F}_\gamma(\mathrm{F}_\gamma(\max\{n,x\})) \\ &\leq \mathrm{F}_{\gamma+1}(\max\{n,x\}). \end{aligned}$$

(viii) Ist $\alpha = \alpha_0 + m$ für ein $m \geq 1$, so folgt die Behauptung, da in diesem Fall $\gamma \oplus \alpha_0 + 2 \trianglelefteq_0^1 \gamma \oplus \alpha + 1$ gilt und mit (iii) auf $\mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha_0 + 2}[n] \leq \mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha + 1}[n]$ für beliebiges n geschlossen werden kann. Nehmen wir also

(1) $\quad \gamma \oplus \alpha_0 + 2 < \gamma \oplus \alpha$

an. Aus der Voraussetzung $N\alpha_0 < \mathrm{F}_\gamma(n)$ folgt wegen $\mathrm{F}_\gamma \leq \mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha}$ und $N\alpha > 0$

(2) $\quad N(\gamma \oplus \alpha_0 + 2) \leq N\gamma + \mathrm{F}_\gamma(n) + 1 \leq N(\gamma \oplus \alpha) + \mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha}(n).$

Aus (1) und (2) ergibt sich mittels (iii) $\mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha_0 + 2}[\mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha}(n)] < \mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha}[\mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha}(n)]$. Mit den Monotonieeigenschaften aus (i) und (ii) zieht dies

$$\mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha_0 + 2}[n] \leq \mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha_0 + 2}[\mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha}(n)] < \mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha} \circ \mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha}[n] \leq \mathrm{F}_{\gamma \oplus \alpha + 1}[n]$$

nach sich.

Korollar 2.10

$$\mathrm{F}_\gamma[n]\Big|\frac{\alpha}{r}\ \Gamma,(\neg)C \quad \& \quad \mathrm{rk}(C)\leq r \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}_{\gamma+1}[n]\Big|\frac{\alpha\cdot 2}{r}\ \Gamma$$

Beweis. Ist C eine Primformel, so folgt die Aussage aus Lemma 2.5 (iii) im Verein mit der Monotonie $\mathrm{F}_\gamma \leq \mathrm{F}_{\gamma+1}$ und $N(\alpha\cdot 2) = 2N\alpha < 2\mathrm{F}_\gamma(n) \leq \mathrm{F}_\gamma{\circ}\mathrm{F}_\gamma(n) \leq \mathrm{F}_{\gamma+1}(n)$ (Lemma 2.9 (iv) und (ii)). Andernfalls ist die Aussage ein Korollar zum Reduktionslemma 2.6, wobei ebenfalls die Monotonie $\mathrm{F}_\gamma{\circ}\mathrm{F}_\gamma \leq \mathrm{F}_{\gamma+1}$ zu Hilfe kommt.

Lemma 2.11 (Schnittelimination)

$$\mathrm{F}_\gamma[n]\Big|\frac{\alpha}{r+1}\ \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}_{\gamma\oplus\alpha+1}[n]\Big|\frac{\omega^\alpha}{r}\ \Gamma$$

Beweis durch Induktion nach α. Interessant ist nur der Fall, dass als letzter Schluss in der gegebenen Herleitung ein Schnitt vorliegt. Es gilt also

$$\mathrm{F}_\gamma[n]\Big|\frac{\alpha_0}{r+1}\ \Gamma,(\neg)C \quad \text{mit } \alpha_0<\alpha$$

für ein C von Rang $\leq r$. Die Induktionsvoraussetzung führt zu

$$\mathrm{F}_{\gamma\oplus\alpha_0+1}[n]\Big|\frac{\omega^{\alpha_0}}{r}\ \Gamma,(\neg)C.$$

Um die Schnittregel zu umgehen, setzen wir an dieser Stelle das Korollar zum Reduktionslemma 2.10 ein.

$$\mathrm{F}_{\gamma\oplus\alpha_0+2}[n]\Big|\frac{\omega^{\alpha_0}\cdot 2}{r}\ \Gamma$$

Wegen $\omega^{\alpha_0}\cdot 2 < \omega^\alpha$ und $N\omega^\alpha = N\alpha+1 < \mathrm{F}_{\gamma\oplus\alpha+1}(n)$ (nach Lemma 2.9 (vi)) stehen die Chancen gut, mittels Monotonie den Beweis zum Abschluss zu bringen. Um allerdings mit dem Operator auf die behauptete Gestalt zu kommen, geht die stärkste Eigenschaft der Funktionenhierarchie ein. Auch ist dies die einzige Stelle, an der die Bedingung $N\alpha < \mathrm{F}(0)$ der Operator kontrollierten Herleitungen benötigt wird. Da die Rechenarbeit schon geleistet ist, genügt es auf Lemma 2.9 (viii) zu verweisen.

Als letztes fehlendes Glied ist noch die Einbettung von PA in das System der Operator kontrollierten Herleitungen zu leisten. Dabei läuft fast alles wie bei der bekannten Einbettung in PA_ω (z.B. in [Pohlers 1989]). Der Einschränkung beim Existenzschluss braucht lediglich bei der Einbettung des Induktionsschemas und des Existenzschlusses Aufmerksamkeit gewidmet zu werden.

Definition 2.12

- $A \sim A' \quad :\Leftrightarrow \quad$ *es gibt eine Formel B und paarweise verschiedene Variablen $x_0, \ldots, x_n$, sowie geschlossene Terme $s_0, t_0, \ldots, s_n, t_n$, so dass $s_i^{\mathbb{N}} = t_i^{\mathbb{N}}$ für $i \leq n$ gilt und $A \equiv B_{x_0,\ldots,x_n}(t_0, \ldots, t_n)$, $A' \equiv B_{x_0,\ldots,x_n}(s_0, \ldots, s_n)$.*

Lemma 2.13 (Tautologie und Einbettung der math. Axiome)

(i) $A \sim A' \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}_k \vert\!\frac{k}{0}\; A, \neg A' \quad$ *mit* $k := 2 \cdot \mathrm{rk}(A)$

(ii) *Für jede Formel A mit $FV(A) \subseteq \{x\}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit*
$\mathrm{F}_k \vert\!\frac{\omega + 3}{0}\; A(\underline{0}) \wedge \forall x(Ax \to A(\mathrm{S}x)) \to \forall x\, Ax.$

(iii) *Für jedes andere math. Axiom A von PA gibt es ein $k < \omega$ mit* $\mathrm{F}_k \vert\!\frac{k}{0}\; A$.

Beweis. (i) durch Induktion nach $\mathrm{rk}(A)$. Ist A eine Primformel, so auch A' und wegen $A \sim A'$ ist $A, \neg A' \cap \Delta(\mathbb{N}) \neq \emptyset$, d.h. es gilt $\mathrm{F}_0 \vert\!\frac{0}{0}\; A, \neg A'$. Ist $A \equiv \forall x\, Bx$, so gilt für $k := 2 \cdot \mathrm{rk}(Bx)$ nach Induktionsvoraussetzung

$$\mathrm{F}_k \vert\!\frac{k}{0}\; B\underline{n}, \neg B'\underline{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir können den Operator auf $\mathrm{F}_{k+2}[n]$ erhöhen, was uns erlaubt ($n < \mathrm{F}_{k+2}(n)$, Lemma 2.9 (i)) mit einem Existenzschluss auf

$$F_{k+2}[n] \vert\!\frac{k+1}{0}\; B\underline{n}, \exists x \neg B'x$$

zu schließen. Ein Allschluss liefert die Behauptung unter Berücksichtigung von $Nk + 2 < \mathrm{F}_{k+2}(0)$ aus Lemma 2.9 (ii).

(iii) Da in unserer Formulierung alle mathematischen Axiome von PA außer

der Induktion nur atomare Hauptformeln enthalten, kann deren Einbettung durch Anwendung von (Ax) erfolgen.
(ii) Sei $k := 2 \cdot \mathrm{rk}(Ax)$. Wir zeigen durch Induktion nach n:

$$(*) \quad \mathrm{F}_k[n] \Big|\frac{k+2n}{0} \; \neg A\underline{0}, \neg\forall x\,(Ax \to A(\mathrm{S}x)), A\underline{n}$$

$n = 0$: Teil (i) liefert $\mathrm{F}_k |\frac{k}{0}\; \neg A\underline{0}, A\underline{0}$.
$n \rightsquigarrow n+1$: Mittels Teil (i) haben wir $\mathrm{F}_k |\frac{k}{0}\; \neg A(\mathrm{S}\underline{n}), A(\underline{n+1})$. Wir verbinden dies mit der Herleitung, die wir aus der Induktionsvoraussetzung erhalten mittels ($\wedge$) zu

$$\mathrm{F}_k[n] \Big|\frac{k+2n+1}{0} \; \neg A\underline{0}, \neg\forall x\,(Ax \to A(\mathrm{S}x)), A(\underline{n}) \wedge \neg A(\mathrm{S}\underline{n}), A(\underline{n+1}).$$

Hieraus folgt ($*$) durch eine Anwendung von ($\exists$). Die Bedingung an den Zeugen ist durch $n < \mathrm{F}_k(n)$ erfüllt. Die Behauptung des Lemmas folgt aus ($*$) mit ($\forall$) gefolgt von drei Anwendungen von ($\vee$).

Lemma 2.14 (Einbettung von PA) *Für jedes* $\Gamma(\vec{x})$ *das* $\mathrm{PA} \vdash \Gamma(\vec{x})$ *und* $FV(\Gamma(\vec{x})) \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ *erfüllt, gibt es* $\gamma < \omega^2$, $\alpha < \omega \cdot 2$ *und* $r < \omega$, *so dass*

$$\forall \vec{n} \in \mathbb{N}^m \quad \mathrm{F}_\gamma[\vec{n}] \Big|\frac{\alpha}{r} \; \Gamma(\underline{\vec{n}})$$

gilt.

Beweis durch Induktion nach einer PA–Herleitung von Γ in einem Tait-Kalkül.
1. $\forall x\, A(x, \vec{x}) \in \Gamma(\vec{x})$ und Γ wurde abgeleitet aus $\Gamma(\vec{x}), A(y, \vec{x})$ und es gilt $y \notin \{x_1, \ldots, x_m\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $\gamma < \omega^2$, $\alpha < \omega \cdot 2$ und $r < \omega$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}\; \forall \vec{n} \in \mathbb{N}^m \quad \mathrm{F}_\gamma[n, \vec{n}] \Big|\frac{\alpha}{r} \; \Gamma(\underline{\vec{n}}), A(\underline{n}, \underline{\vec{n}}).$$

Die Behauptung folgt mit ($\forall$), da $\mathrm{F}_\gamma[n, \vec{n}] = \mathrm{F}_\gamma[\vec{n}][n]$ ist.
2. $\exists x\, A(x, \vec{x}) \in \Gamma(\vec{x})$ und Γ wurde abgeleitet aus $\Gamma(\vec{x}), A(t(\vec{x}), \vec{x})$. Wir können $x \notin \{x_1, \ldots .x_m\}$ und $FV(t) \subseteq \{x_1, \ldots .x_m\}$ annehmen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $\gamma < \omega^2$, $\alpha_0 < \omega \cdot 2$ und $r_0 < \omega$ mit

$$(3) \quad \forall \vec{n} \in \mathbb{N}^m \quad \mathrm{F}_\gamma[\vec{n}] \Big|\frac{\alpha_0}{r_0} \; \Gamma(\underline{\vec{n}}), A(t(\underline{\vec{n}}), \underline{\vec{n}}).$$

Lemma 2.13 (i) liefert ein $k < \omega$ mit

$$(4) \quad \forall \vec{n} \in \mathbb{N}^m \quad \mathrm{F}_k \left|\frac{k}{0}\right. A(\underline{t^{\mathbb{N}}(\vec{n})}, \underline{\vec{n}}), \neg A(t(\underline{\vec{n}}), \underline{\vec{n}}).$$

Da $\lambda \vec{x}.t^{\mathbb{N}}(\vec{x})$ eine primitiv-rekursive Funktion ist, gibt es nach Lemma 2.9 (v) ein $p < \omega$, für welches $\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^m \quad t^{\mathbb{N}}(\vec{x}) < \mathrm{F}_{\omega \cdot p}(\max \vec{x})$ erfüllt ist. Indem wir $p > k$ wählen, bekommen wir $\mathrm{F}_k \leq \mathrm{F}_{\gamma \oplus \omega \cdot p}[\vec{n}]$ mit Hilfe von Lemma 2.9 (iii). Für $\alpha := \max\{\alpha_0, k\}$ und $r > \max\{r_0, \mathrm{rk}(A)\}$ erhalten wir

$$\forall \vec{n} \in \mathbb{N}^m \quad \mathrm{F}_{\gamma \oplus \omega \cdot p}[\vec{n}] \left|\frac{\alpha}{r}\right. \Gamma(\vec{n}), A(\underline{t^{\mathbb{N}}(\vec{n})}, \underline{\vec{n}}), (\neg)A(t(\underline{\vec{n}}), \underline{\vec{n}})$$

aus (3) und (4) mit Monotonie. Ein Schnitt liefert

$$\forall \vec{n} \in \mathbb{N}^m \quad \mathrm{F}_{\gamma \oplus \omega \cdot p}[\vec{n}] \left|\frac{\alpha + 1}{r}\right. \Gamma(\vec{n}), A(\underline{t^{\mathbb{N}}(\vec{n})}, \underline{\vec{n}})$$

und mit ($\exists$) folgt wegen $t^{\mathbb{N}}(\vec{n}) < \mathrm{F}_{\gamma \oplus \omega \cdot p}(\vec{n})$ die Behauptung.

3. Γ wurde aus Γ, C und $\Gamma, \neg C$ mit einem Schnitt hergeleitet. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $\gamma < \omega^2$, $\alpha < \omega \cdot 2$ und $r < \omega$, so dass

$$\forall \vec{n} \in \mathbb{N}^m \quad \mathrm{F}_\gamma[\vec{n}] \left|\frac{\alpha}{r}\right. \Gamma(\underline{\vec{n}}), (\neg)C(\underline{\vec{n}}, \underline{\vec{0}})$$

gilt. Wir wählen $r > \mathrm{rk}(C)$, um mit (cut) zur Behauptung zu gelangen.

4. Die restlichen Fälle werden von Lemma 2.13 abgedeckt oder sind leicht (Regeln für $\vee$ und $\wedge$).

Satz 2.15 (Hauptsatz) *Sei A eine Primformel mit $FV(A) \subseteq \{x, y\}$ für die* PA $\vdash \forall x\, \exists y\, A(x, y)$ *gilt. Dann gibt es ein $\gamma < \varepsilon_0$ mit*

$$\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y < \mathrm{F}_\gamma(x) \quad \mathbb{N} \models A(\underline{x}, \underline{y}).$$

Beweis durch Einbettung 2.14, iterierte Schnittelimination 2.11, Inversion 2.5 (i) und Kollabierung 2.7.

Definition 2.16 *Wir sagen f ist definiert durch Anwendung eines $(\mathrm{F}_\gamma)_{\gamma<\tau}$–beschränkten μ–Operators auf g, falls $f(x) \simeq \mu y < \mathrm{F}_\gamma(x).g(x, y)$ für ein $\gamma < \tau$ ist.*

Korollar 2.17 (Die beweisbar rekursiven Funktionen von PA)
Die rekursiven Funktionen, deren Totalität in PA *bewiesen werden kann, sind genau diejenigen Funktionen, die durch iterierte Anwendung von Substitution, primitiver Rekursion und* $(\mathrm{F}_\gamma)_{\gamma<\varepsilon_0}$*–beschränktem* μ*–Operator auf die Funktionen* $(x \mapsto 0)$, $(x \mapsto x+1)$ *und* $(\vec{x} \mapsto x_i)$ *erzeugt werden.*

Beweis. Die Tatsache, dass die Totalität all dieser Funktionen in PA bewiesen werden kann, folgt daraus, dass man für jedes $\gamma < \varepsilon_0$ eine (primitiv-rekursive) Ordnung hat, deren Fundierung PA beweist (siehe [Pohlers 1989]) und mit deren Hilfe man daher die Funktionen F_γ definieren kann.
Sei e ein Index einer rekursiven Funktion, deren Totalität von PA bewiesen werden kann, d.h. es gilt PA$\vdash \forall x\, \exists y\, \chi_T(\underline{e}, x, y) = 0$. Mit dem Hauptsatz 2.15 folgt $\forall x{\in}\mathbb{N}\, \exists y{<}\mathrm{F}_\gamma(x) \quad \mathbb{N} \models T(\underline{e}, \underline{x}, \underline{y})$ für ein $\gamma < \varepsilon_0$. Da der Funktionswert in der Berechnung y kodiert ist, gilt $\{e\}(x) < y$ und damit $\{e\}(x) < \mathrm{F}_\gamma(x)$. Es ist also

$$\{e\}(x) = \mu y{<}\mathrm{F}_\gamma(x).\chi_T(e, x, y) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{N}.$$

χ_T ist als primitiv-rekursive Funktion in der behaupteten Klasse, also auch $\{e\}$.

2.5 Koda

Mit dem nächsten Kapitel beginnt die Analyse der Theorien KPM und KP+(Π_3–Ref). Wer den mächtigen Schritt von PA zu KPM scheut, kann sich zunächst der Untersuchung von KPω im Anhang A zuwenden. Wie in der Einleitung beschrieben, stellt die Art des Operatoreinsatzes zur Kontrolle beweisbar rekursiver Funktionen bei der Analyse von KPω einen Zwischenschritt auf dem Weg von PA zu KPM dar.

Kapitel 3

Ordinalzahlen und Hierarchien

In diesem Kapitel stellen wir die Ordinalzahlbezeichnungssysteme $\mathrm{T}(M)$ und $\mathrm{T}(\mathcal{K})$ für die Analysen der Mengentheorien KPM und KP+(Π_3–Ref) bereit. Da sie in [Buchholz 1991b] bzw. [Rathjen 1994b] ausführlich entwickelt werden, können die meisten Ergebnisse zitiert werden.
Um die Formalitäten möglichst gering zu halten, benutzen wir in dieser Arbeit als Ordinalzahlbezeichnungssystem kein Termsystem, sondern eine Menge von Ordinalzahlen, wobei jedes Element dieser Menge eine eindeutige Normalform in einer endlichen Menge von Konstanten und Funktionen besitzt. Dadurch kann man bei jeder solchen Ordinalzahl in eindeutiger Weise von einer Termdarstellung sprechen. Auf diese Darstellung greifen wir zurück, um jeder Ordinalzahl eine Norm zuzuordnen. Eine Aussage der Art „$\psi_\kappa\alpha$ ist in Normalform“ besagt, dass die Anwendung der Funktion ψ_κ auf das Argument α die Normalformbedingung erfüllt.
Seien ON, LIM, AP, EPS, SC die Klassen der Ordinalzahlen, der Limeszahlen, der additiven Hauptzahlen, der Epsilonzahlen und der stark kritischen Ordinalzahlen. $\lambda\xi.\varepsilon_\xi$ sei die Aufzählungsfunktion der Epsilonzahlen. Für die natürliche Summe der Ordinalzahlen α und β schreiben wir $\alpha \oplus \beta$. φ bezeichnet die Veblen Funktion (d.h. $\lambda\xi.\varphi\alpha\xi$ ist die Aufzählungsfunktion der Klasse $\{\lambda \in \mathrm{AP} : \forall\rho{<}\alpha\ \varphi\rho\lambda = \lambda\}$) und $\lambda\xi.\aleph_\xi$ die Aufzählungsfunktion der unendlichen Kardinalzahlen. Ω steht abkürzend für $\aleph_1$, bzw. für Ω_1 mit Definition

3.2.
Additive Hauptzahlen, die nicht stark kritisch sind, haben eine eindeutige Darstellung $\varphi\alpha\beta$ mit $\alpha, \beta < \varphi\alpha\beta$. Daher lassen sich die stark kritischen Anteile einer Ordinalzahl γ wie folgt definieren.

- $\mathrm{SC}(0) := \emptyset$
- $\mathrm{SC}(\gamma) := \{\gamma\}$ falls $\gamma \in \mathrm{SC}$
- $\mathrm{SC}(\gamma_0 + \cdots + \gamma_n) := \mathrm{SC}(\gamma_0) \cup \cdots \cup \mathrm{SC}(\gamma_n)$ falls $n > 0$ & $\gamma_0 \geq \cdots \geq \gamma_n$ & $\forall i{\leq}n\,(\gamma_i \in \mathrm{AP})$
- $\mathrm{SC}(\varphi\alpha\beta) := \mathrm{SC}(\alpha) \cup \mathrm{SC}(\beta)$ falls $\alpha, \beta < \varphi\alpha\beta$

Außerdem setzen wir zur Abkürzung

- $\mathrm{SC}\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} := \mathrm{SC}(\gamma_1) \cup \cdots \cup \mathrm{SC}(\gamma_n)$
- $\mathrm{SC}_\kappa(\gamma) := \mathrm{SC}(\gamma) \cap \kappa$

Lemma 3.1

$\varphi\alpha\beta < \varphi\gamma\delta \quad \Leftrightarrow$

- $\alpha < \gamma$ & $\beta < \varphi\gamma\delta$ *oder*
- $\alpha = \gamma$ & $\beta < \delta$ *oder*
- $\gamma < \alpha$ & $\varphi\alpha\beta < \delta$

Definition 3.2

- $\mathrm{REG} := \{\alpha : \alpha \textit{ regulär } \& \ \alpha > \omega\}$
- $\alpha^\Gamma := \min\{\gamma \in \mathrm{SC} : \alpha < \gamma\}$
- $\Omega_0 := 0,\ \Omega_\sigma := \aleph_\sigma$ *für* $\sigma > 0$

Abkürzung. ω^α steht für $\varphi 0\alpha$. Des Weiteren sei $w_0(\alpha) := \alpha$ und $\omega_{n+1}(\alpha) := \omega^{\omega_n(\alpha)}$. Analog ist $2_n(x)$ als Iteration der Funktion $(x \mapsto 2^x)$ definiert.

Definition 3.3 *Sei* $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{ON}$. *Eine Norm für* T *ist eine Funktion* $N : \mathrm{T} \mapsto \omega$ *mit folgenden Eigenschaften.*

- $N(0) := 0$
- $N(\alpha \oplus \beta) = N(\alpha) + N(\beta)$
- $N(\varphi\rho\alpha) = N(\rho) + N(\alpha) + 1$ *falls* $\rho, \alpha < \varphi\rho\alpha$
- $\mathrm{card}\{\alpha \in \mathrm{T} : N(\alpha) < k\} < \omega$ *für jedes* $k < \omega$

3.1 Das Bezeichnungssystem T(M)

Zur Entwicklung des Ordinalzahlbezeichnungssystems für die Analyse der Theorie KPM setzen wir die Existenz einer Mahlo Kardinalzahl voraus. Sei M eine solche. Mit erheblich größerem Aufwand kann man dies Bezeichnungssystem auch allein mit Hilfe einer rekursiven Mahlo Kardinalzahl errichten. Dies geschieht in [Rathjen 1994a] und kann mit der Technik aus [Schlüter 1997] erreicht werden.

Konvention. κ und π bezeichnen immer Elemente von $\mathrm{REG}^{\leq M}$, d.h. reguläre, überabzählbare Kardinalzahlen, die kleiner oder gleich M sind.

Definition 3.4
Durch simultane Rekursion nach α *werden Ordinalzahlen* $\psi_\kappa\alpha$ *und Mengen* $\mathrm{C}(\alpha,\beta) \subseteq \mathrm{ON}$ *definiert.*

- $\mathrm{C}(\alpha,\beta)$ *ist der Abschluss von* $\beta \cup \{0, M\}$ *unter den Funktionen* $+,\ \varphi,\ (\xi \mapsto \Omega_\xi)_{\xi<M}$ *und* $(\pi, \xi \in \mathrm{C}(\xi, \psi_\pi\xi) \mapsto \psi_\pi\xi)_{\xi<\alpha}$.
- $\mathcal{D}_\kappa(\alpha) := \begin{cases} \{\beta \in \mathrm{REG} :\ \alpha \in \mathrm{C}(\alpha, M) \Rightarrow \alpha \in \mathrm{C}(\alpha,\beta)\} & \textit{falls } \kappa = M \\ \{\beta :\ \kappa \in \mathrm{C}(\alpha,\kappa) \Rightarrow \kappa \in \mathrm{C}(\alpha,\beta)\} & \textit{falls } \kappa < M \end{cases}$
- $\psi_\kappa\alpha :=\ \min\{\beta \in \mathcal{D}_\kappa(\alpha) :\ \mathrm{C}(\alpha,\beta) \cap \kappa \subseteq \beta\}$

Zur Abkürzung sei

- $\mathrm{C}_\kappa(\alpha) :=\ \mathrm{C}(\alpha, \psi_\kappa\alpha)$

Definition 3.5 (Ordinalzahlbezeichnungssystem T(M))
Wir definieren induktiv eine Menge $\mathrm{T}(M) \subseteq \mathrm{ON}$.

- $0, M \in \mathrm{T}(M)$
- $\alpha, \beta, \rho, \xi \in \mathrm{T}(M)\ \ \&\ \ \rho, \xi < M \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta,\ \omega^\alpha,\ \varphi\rho\xi,\ \Omega_\xi \in \mathrm{T}(M)$
- $\kappa, \alpha \in \mathrm{T}(M) \cap \mathrm{C}_\kappa(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \psi_\kappa\alpha \in \mathrm{T}(M)$

Satz 3.6

(i) $\mathrm{T}(M) \subseteq \mathrm{C}(\varepsilon_{M+1}, 0) \cap \varepsilon_{M+1}$

(ii) $\mathrm{T}(M) \cap \Omega \subseteq \psi_\Omega \varepsilon_{M+1}$

Beweis. (i) Da die Kollabierungsfunktionen nur Werte $\leq M$ annehmen und die Funktionen $(\xi \mapsto \Omega_\xi)$ und $(\rho\xi \mapsto \varphi\rho\xi)$ für $\rho > 0$ in $\mathrm{T}(M)$ nur auf Werte $< M$ angewendet werden dürfen, gilt $\mathrm{T}(M) \subseteq \varepsilon_{M+1}$. Daraus folgt durch einen Vergleich der Definition von $\mathrm{T}(M)$ mit derjenigen der C–Menge $\mathrm{T}(M) \subseteq \mathrm{C}(\varepsilon_{M+1}, 0)$.
(ii) Mit (i) folgt $\mathrm{T}(M) \cap \Omega \subseteq \mathrm{C}(\varepsilon_{M+1}, 0) \cap \Omega \subseteq \mathrm{C}_\Omega(\varepsilon_{M+1}) \cap \Omega \subseteq \psi_\Omega(\varepsilon_{\mathrm{M}+1})$.

Definition 3.7 (Normalform von Ordinalzahltermen)

- $\alpha =_{\mathrm{NF}} \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n \;\&\; \alpha > \alpha_0 \geq \cdots \geq \alpha_n \;\&\; \forall i{\leq}n\,(\alpha_i \in \mathrm{AP})$
- $\gamma =_{\mathrm{NF}} \varphi\alpha\beta \quad :\Leftrightarrow \quad \gamma = \varphi\alpha\beta \;\&\; \alpha, \beta < \gamma$
- $\mu =_{\mathrm{NF}} \Omega_\sigma \quad :\Leftrightarrow \quad \mu = \Omega_\sigma \;\&\; \sigma < \mu$
- $\gamma =_{\mathrm{NF}} \psi_\kappa\alpha \quad :\Leftrightarrow \quad \gamma = \psi_\kappa\alpha \;\&\; \kappa, \alpha \in \mathrm{C}_\kappa(\alpha)$

Der folgende Satz zeigt, dass diese Definitionen ein Ordinalzahlbezeichnungssystem zur Verfügung stellen. Damit nehmen wir ein Ergebnis vorweg, dass sich erst mit Hilfe der folgenden Lemmata beweisen lässt.

Satz 3.8 *Jede Ordinalzahl in* $\mathrm{T}(M)$ *hat eine eindeutige Normalform-Termdarstellung in den Symbolen* 0, M, $+$, φ, Ω, ψ.

Beweis. Diese Aussage folgt aus den Teilen (i), (ii) der Lemmata 3.10 und 3.11 und (ii), (iii) von Lemma 3.12.

Bei der Analyse von KPM bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben nur Elemente von $\mathrm{T}(M)$.

Lemma 3.9

(i) $\alpha \leq \alpha'$ & $\beta \leq \beta' \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C}(\alpha,\beta) \subseteq \mathrm{C}(\alpha',\beta')$

(ii) $\gamma \in \mathrm{C}(\alpha,\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{SC}(\gamma) \in \mathrm{C}(\alpha,\beta)$

(iii) $\Omega_\sigma \in \mathrm{C}(\alpha,\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \in \mathrm{C}(\alpha,\beta)$ *für* $\sigma < M$

Beweis. (i) ist offensichtlich und (ii) und (iii) sind in [Buchholz 1991a], Lemma 1.4 a) und b) ausgeführt.

Lemma 3.10

(i) $\mathrm{C}_M(\alpha) \cap M = \psi_M\alpha \in \{\kappa \in \mathrm{REG} : \Omega_\kappa = \kappa\}$

(ii) $\psi_M\alpha < M$ & $\alpha \in \mathrm{C}_M(\alpha)$

(iii) $\psi_M\alpha < \psi_M\beta \quad \Leftrightarrow$
- $\alpha < \beta$ & $\alpha \in \mathrm{C}_M(\beta)$ *oder*
- $\beta < \alpha$ & $\beta \notin \mathrm{C}_M(\alpha)$

(iv) $\beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_M(\gamma+1) \leq \psi_M(\gamma \oplus \beta)$ & $\mathrm{C}_M(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}_M(\gamma \oplus \beta)$

Beweise von (i)–(iii) sind in [Buchholz 1991b], Lemma 1.3 a), c), e) und Lemma 1.5 a).

(iv) Es ist $\gamma \oplus \beta \in \mathrm{C}_M(\gamma \oplus \beta)$ nach (ii). Dann ist aber auch γ und weiterhin $\gamma{+}1 \in \mathrm{C}_M(\gamma{\oplus}\beta)$ mit Lemma 3.9 (ii). Mit (iii) folgt nun $\psi_M(\gamma{+}1) \leq \psi_M(\gamma{\oplus}\beta)$ und somit auch $\mathrm{C}_M(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}_M(\gamma \oplus \beta)$.

Teil (ii) des obigen Lemmas sagt insbesondere aus, dass der Term $\psi_M\alpha$ für jedes α aus $\mathrm{T}(M)$ in Normalform ist. Dies ist die angenehme Eigenschaft der ψ_M–Funktionen. Unerfreulich hingegen ist, dass sie im Gegensatz zu den ψ_κ–Funktionen für $\kappa < M$ nicht schwach monoton ist. Aus dem folgenden Beweis geht hervor, dass die ψ_κ–Funktionen ($\kappa < M$) bei Anwendung in Normalform streng monoton sind.

Lemma 3.11 *Sei* $\pi < M$

(i) $\mathrm{C}_\pi(\alpha) \cap \pi = \psi_\pi\alpha \in \mathrm{SC}\backslash\mathrm{REG}$

(ii) $\psi_\pi\alpha < \pi$

(iii) $\alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad \psi_\pi\alpha \leq \psi_\pi\beta \ \ \& \ \ \mathrm{C}_\pi(\alpha) \subseteq \mathrm{C}_\pi(\beta)$

(iv) $\alpha < \beta \ \ \& \ \ \alpha, \pi \in \mathrm{C}_\pi(\beta) \quad \Rightarrow \quad \psi_\pi\alpha < \psi_\pi\beta$

Beweise sind in [Buchholz 1991b], Lemma 1.3 a)–c) und Lemma 1.6.

Lemma 3.12

(i) $\mathrm{REG}^{<M} \cap \mathrm{T}(M) = \{\Omega_{\sigma+1} : \ \sigma \in \mathrm{T}(M) \cap M\} \cup \{\psi_M\xi : \ \xi \in \mathrm{T}(M)\}$

(ii) $\kappa = \Omega_\kappa \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\psi_\kappa\alpha} = \psi_\kappa\alpha$

(iii) $\kappa = \Omega_{\sigma+1} \quad \Rightarrow \quad \Omega_\sigma < \psi_\kappa\alpha < \Omega_{\sigma+1}$

(iv) $\gamma \in \mathrm{C}(\alpha,\beta) \ \ \& \ \ \Omega_\sigma \leq \gamma \leq \Omega_{\sigma+1} \quad \Rightarrow \quad \sigma \in \mathrm{C}(\alpha,\beta)$

Beweis. Für (ii)–(iv) schlage man in [Buchholz 1991b] Lemma 1.4 nach.

(i) Ist $\kappa \in \mathrm{REG}$, so gilt $\kappa = \Omega_{\sigma+1}$ oder $\kappa = \Omega_\kappa$. Wegen Lemma 3.11 (i) kann im zweiten Fall die Normalform von κ nur die Gestalt $\psi_M\xi$ oder M haben.

Definition 3.13 (Norm für Ordinalzahlen aus T(M)) *Für $\alpha \in \mathrm{T}(M)$ sei $N_M\alpha$ die Anzahl der Zeichen M, φ, Ω, ψ die in der Termdarstellung der Normalform von α vorkommen (vgl. Definition 3.7 und Satz 3.8).*

Lemma 3.14 *Sei N die Norm N_M.*

$$\forall\alpha{<}M \ \exists\sigma{<}M \ \ (\Omega_\sigma \leq \alpha < \Omega_{\sigma+1} \ \ \& \ \ N\sigma \leq N\alpha)$$

Beweis durch Induktion nach $N\alpha$. Es wird nach der Normalform von α unterschieden und eine Darstellung $\Omega_{\sigma+1}$ für α^+ angegeben. Dabei ist α^+ die kleinste Kardinalzahl oberhalb von α.

- $0^+ = \Omega$
- $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)^+ \ = \ \alpha_1^+ \ =^{Iv} \ \Omega_{\sigma+1}$ mit $N\sigma \leq N\alpha_1 < N(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$
- $(\varphi\gamma_0\gamma_1)^+ \ = \ \gamma_j^+ \ =^{Iv} \ \Omega_{\sigma+1}$ mit $\gamma_j := \max\{\gamma_0, \gamma_1\}$ und $N\sigma \leq N\gamma_j < N(\varphi\gamma_0\gamma_1)$
- $(\Omega_\gamma)^+ \ = \ \Omega_{\gamma+1}$ und $N\gamma < N(\Omega_\gamma)$
- $(\psi_M\gamma)^+ = \Omega_{\psi_M\gamma+1}$ und $N\psi_M\gamma = N\psi_M\gamma$ (vgl. Lemma 3.12 (ii))

- $(\psi_\kappa\gamma)^+ = \begin{cases} \Omega_{\sigma+1} & \text{falls } \kappa = \Omega_{\sigma+1} \\ \Omega_{\psi_\kappa\gamma+1} & \text{falls } \kappa = \psi_M\sigma \end{cases}$ und $N\sigma$, $N\psi_\kappa\gamma \leq N(\psi_\kappa\gamma)$

  Dabei gilt $(\psi_\kappa\gamma)^+ = \Omega_{\psi_\kappa\gamma+1}$ im zweiten Fall, da für $\kappa = \psi_M\sigma$ nach Lemma 3.10 (i) und 3.12 (ii) $\psi_\kappa\gamma = \Omega_{\psi_\kappa\gamma}$ ist. Die Fallunterscheidung ist nach Teil (i) von Lemma 3.12 vollständig und besitzt nach Lemma 3.10 (i) exklusive Fälle.

3.2 Das Bezeichnungssystem T($\mathcal{K}$)

Für die Definition von T($\mathcal{K}$) setzen wir die Existenz einer schwach kompakten Kardinalzahl $\mathcal{K}$ voraus. Eine Definition dieser Eigenschaft ist z.B in [Rathjen 1994b], Definition 4.1 zu finden. Wie man das Bezeichnungssystem entwickeln kann, auch ohne die Existenz einer großen Kardinalzahl zu fordern, kann man aus [Schlüter 1997] lernen.

Konvention. κ, π, τ bezeichnen Elemente von $\mathrm{REG}^{<\mathcal{K}}$, d.h. reguläre, überabzählbare Kardinalzahlen, die kleiner als $\mathcal{K}$ sind. Diese Konvention steht zunächst in Konflikt mit derjenigen aus dem vorigen Abschnitt. Welche Konvention in Kraft ist, hängt in Zukunft davon ab, in welchem Bezeichnungssystem gearbeitet wird. Bei der Analyse von KPM ist dies RS(M), bei der von KP+(Π_3–Ref) ist es RS($\mathcal{K}$).

Definition 3.15 *Durch simultane Rekursion nach α werden Ordinalzahlen $\Xi(\alpha)$ und $\Psi^\xi_\pi(\alpha)$ (für $\xi \leq \alpha$) sowie Mengen $\mathrm{C}(\alpha, \beta)$, $\mathrm{M}^\alpha \subseteq \mathrm{ON}$ definiert.*

- $\mathrm{C}(\alpha, \beta)$ *ist der Abschluss von* $\beta \cup \{0, \mathcal{K}\}$ *unter den Funktionen* $+, \varphi, (\xi \mapsto \Omega_\xi)_{\xi<\mathcal{K}}, (\gamma \mapsto \Xi(\gamma))_{\gamma<\alpha}$ *und* $(\xi\pi\gamma \mapsto \Psi^\xi_\pi(\gamma))_{\xi\leq\gamma<\alpha}$.
- $\mathrm{M}^0 := \mathrm{LIM} \cap \mathcal{K}$ *und für* $\alpha > 0$ *sei* M^α *wie folgt definiert:*
- $\mathrm{M}^\alpha := \{\pi < \mathcal{K} :\ \mathrm{C}(\alpha, \pi) \cap \mathcal{K} = \pi\ \ \&\ \ \alpha \in \mathrm{C}(\alpha, \pi)$
  $\&\ \ \forall \xi {\in} \mathrm{C}(\alpha, \pi) \cap \alpha\ (\mathrm{M}^\xi$ *stationär in* $\pi)\}$
- $\Xi(\alpha) := \min(\mathrm{M}^\alpha \cap \{\mathcal{K}\})$
- $\Psi^\xi_\pi(\alpha) := \min(\{\rho \in \mathrm{M}^\xi \cap \pi :\ \mathrm{C}(\alpha, \rho) \cap \pi = \rho\ \ \&\ \ \pi, \alpha \in \mathrm{C}(\alpha, \rho)\} \cup \{\pi\})$ *für* $\xi \leq \alpha$

Zur Abkürzung setzen wir

- $\mathrm{C}_\mathcal{K}(\alpha) := \mathrm{C}(\alpha, \Xi(\alpha))$
- $\mathrm{C}^\xi_\pi(\alpha) := \mathrm{C}(\alpha, \Psi^\xi_\pi(\alpha))$

Die bei der Definition von $\Psi^\xi_\pi(\alpha)$ scheinbar fehlende Bedingung $\xi \in \mathrm{C}(\alpha, \rho)$ ist in $\rho \in \mathrm{M}^\xi$ enthalten, denn durch $\xi \leq \alpha$ folgt $\xi \in \mathrm{C}(\xi, \rho) \subseteq \mathrm{C}(\alpha, \rho)$.

Definition 3.16 (Ordinalzahlbezeichnungssystem $\mathbf{T}(\mathcal{K})$) *Wir definieren induktiv eine Menge* $\mathrm{T}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{ON}$ *und eine Funktion* $m : \mathrm{T}(\mathcal{K}) \cap \mathrm{REG}^{<\mathcal{K}} \to \mathrm{T}(\mathcal{K})$ *durch*

- $0, \mathcal{K} \in \mathrm{T}(\mathcal{K})$
- $\alpha, \beta, \rho, \xi \in \mathrm{T}(\mathcal{K})\ \&\ \rho, \xi < \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta,\ \omega^\alpha,\ \varphi\rho\xi,\ \Omega_\xi,\ \Xi(\alpha) \in \mathrm{T}(\mathcal{K})$
  Ist $\Omega_\alpha \in \mathrm{REG}^{<\mathcal{K}}$ *so sei* $m(\Omega_\alpha) := 1$, *und für* $\alpha > 0$ *sei* $m(\Xi(\alpha)) = \alpha$.
- $\alpha, \xi, \pi \in \mathrm{T}(\mathcal{K}) \cap \mathrm{C}(\alpha, \pi)\ \&\ \xi \leq \alpha\ \&\ \mathrm{stat}(\xi, \pi) \quad \Rightarrow \quad \Psi^\xi_\pi(\alpha) \in \mathrm{T}(\mathcal{K})$
  Für $\xi > 0$ *sei* $m(\Psi^\xi_\pi(\alpha)) := \xi$.

Dabei haben wir folgende Abkürzung benutzt:

- $\mathrm{stat}(\xi, \pi) :\equiv\ \xi \in \mathrm{C}(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$ *(siehe Satz 3.19 (ii))*
  Dieses Prädikat ist nach [Rathjen 1994b] Lemma 5.4 primitiv-rekursiv.

Mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen wir Ordinalzahlen aus dem Bezeichnungssystem $\mathrm{T}(\mathcal{K})$.

Lemma 3.17

(i) $\mathrm{T}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{C}(\varepsilon_{\mathcal{K}+1}, 0) \cap \varepsilon_{\mathcal{K}+1}$
(ii) $\mathrm{T}(\mathcal{K}) \cap \Omega \subseteq \Psi^0_\Omega(\varepsilon_{\mathcal{K}+1})$

Beweis. (i) Da die Kollabierungsfunktionen nur Werte $\leq \mathcal{K}$ annehmen und die Funktionen $(\xi \mapsto \Omega_\xi)$ und $(\rho\xi \mapsto \varphi\rho\xi)$ für $\rho > 0$ in $\mathrm{T}(\mathcal{K})$ nur auf Werte $< \mathcal{K}$ angewendet werden dürfen, gilt $\mathrm{T}(\mathcal{K}) \subseteq \varepsilon_{\mathcal{K}+1}$. Daraus folgt durch einen Vergleich der Definition von $\mathrm{T}(\mathcal{K})$ mit derjenigen der C–Menge $\mathrm{T}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{C}(\varepsilon_{\mathcal{K}+1}, 0)$.
(ii) Mit (i) folgt $\mathrm{T}(\mathcal{K}) \cap \Omega \subseteq \mathrm{C}(\varepsilon_{\mathcal{K}+1}, 0) \cap \Omega \subseteq \mathrm{C}^0_\Omega(\varepsilon_{\mathcal{K}+1}) \cap \Omega \subseteq \Psi^0_\Omega(\varepsilon_{\mathcal{K}+1})$.

Definition 3.18 (Normalform von Ordinalzahltermen)

- *Für die Funktionen* $+$, φ *und* $(\xi \mapsto \Omega_\xi)$ *gelten dieselben Normalformbedingungen wie im System* $\mathrm{T}(M)$, *siehe Definition 3.7.*
- $\kappa =_{\mathrm{NF}} \Xi(\alpha) \quad :\Leftrightarrow \quad \kappa = \Xi(\alpha)\ \&\ \alpha > 0$
- $\rho =_{\mathrm{NF}} \Psi^\xi_\pi(\alpha) \quad :\Leftrightarrow \quad \rho = \Psi^\xi_\pi(\alpha)\ \&\ \alpha, \xi, \pi \in \mathrm{C}(\alpha, \pi)\ \&\ \xi \leq \alpha\ \&\ \mathrm{stat}(\xi, \pi)$

Satz 3.19

(i) *Jede Ordinalzahl in* $\mathrm{T}(\mathcal{K})$ *hat eine eindeutige Normalform-Termdarstellung in den Symbolen* $0, \mathcal{K}, +, \varphi, \Omega, \Xi, \Psi$.

(ii) *Für* $\pi, \xi \in \mathrm{T}(\mathcal{K})$ *gilt:* $\quad \mathrm{stat}(\xi, \pi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{M}^{\xi}$ *stat. in* π

Beweis. Siehe [Rathjen 1994b], Lemma 5.2.

Lemma 3.20

(i) $\alpha \leq \alpha'$ & $\beta \leq \beta' \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C}(\alpha, \beta) \subseteq \mathrm{C}(\alpha', \beta')$

(ii) $\pi \in \mathrm{M}^{\alpha}$ & $\xi \in \mathrm{C}(\alpha, \pi) \cap \alpha \quad \Rightarrow \quad \pi \in \mathrm{M}^{\xi}$

(iii) $\mathrm{stat}(\xi, \pi) \quad \Rightarrow \quad \pi \in \mathrm{M}^{\xi}$

(iv) $\gamma \in \mathrm{C}(\alpha, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{SC}(\gamma) \in \mathrm{C}(\alpha, \beta)$

(v) $\Omega_{\sigma} \in \mathrm{C}(\alpha, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \in \mathrm{C}(\alpha, \beta)$ *für* $\sigma \leq \mathcal{K}$

Beweis steht in [Rathjen 1994b], Lemma 4.11 und 4.18.

Lemma 3.21

(i) $\mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\alpha) \cap \mathcal{K} = \Xi(\alpha)$

(ii) $\Xi(\alpha) < \mathcal{K}$ & $\alpha \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\alpha)$

(iii) $\Xi(\alpha) < \Xi(\beta) \quad \Leftrightarrow$
- $\alpha < \beta$ & $\alpha \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\beta)$ *oder*
- $\beta < \alpha$ & $\beta \notin \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\alpha)$

(iv) $\beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \Xi(\gamma + 1) \leq \Xi(\gamma \oplus \beta)$ & $\mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\gamma + 1) \subseteq \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\gamma \oplus \beta)$

(v) $\beta_0 < \beta_1 < \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \Xi(\alpha \oplus \beta_0) < \Xi(\alpha \oplus \beta_1)$

(vi) $\alpha < \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \alpha < \Xi(\alpha)$

Beweis. (i) ist klar. Für (ii), (iii) siehe [Rathjen 1994b], Lemma 4.12 und Korollar 4.13.

(iv) Nach (ii) gilt $\gamma \oplus \beta \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\gamma \oplus \beta)$, worauf Lemma 3.20 (iv) $\gamma + 1 \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\gamma \oplus \beta)$ liefert. Mit Teil (iii) folgt die Behauptung.

(v) Aus $\beta_1 < \mathcal{K}$ folgt mit (i), (ii) und Lemma 3.20 (iv) $\beta_1 \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\alpha \oplus \beta_1) \cap \mathcal{K} = \Xi(\alpha \oplus \beta_1)$. Dann ist aber auch $\beta_0 \in \Xi(\alpha \oplus \beta_1) \subseteq \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\alpha \oplus \beta_1)$ und weitergehend

$\alpha \oplus \beta_0 \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\alpha \oplus \beta_1)$, also folgt $\Xi(\alpha \oplus \beta_0) < \Xi(\alpha \oplus \beta_1)$ nach (iii).

(vi) Aus der Voraussetzung folgt in Verbindung mit (ii) und (i) $\alpha \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\alpha) \cap \mathcal{K} = \Xi(\alpha)$.

Lemma 3.22 *Sei $\Psi^{\xi}_{\pi}(\alpha)$ in Normalform.*

(i) $\mathrm{C}^{\xi}_{\pi}(\alpha) \cap \pi = \Psi^{\xi}_{\pi}(\alpha)$

(ii) $\Psi^{\xi}_{\pi}(\alpha) \in \mathrm{M}^{\xi} \cap \pi \;\;\&\;\; \alpha, \pi \in \mathrm{C}^{\xi}_{\pi}(\alpha)$

(iii) *Ist $\Psi^{\sigma}_{\kappa}(\beta)$ in Normalform und $< \pi$, so gilt $\Psi^{\xi}_{\pi}\alpha < \Psi^{\sigma}_{\kappa}\beta \quad \Leftrightarrow$*

- $\alpha < \beta \;\;\&\;\; \alpha, \xi, \pi \in \mathrm{C}^{\sigma}_{\kappa}(\beta) \;\;\&\;\; \Psi^{\xi}_{\pi}(\alpha) < \kappa$ *oder*
- $\beta \leq \alpha \;\;\&\;\; \{\beta, \sigma, \kappa\} \not\subseteq \mathrm{C}^{\xi}_{\pi}(\alpha)$ *oder*
- $\alpha = \beta \;\;\&\;\; \kappa = \pi \;\;\&\;\; \xi < \sigma \;\;\&\;\; \xi \in \mathrm{C}(\sigma, \Psi^{\sigma}_{\kappa}(\beta))$ *oder*
- $\alpha = \beta \;\;\&\;\; \kappa = \pi \;\;\&\;\; \sigma < \xi \;\;\&\;\; \sigma \notin \mathrm{C}(\xi, \Psi^{\xi}_{\pi}(\alpha))$

(iv) $\beta \leq \pi \quad \Rightarrow \quad \Psi^{\xi}_{\pi}(\alpha \oplus \beta)$ *in Normalform*

(v) $\Psi^{0}_{\pi}(\gamma + 1), \Psi^{0}_{\pi}(\gamma \oplus \alpha)$ *in Normalform und $\alpha > 0$*

$\Rightarrow \quad \Psi^{0}_{\pi}(\gamma + 1) \leq \Psi^{0}_{\pi}(\gamma \oplus \alpha) \;\;\&\;\; \mathrm{C}^{0}_{\pi}(\gamma + 1) \subseteq \mathrm{C}^{0}_{\pi}(\gamma \oplus \alpha)$

Beweis. (i) und (iv) sind klar. Für (ii), (iii) siehe [Rathjen 1994b] Proposition 4.16 und 4.20.

(v) Nach (ii) gilt $\gamma \oplus \alpha, \pi \in \mathrm{C}^{0}_{\pi}(\gamma \oplus \alpha)$. Mit Lemma 3.20 (iv) bekommen wir $\gamma + 1 \in \mathrm{C}^{0}_{\pi}(\gamma \oplus \alpha)$ und via Teil (iii) erschließt sich die Behauptung.

Von der Ψ–Vergleichsäquivalenz in (iii) brauchen wir nur ganz einfache Fälle. Hauptsächlich benutzen wir für $\Psi^{\xi}_{\pi}(\alpha)$ und $\Psi^{\xi}_{\pi}(\beta)$ in Normalform

$$\alpha < \beta \;\;\&\;\; \alpha \in \mathrm{C}^{\xi}_{\pi}(\beta) \quad \Rightarrow \quad \Psi^{\xi}_{\pi}(\alpha) < \Psi^{\xi}_{\pi}(\beta).$$

Dabei sieht man die scheinbar fehlende Voraussetzung $\xi \in \mathrm{C}^{\xi}_{\pi}(\beta)$ wie folgt ein. Da $\Psi^{\xi}_{\pi}(\beta)$ in Normalform ist, gilt $\Psi^{\xi}_{\pi}(\beta) \in \mathrm{M}^{\xi}$. Aus der Definition von M^{ξ} bekommen wir die Information $\xi \in \mathrm{C}(\xi, \Psi^{\xi}_{\pi}(\beta)) = \mathrm{C}^{\xi}_{\pi}(\beta)$.
Die andere Vergleichsart, die wir benötigen, ist noch einfacher: $\Psi^{0}_{\pi}(\alpha) \leq \Psi^{\xi}_{\pi}(\alpha)$.

Lemma 3.23

(i) $\mathrm{M}^1 = \{\pi < \mathcal{K} : \ \pi \textit{ schwach unerreichbar}\}$

(ii) $\pi \notin \mathrm{M}^1 \quad \Rightarrow \quad \pi = \Omega_{\sigma+1} \quad \textit{für ein } \sigma < \mathcal{K}$

(iii) $\pi \in \mathrm{M}^\alpha \ \& \ \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_\pi = \pi$

(iv) $\pi \in \mathrm{M}^1 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\Psi^0_\pi(\alpha)} = \Psi^0_\pi(\alpha)$

(v) $\pi = \Omega_{\sigma+1} \ \& \ \alpha \in \mathrm{C}(\alpha, \pi) \quad \Rightarrow \quad \Omega_\sigma < \Psi^0_\pi(\alpha) < \Omega_{\sigma+1}$

(vi) $\gamma \in \mathrm{C}(\alpha, \beta) \ \& \ \Omega_\sigma \leq \gamma \leq \Omega_{\sigma+1} \quad \Rightarrow \quad \sigma \in \mathrm{C}(\alpha, \beta)$

Beweis. Für (iii)–(v) siehe [Rathjen 1994b] Lemma 4.19.

(i) Da $1 \in \mathrm{C}(1, \pi)$ und LIM stationär in π für alle regulären π gilt, ist

$$\{\pi < \mathcal{K} : \ \mathrm{C}(1, \pi) \cap \mathcal{K} = \pi\} \ = \ \{\pi < \mathcal{K} : \ \pi \text{ schwach unerreichbar}\}$$

zu zeigen.
'$\subseteq$' ist klar, da $\mathrm{C}(1, \pi) \cap \mathcal{K}$ abgeschlossen unter $\lambda\xi.\Omega_\xi$ ist.
'$\supseteq$': Sei π schwach unerreichbar. Wir zeigen induktiv nach der Definition der C–Mengen $\mathrm{C}(1, \pi) \cap \mathcal{K} \subseteq \pi$.
Für die Funktionen $+, \varphi$ und Ξ ist dies klar, da Ξ nur auf 0 angewendet werden darf und $\Xi(0) = \omega$ ist. $\lambda\xi.\Omega_\xi$ darf nur auf Werte $< \mathcal{K}$ angewendet werden. Sei also $\sigma \in \mathrm{C}(1, \pi) \cap \mathcal{K}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\sigma < \pi$ und da π schwach unerreichbar ist, folgt $\Omega_\sigma < \pi$. Mit der Ψ–Funktion dürfen wir in $\mathrm{C}(1, \pi)$ nur den Wert $\Psi^0_\kappa(0)$ für ein $\kappa \in \mathrm{C}(1, \pi) \cap \mathrm{REG}^{<\mathcal{K}}$ bilden. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\kappa < \pi$, also ist auch $\Psi^0_\kappa(0) \leq \kappa < \pi$.

(ii) ergibt sich aus (i), wenn man beachtet, dass π nach Konvention eine reguläre Kardinalzahl $< \mathcal{K}$ bezeichnet und dass die schwach unerreichbaren Kardinalzahlen nach Definition reguläre Limeskardinalzahlen sind.

(vi) wird wie Lemma 4.5 h) in [Buchholz 1991a] bewiesen: Angenommen es gilt $\sigma \notin \mathrm{C}(\alpha, \beta)$. Dann sind auch $\Omega_\sigma, \Omega_{\sigma+1} \notin \mathrm{C}(\alpha, \beta)$. Wir zeigen nun $\mathrm{C}(\alpha, \beta) \subseteq Y$ für $Y := \mathrm{C}(\alpha, \beta) \backslash [\Omega_\sigma, \Omega_{\sigma+1}]$, woraus offensichtlich die Behauptung folgt. Es ist $\{0, \mathcal{K}\} \cup \beta \subseteq Y$. Des Weiteren ist Y abgeschlossen gegen $+, \varphi, \Omega{\restriction}\mathcal{K}$. Die Ξ–Funktion und Ψ^ξ_π für $\xi > 0$ oder $\pi \in \mathrm{M}^1$ nehmen nur reguläre Werte an (siehe (iii) und (iv)), also ist Y auch unter diesen Funktionen abgeschlossen

($\Omega_\sigma \notin \mathrm{C}(\alpha, \beta)$ wurde schon gezeigt). Seien $\gamma, \pi \in Y, \gamma < \alpha$ mit $\pi \notin \mathrm{M}^1$ gegeben, so dass $\Psi^0_\pi(\gamma)$ in Normalform ist. Nach (ii) gilt $\pi = \Omega_{\tilde{\sigma}+1}$ für ein $\tilde{\sigma}$. Wegen $\pi \in Y \subseteq \mathrm{C}(\alpha, \beta)$ und $\Omega_{\sigma+1} \notin \mathrm{C}(\alpha, \beta)$ ist $\tilde{\sigma} \neq \sigma$, also folgt mit Teil (v) $\Psi^\xi_\pi(\gamma) \in Y$.

Definition 3.24 (Norm für Ordinalzahlen aus $\mathbf{T}(\mathcal{K})$) *Für $\alpha \in \mathrm{T}(\mathcal{K})$ sei $N_\mathcal{K}\alpha$ die Anzahl der Zeichen $\mathcal{K}, \varphi, \Omega, \Xi, \Psi$ die in der Termdarstellung der Normalform von α vorkommen (vgl. Definition 3.18 und Satz 3.19 (i)).*

Lemma 3.25 *Sei N die Norm $N_\mathcal{K}$.*

$$\forall\alpha{<}\mathcal{K}\,\exists\sigma{<}\mathcal{K}\;(\Omega_\sigma \leq \alpha < \Omega_{\sigma+1} \;\;\&\;\; N\sigma \leq N\alpha)$$

Beweis durch Induktion nach $N\alpha$. Es wird nach der Normalform von α unterschieden und eine Darstellung $\Omega_{\sigma+1}$ für α^+ angegeben.

- $0^+ = \Omega$
- $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)^+ = \alpha_1^+ =^{Iv} \Omega_{\sigma+1}$ mit $N\sigma \leq N\alpha_1 < N(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$
- $(\varphi\gamma_0\gamma_1)^+ = \gamma_j^+ =^{Iv} \Omega_{\sigma+1}$ mit $\gamma_j := \max\{\gamma_0, \gamma_1\}$ und $N\sigma \leq N\gamma_j \leq N(\varphi\gamma_0\gamma_1)$
- $(\Omega_\gamma)^+ = \Omega_{\gamma+1}$ und $N\gamma < N(\Omega_\gamma)$
- $(\Xi(\gamma))^+ = \Omega_{\Xi(\gamma)+1}$, da $\Xi(\gamma) = \Omega_{\Xi(\gamma)}$ nach Lemma 3.23 (iii)
- $(\Psi^\xi_\pi(\gamma))^+ = \Omega_{\Psi^\xi_\pi(\gamma)+1}$ für $\xi > 0$ nach Lemma 3.23 (iii).
- $(\Psi^0_\pi(\gamma))^+ = \begin{cases} \Omega_{\sigma+1} & \text{falls } \pi = \Omega_{\sigma+1} \text{ nach Lemma 3.23 (v)} \\ \Omega_{\Psi^0_\pi(\gamma)+1} & \text{falls } \pi \in \mathrm{M}^1 \text{ nach Lemma 3.23 (iv)} \end{cases}$

  Diese Fallunterscheidung ist nach Lemma 3.23 (ii) vollständig und besitzt nach (ii) exkulsive Fälle.

3.3 Subrekursive Hierarchien

In diesem Abschnitt werden die schnellwachsenden Hierarchien $(\mathrm{F}^M_\gamma)_{\gamma\in\mathrm{T}(M)}$ und $(\mathrm{F}^{\mathcal{K}}_\gamma)_{\gamma\in\mathrm{T}(\mathcal{K})}$ eingeführt, von denen die KPM bzw. KP+(Π_3–Ref)–beweisbar rekursiven Funktionen majorisiert werden.

Definition 3.26 *N bezeichne eine Norm. k ist eine feste natürliche Zahl, und zwar die Länge einer Formel* fsep^ω*, die im Anhang in C.2 definiert wird. Für die folgenden Rechnungen reicht es zu wissen, dass $k \geq 36$ ist.*

- $\Phi(0) := 1$ *und* $\Phi(x) := 2_x(k)$ *für* $x > 0$
- $\alpha \lhd^{N,1}_x \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha < \beta \;\&\; N\alpha \leq \Phi(N\beta + x)$ *und* $\lhd^N_x := TC(\lhd^{N,1}_x)$
- $\alpha \lhd^{N,1} \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha \lhd^{N,1}_0 \beta$ *und* $\lhd^N := TC(\lhd^{N,1})$
- $\mathrm{F}^N_\gamma(x) := \max\big(\{x+1\} \cup \{\mathrm{F}^N_\alpha \circ \mathrm{F}^N_\alpha(x) :\ \alpha \lhd^{N,1}_x \gamma\}\big)$

Dabei ist $TC(R)$ der transitive Abschluss einer zweistelligen Relation R. Wir schreiben F^M und $\mathrm{F}^{\mathcal{K}}$ anstelle von F^{N_M} und $\mathrm{F}^{N_{\mathcal{K}}}$. Bei Aussagen, die für alle Normen gelten, oder bei denen klar ist, um welche Norm es geht, wird der obere Index N_M bzw. $N_{\mathcal{K}}$ bei $\lhd$ und F *gerne weggelassen.*

Für die Definition von F^N ist die Eigenschaft

$$\mathrm{card}\{\alpha \in \mathrm{dom}(N) :\ N\alpha < k\} < \omega$$

der Norm N wesentlich. Bei der Definition von $\alpha \lhd^{N,1}_x \beta$ haben wir die Voraussetzung $\alpha, \beta \in \mathrm{dom}(N)$ als Selbstverständlichkeit verschwiegen.

Lemma 3.27

(Φ.1) $6^{x+2} \cdot (2x)^x \leq \Phi(x+1)$

(Φ.2) $10 \cdot [45x]^5 \leq \Phi(x)$

(Φ.3) $x^y \leq \Phi(x+y)$

(Φ.4) $\Phi(x) \cdot \Phi(y) \leq \Phi(x+y)$

(Φ.5) $18\Phi(x) < \Phi(x+1)$

(Φ.6) $8\Phi(x)^2 \leq \Phi(x+1)$

(Φ.7) $7\Phi(x) \cdot x^3 \cdot y^3 < \Phi(x+y+1)$

Beweis. Für $x = 0$ (bzw. $y = 0$) rechnet man alle Punkte leicht nach. Seien also $x, y > 0$. (Φ.1) – (Φ.3) werden für $\Phi_0(x) := (2x)^{xk} \leq \Phi(x)$ gezeigt.

(Φ.1): $6^{x+2} \cdot (2x)^x \le ((2x)^3)^{x+2} \cdot (2x)^x \le (2x)^{4x+6} \le \Phi_0(x)$, da $k \ge 10$

(Φ.2): $10 \cdot [45x]^5 \le 2^4 \cdot ((2x)^6)^5 \le (2x)^{34} \le \Phi_0(x)$, da $k \ge 34$

(Φ.3): $x^y \le (x+y)^{(x+y)} \le \Phi_0(x+y)$

(Φ.4): $\Phi(x) \cdot \Phi(y) \le 2_x(k) \cdot 2_y(k) \le (2_{\max\{x,y\}}(k))^2 \le 2_{\max\{x,y\}+1}(k) \le \Phi(x+y)$

(Φ.5): $18\Phi(x) < k \cdot \Phi(x) < \Phi(x+1)$

(Φ.6): $8\Phi(x)^2 \le 2^3 \cdot 2_x(k)^2 \le 2^3 \cdot (2^{2_{x-1}(k)})^2 \le 2^{2_{x-1}(k) \cdot 2+3} \le 2^{2_x(k)} = \Phi(x+1)$

(Φ.7): $7\Phi(x) \cdot x^3 \cdot y^3 \le^{(\Phi.2)} \Phi(x) \cdot \Phi(x) \cdot \Phi(y) \le^{(\Phi.4+6)} \Phi(x+y+1)$

Lemma 3.28

(i) $x < \mathrm{F}_\gamma(x) < \mathrm{F}_\gamma(x+1)$

(ii) $\mathrm{F}_\gamma(x) < \mathrm{F}_{\gamma+1}(x)$, *insbesondere gilt* $n < \mathrm{F}_n(x)$.

(iii) $\alpha \lhd_x \gamma \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}_\alpha(x) < \mathrm{F}_\gamma(x) \;\&\; \mathrm{F}_\alpha \circ \mathrm{F}_\alpha(x) \le \mathrm{F}_\gamma(x)$

Beweis. (i) folgt direkt aus der Definition.
(ii) Aus (i) folgt $\mathrm{F}_\gamma(x) < \mathrm{F}_\gamma \circ \mathrm{F}_\gamma(x)$ und wegen $\gamma \lhd^1_x \gamma + 1$ gilt $\mathrm{F}_\gamma \circ \mathrm{F}_\gamma(x) \le \mathrm{F}_{\gamma+1}(x)$.
(iii) $\alpha \lhd_x \gamma$ besagt, dass es $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ für ein $n > 0$ gibt, mit $\alpha = \alpha_0 \lhd^1_x \alpha_1 \lhd^1_x \cdots \lhd^1_x \alpha_n = \gamma$. Für $i < n$ folgt also $\mathrm{F}_{\alpha_{i+1}}(x) > \mathrm{F}_{\alpha_i}(x)$ nach Definition von F und insgesamt $\mathrm{F}_\alpha(x) < \mathrm{F}_\gamma(x)$. Aus $\alpha_0 \lhd^1_x \alpha_1$ folgt nach Definition von F außerdem $\mathrm{F}_\alpha \circ \mathrm{F}_\alpha(x) = \mathrm{F}_{\alpha_0} \circ \mathrm{F}_{\alpha_0}(x) \le \mathrm{F}_{\alpha_1}(x) \le \mathrm{F}_\gamma(x)$.

3.4 Produkte und $\lhd$–Vergleiche

Als nächstes definieren wir die natürliche und die gewöhnliche Ordinalzahlmultiplikation, letztere nur im Spezialfall der Multiplikation von links mit 3 und ω. Um diese Funktionen in den Ordinalzahlbezeichnungssystemen zur Verfügung zu haben, führen wir sie rekursiv auf Addition und ω–Potenzierung zurück. Die Spezialfälle der gewöhnlichen Multiplikation werden für die Definition des Formelranges benutzt.
Bei der folgenden Definition des natürlichen Produkts wurde darauf verzichtet, die Bedingungen der Fallunterscheidung exklusiv zu formulieren. Dadurch

verringert sich die Anzahl der benötigten Bedingungen. Natürlich bleibt die Definition wohldefiniert, d.h. treffen in einer Situation mehrere Bedingungen gleichzeitig zu, so liefert jede zugehörige Definition ein und dasselbe Ergebnis.

Definition 3.29 (Natürliches Produkt)
Wir definieren $\alpha \otimes \beta$ durch Rekursion nach $\alpha \oplus \beta$. Dabei schreiben wir $\oplus\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ für $\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n$.

- $\alpha \otimes 0 := 0 \otimes \beta := 0$
- $(\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n) \otimes (\beta_1 \oplus \cdots \oplus \beta_m) := \oplus\{\alpha_i \otimes \beta_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, *falls $n > 1$ oder $m > 1$*
- $\alpha \otimes \beta := \omega^{\alpha_0 \oplus \beta_0}$, *falls $\alpha = \omega^{\alpha_0}$ und $\beta = \omega^{\beta_0}$*
  Dabei müssen ω^{α_0} und ω^{β_0} nicht Normalformen sein.

Konvention. $\otimes$ wird vor $\oplus$ bzw. $+$ angewendet.

Lemma 3.30
(i) *$\otimes$ ist kommutativ, assoziativ und distributiv bezüglich $\oplus$.*
(ii) $\alpha_0 < \alpha \;\&\; \beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 \otimes \beta < \alpha \otimes \beta$
(iii) $\alpha_0, \alpha_1 < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \omega_2(\alpha_0) \otimes \omega_2(\alpha_1) < \omega_2(\alpha)$

Lemma 3.31 *Sei N eine der Normen N_M oder $N_{\mathcal{K}}$.*

$$\alpha, \beta > 0 \quad \Rightarrow \quad N\alpha + N\beta - 1 \leq N(\alpha \otimes \beta) \leq 3N\alpha N\beta$$

Beweis. (i) Für $\alpha, \beta \in \mathrm{AP}$ gilt offensichtlich

- $N\alpha + N\beta - 1 \leq N(\alpha \otimes \beta) \leq N\alpha + N\beta + 1$.

Für $\beta =_{\mathrm{NF}} \beta_1 + \cdots + \beta_m$ mit $m > 1$ und $\alpha \in \mathrm{AP}$ gilt also (es ist $1 < m \leq N\beta$):

- $N(\alpha \otimes \beta) = \sum_{j=1}^m N(\alpha \otimes \beta_j) \leq \sum_{j=1}^m (N\alpha + N\beta_j + 1)$
  $\leq mN\alpha + N\beta + m \leq N\alpha N\beta + 2N\beta$ und
- $N(\alpha \otimes \beta) = \sum_{j=1}^m N(\alpha \otimes \beta_j) \geq m(N\alpha - 1) + N\beta \geq N\alpha + N\beta - 1$.

Somit gilt für $\alpha =_{\mathrm{NF}} \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ (es ist $1 < n \leq N\alpha$):

- $N(\alpha \otimes \beta) = \sum_{i=1}^{n} N(\alpha_i \otimes (\beta_1 \oplus \cdots \oplus \beta_m)) \leq \sum_{i=1}^{n}(N\alpha_i N\beta + 2N\beta)$
  $= N\alpha N\beta + 2nN\beta \leq 3N\alpha N\beta$ und
- $N(\alpha \otimes \beta) = \sum_{i=1}^{n} N(\alpha_i \otimes (\beta_1 \oplus \cdots \oplus \beta_m)) \geq \sum_{i=1}^{n}(N\alpha_i + N\beta - 1)$
  $= N\alpha + n(N\beta - 1) \geq N\alpha + N\beta - 1.$

Im Allgemeinen gilt nicht $N\alpha \cdot N\beta \leq N\alpha \otimes \beta$, wie man am Beispiel $\alpha = \beta = \omega$ einsehen kann. Die Schärfe der Abschätzung $N\alpha \otimes \beta \leq 3N\alpha N\beta$ rechnet man für $\alpha = \beta = \varepsilon_0 \cdot 2$ nach.

Definition 3.32 *$3 \cdot \alpha$ kann folgendermaßen rekursiv definiert werden:*

- $\alpha = 1$: $\quad 3 \cdot 1 := 3$
- $\alpha =_{\text{NF}} \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$: $\quad 3 \cdot \alpha := 3 \cdot \alpha_0 + \cdots + 3 \cdot \alpha_n$
- $\alpha \in \{0\} \cup \text{AP}\backslash\{1\}$: $\quad 3 \cdot \alpha := \alpha$

$\omega \cdot \alpha$ lässt sich wie folgt rekursiv definieren.

- $\alpha =_{\text{NF}} \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$: $\quad \omega \cdot \alpha := \omega \cdot \alpha_0 + \cdots + \omega \cdot \alpha_n$
- $\alpha = \omega^n$ *mit* $n < \omega$: $\quad \omega \cdot \alpha := \omega^{n+1}$
- *sonst* : $\quad \omega \cdot \alpha := \alpha$

Im folgenden wird der Multiplikationspunkt manchmal weggelassen.

Es folgt eine Auflistung der einfachen Vergleiche mittels der $\lhd$–Relation. Das Lemma wird in den meisten Fällen stillschweigend angewendet. Wie die $\lhd$–Rechnungen der Ordinalzahlanalyse leicht nachzuvollziehen sind, wird nach der Definition der Operatoren 5.1 erklärt.

Lemma 3.33 *Sei N eine Norm.*

(i) $\lhd_x$ *ist transitiv*

(ii) $\alpha \trianglelefteq^1 \alpha \oplus \beta, \omega^\alpha, \varphi\rho\alpha$ *und* $\beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \trianglelefteq^1 \alpha \otimes \beta$

(iii) $\omega \cdot \alpha \trianglelefteq^1 \omega^\alpha$

(iv) $\alpha \lhd_x \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \oplus \gamma \lhd_x \beta \oplus \gamma$

(v) $\alpha_0 \lhd_x \eta$ & $\alpha_0 < \alpha \quad \Rightarrow$
1. $\eta \otimes (\alpha_0 + 1) \lhd_x \eta \otimes (\alpha + 1)$
2. $\eta \otimes \omega^{\alpha_0} \cdot 2 \lhd_x \eta \otimes \omega^\alpha \cdot 2$
3. $\eta \otimes \omega^{\varphi\rho(\alpha_0+1)} \cdot 2 \lhd_x \eta \otimes \omega^{\varphi\rho(\alpha+1)} \cdot 2$

(vi) $\eta + m + 2 \lhd^1 \eta \cdot m$ *falls* $\eta \cdot m \geq \omega$

Beweis. (i) und (ii) sind klar. Für (iii) zeigt man $N(\omega \cdot \alpha) \leq 2N\alpha$ durch Induktion nach α.

(iv) Gelte $\alpha \lhd_x^1 \beta$. Dann ist $N(\alpha \oplus \gamma) \leq \Phi(N\beta + x) + N\gamma \leq \Phi(N\beta + N\gamma + x)$. Die Iteration dies Arguments liefert die behauptete Aussage.

(v) 1. $\eta \otimes (\alpha_0 + 1) \lhd^1 \eta \otimes \alpha \oplus \alpha_0 \lhd_x \eta \otimes \alpha \oplus \eta = \eta \otimes (\alpha + 1)$
Für die erste Ungleichung muss noch eine Normabschätzung gemacht werden. Mit (Φ.4) folgt $3x(y+1) \leq \Phi(x) \cdot \Phi(y) \leq \Phi(x+y)$. Im Verein mit Lemma 3.31 sehen wir $N(\eta \otimes (\alpha_0 + 1)) \leq 3N\eta \cdot N(\alpha_0 + 1) \leq \Phi(N\eta + N\alpha_0) \leq \Phi(N\eta + N\alpha - 1 + N\alpha_0) \leq \Phi(N(\eta \otimes \alpha \oplus \alpha_0))$.
2. $\eta \otimes \omega^{\alpha_0} \cdot 2 \lhd^1 \eta \otimes \omega^{\alpha} \oplus \alpha_0 \lhd_x \eta \otimes \omega^{\alpha} \oplus \eta \lhd^1 \eta \otimes \omega^{\alpha} \cdot 2$
Die Normabschätzung für die erste Ungleichung erfolgt analog zu der Rechnung unter 1., wobei man in diesem Fall $6x(y+1) \leq \Phi(x+y)$ benutzen muss.
3. $\eta \otimes \omega^{\varphi\rho(\alpha_0+1)} \cdot 2 \lhd^1 \eta \otimes \omega^{\varphi\rho(\alpha+1)} \oplus \alpha_0 \lhd_x \eta \otimes \omega^{\varphi\rho(\alpha+1)} \oplus \eta \lhd^1 \eta \otimes \omega^{\varphi\rho(\alpha+1)} \cdot 2$
Bei der Normabschätzung beachte man, dass $\varphi\rho(\alpha + 1)$ in Normalform ist.

(vi) $N\eta + m + 2 \leq \Phi(N\eta) + m - 1 \leq \Phi(N\eta) \cdot m \leq \Phi(N\eta \cdot m)$

Bemerkung zu Punkt (v) des obigen Lemmas. Aus der Voraussetzung folgt nicht $\eta \oplus \alpha_0 \lhd_x \eta \oplus \alpha$. Siehe hierzu die Erörterung auf Seite 66.

Kapitel 4

Kripke-Platek Mengenlehren und Zwischensysteme

4.1 Die Sprachen $\mathcal{L}_{\mathrm{RS(M)}}$ und $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}\,(\mathcal{K})}$

Die Sprachen der halbformalen Systeme RS(M) und RS($\mathcal{K}$) unterscheiden sich nur durch die Ordinalzahlen, die bei der Termbildung zugelassen sind, und dadurch, dass RS($\mathcal{K}$) Relationszeichen zum Kennzeichnen verschiedener Zulässigkeitsgrade besitzt. Daher können alle folgenden Definitionen uniform für beide Systeme genutzt werden. Dazu sei $\vartheta \in \{\mathrm{M}, \mathcal{K}\}$.

Sei $\mathcal{L}_\in$ die Sprache der Mengenlehre mit $\in$ als einzigem nichtlogischen Grundzeichen. $\mathcal{L}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{Ad}}$ enthält zusätzlich ein einstelliges Prädikatszeichen Ad. Bei $\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\mathrm{Ad}}$ fügen wir zu $\mathcal{L}_\in$ für jedes $\xi \in \mathrm{T}(\mathcal{K})$ ein einstelliges Prädikatszeichen Ad^ξ hinzu. Aus $\mathcal{L}^{\vartheta}_{\mathrm{Ad}}$ entsteht die Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\vartheta)}$ durch das Hinzufügen der RS(ϑ)–Terme, die in 4.1 definiert werden. x, y, z bezeichnen im folgenden Variablen, während u, v für Variablen oder für RS(ϑ)–Terme stehen.
Die Primformeln von $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(M)}$ sind $u \in v$, $\neg(u \in v)$, $\mathrm{Ad}(u)$ und $\neg\mathrm{Ad}(u)$. Bei $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\mathcal{K})}$ haben wir $u \in v$, $\neg(u \in v)$, $\mathrm{Ad}^\xi(u)$ und $\neg\mathrm{Ad}^\xi(u)$ für alle $\xi \in \mathrm{T}(\vartheta)$ als Primformeln. Die restlichen Formeln von $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\vartheta)}$ werden hieraus mit $\wedge$,$\vee$,$\forall$,$\exists$ gebildet. Die Negation wird durch die de Morganschen Regeln gebildet. Ebenso

sind $\mathcal{L}^{\vartheta}_{\mathrm{Ad}}$–Formeln definiert, wobei allerdings als Terme nur freie Variablen benutzt werden dürfen. Ein Quantor, der in der Form $\forall x\,(\neg(x \in v) \vee B(x))$ bzw. $\exists x\,(x \in v \wedge B(x))$ (mit $v \not\equiv x$) auftritt, heißt beschränkt. Eine Formel ohne unbeschränkten Quantor heißt Δ_0–Formel. Eine Σ_k–Formel (Π_k–Formel) ist eine $\mathcal{L}^{\vartheta}_{\mathrm{Ad}}$–Formel mit k alternierenden, unbeschränkten Quantoren, beginnend mit einem Existenzquantor (Allquantor), gefolgt von einem Δ_0–Kern. Die Δ_0–Formeln der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\vartheta)}$ heißen $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Formeln. A^u entsteht aus A durch Beschränkung aller unbeschränkten Quantoren auf u.
Die Länge $\mathrm{lh}(A)$ einer $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Formel A ist definiert als Anzahl der Zeichen $\in$,Ad,$\wedge$,$\vee$, die in A auftreten ($\neg$ wird also nicht gezählt, Quantoren treten in $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Formeln nur in beschränkter Form auf, erhöhen also die Anzahl der $\in$–Zeichen einer Formel). Dabei werden keine Zeichen berücksichtigt, die innerhalb einer definierenden Formel eines Terms auftreten. Die Termanzahl $\mathrm{nt}(A)$ einer $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Formel A ist die Anzahl der freien Variablen und $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Terme, die in A auftreten (mehrfaches Auftreten wird mehrfach gezählt).

Abkürzungen.

$A \to B :\equiv \neg A \vee B$	$A \leftrightarrow B :\equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$
$\forall x{\in}v\, A(x) :\equiv \forall x\,(x \in v \to A(x))$	$\exists x{\in}v\, A(x) :\equiv \exists x\,(x \in v \wedge A(x))$
$u \subseteq v :\equiv \forall x{\in}u\,(x \in v)$	$u = v :\equiv u \subseteq v \wedge v \subseteq u$
$u \neq v :\equiv \neg(u = v)$	$u \notin v :\equiv \neg(u \in v)$
$[u \neq v] :\equiv \neg u \subseteq v, \neg v \subseteq u$	$\mathrm{trans}(u) :\equiv \forall y{\in}u\, \forall x{\in}y\,(x \in y)$
$\lim(u) :\equiv \forall x{\in}u\, \exists y{\in}u\,(x \in y)$	$\mathrm{infinite}(u) :\equiv \lim(u) \wedge \exists x{\in}u\,(x \subseteq x)$

Definition 4.1 (RS (ϑ)–Terme)
Die $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Terme und ihre Schichten werden induktiv definiert.*

- *Für* $\alpha \in \mathrm{T}(\vartheta)$, $\alpha \leq \vartheta$ *ist* L_α *ein* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Term mit Schicht* $|\mathrm{L}_\alpha| = \alpha$.
- *Ist* $\phi(x, \vec{y})$ *eine* $\mathcal{L}^{\vartheta}_{\mathrm{Ad}}$*–Formel mit* $\mathrm{lh}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}) \leq \Phi(N\alpha)$, $FV(\phi) \subseteq \{x, \vec{y}\}$ *und sind* $\vec{a}$ $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Terme mit Schicht* $< \alpha < \vartheta$, $\mathrm{SC}(|\vec{a}|) \subseteq \mathrm{SC}(\alpha)$ *und* $\forall j\ (N|a_j| < N\alpha)$, *so ist* $[x \in \mathrm{L}_\alpha : \phi^{\mathrm{L}_\alpha}(x, \vec{a})]$ *ein* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Term* s *mit Schicht* $|s| = \alpha$.

Die Klasse aller $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Terme wird mit* $\mathcal{T}^\vartheta$ *bezeichnet und die Klasse aller* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Terme mit Schicht* $< \alpha$ *mit* $\mathcal{T}^\vartheta_\alpha$. $\varnothing$ *steht für* L_0.

Warum die Definition von Termen so starken Einschränkungen unterzogen werden muss, sieht man im Beweis von Lemma 5.2 (iv) und 6.1. In Teil (v) von Lemma 5.2 und im Beweis von Lemma 8.2 sieht man auch, wieso $\mathrm{lh}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}) \leq \Phi(N\alpha)$ gefordert wird.
Schreiben wir im Folgenden eine $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Formel in der Gestalt $\phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\vec{a})$, so beinhaltet dies, dass $\phi(\vec{a})$ eine $\mathcal{L}^\vartheta_{\mathrm{Ad}}$–Formel und $\vec{a} \in \mathcal{T}^\vartheta_\alpha$ ist.

Definition 4.2 *Für* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Terme* t *setzen wir* $\mathrm{stg}(t) := \{|t|\}$ *und für* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Formeln definieren wir induktiv*

- $\mathrm{stg}(\mathrm{Ad}^\xi(b)) := \mathrm{stg}(\mathrm{Ad}(b)) := \{|b|\}$
- $\mathrm{stg}(a \in b) := \{|a|, |b|\}$
- $\mathrm{stg}(A \vee B) := \mathrm{stg}(A) \cup \mathrm{stg}(B)$
- $\mathrm{stg}(\exists x{\in}a\, B(x)) := \{|a|\} \cup \mathrm{stg}(B(\varnothing))$
- $\mathrm{stg}(A) := \mathrm{stg}(\neg A)$ *für die restlichen Formeln* A

Zudem sei $\mathrm{stg}(0) := \mathrm{stg}(1) := \emptyset$, *sowie* $|0| := |1| := 0$. *Sei* Γ *eine Menge von* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Sätzen und* Θ *eine Menge von* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Formeln und Elementen von* $\mathcal{T}^\vartheta \cup \{0,1\}$.

- $\mathrm{stg}(\Theta) := \bigcup\{\mathrm{stg}(\iota) :\ \iota \in \Theta\}$
- $\vec{\mathrm{lh}}(\Gamma) := \{\mathrm{lh}(C) :\ C \in \Gamma\}$
- $\mathrm{stglh}(\Gamma) := \mathrm{stg}(\Gamma) \cup \vec{\mathrm{lh}}(\Gamma)$
- $\Theta, \iota :\equiv \Theta \cup \{\iota\}$ *für* $\iota \in \mathcal{T}^\vartheta \cup \{0,1\}$

Beispiel: $\mathrm{stg}(\mathrm{Ad}^\xi(\mathrm{L}_\kappa) \wedge \mathrm{L}_\gamma \in [x \in \mathrm{L}_\alpha : \mathrm{L}_\beta \in x]) = \{\alpha, \gamma, \kappa\}$. *Weder* β *noch* ξ *gehören zur* stg*–Menge.*

Definition 4.3 *Seien* a *und* b $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Terme mit* $|a| < |b|$.

$$a \mathrel{\mathring{\in}} b :\equiv \begin{cases} a \notin \varnothing & \textit{falls} \quad b \equiv \mathrm{L}_\beta \\ B(a) & \textit{falls} \quad b \equiv [x \in \mathrm{L}_\beta : B(x)] \end{cases}$$

$a \mathrel{\mathring{\in}} b$ hat unter der Standardinterpretation denselben Wahrheitswert wie $a \in b$. Obige Definition wurde nur getätigt, um eine uniforme Schreibweise bei Subformeln zu erzielen.

Definition 4.4 *Um den Herleitungskalkül elegant zu formulieren, wird jedem* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Satz eine Konjunktion oder Disjunktion von einfacheren* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Sätzen mit Indexmenge* $\mathrm{J} \subseteq \mathcal{T}^\vartheta \cup \{0,1\}$ *zugeordnet.*

- $A_0 \vee A_1 :\simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ *mit* $\mathrm{J} := \{0,1\}$
- $a \in b :\simeq \bigvee(t \mathrel{\mathring{\in}} b \wedge t = a)_{t\in\mathrm{J}}$ *mit* $\mathrm{J} := \mathcal{T}^\vartheta_{|b|}$
- $\exists x{\in}b\, A(x) :\simeq \bigvee(t \mathrel{\mathring{\in}} b \wedge A(t))_{t\in\mathrm{J}}$ *mit* $\mathrm{J} := \mathcal{T}^\vartheta_{|b|}$
- $\mathrm{Ad}(b) :\simeq \bigvee(t = b)_{t\in\mathrm{J}}$ *mit* $\mathrm{J} := \{\mathrm{L}_\kappa :\ \kappa \in \mathrm{REG}^{\leq M}\ \ \&\ \ \kappa \leq |b|\}$
- $\mathrm{Ad}^\xi(b) :\simeq \bigvee(t = b)_{t\in\mathrm{J}}$ *mit* $\mathrm{J} := \{\mathrm{L}_\nu :\ \nu \in \mathrm{M}^\xi\ \ \&\ \ \nu \leq |b|\}$
- $\neg A :\simeq \bigwedge(\neg A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$*, falls* $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ *eine Formel obiger Gestalt ist.*

Bei der Indexmenge J *im Fall* $\mathrm{Ad}(b)$ *ist natürlich* $\kappa \in \mathrm{T}(M)$ *stillschweigend vorausgesetzt, während bei* $\mathrm{Ad}^\xi(b)$ *die* ν *aus* $\mathrm{T}(\mathcal{K})$ *stammen.*

Definition 4.5 *Sei* $\mathcal{C} \in \{\Delta_0, \Sigma_k, \Pi_k :\ k < \omega\}$*.*

- *Die Menge aller* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Sätze* $A \equiv \phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\vec{a})$ *mit* $\phi(\vec{x}) \in \mathcal{C}$ *und* $\vec{a} \in \mathcal{T}_\alpha$ *wird mit* $\mathcal{C}(\alpha)$ *bezeichnet.*
- $\Sigma_{\leq n}(\alpha) := \Sigma_n(\alpha) \cup \{\Sigma_k(\alpha), \Pi_k(\alpha) :\ k < n\}$*. Analog ist* $\Pi_{\leq n}(\alpha)$ *definiert.*
- *Für* $A \equiv \phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\vec{a})$ *definieren wir* $A^{(u,\alpha)} :\equiv \phi^u(\vec{a})$ *und schreiben* A^β *für* A^{L_β} *und* $A^{(\beta,\alpha)}$ *für* $A^{(\mathrm{L}_\beta,\alpha)}$*.*

Bemerkung: (Endliche) Multimengen sind Äquivalenzklassen von endlichen Sequenzen unter Permutation, also Folgen, bei denen es nicht auf die Reihenfolge ankommt, bzw. Mengen, bei denen es auf die Vielfachheiten der Elemente ankommt.

Definition 4.6 (Rang eines RS (ϑ)–Satzes) *Der Rang eines* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Satzes wird induktiv definiert.*

- $\mathrm{rk}(\mathrm{Ad}(b)) := \mathrm{rk}(\mathrm{Ad}^\xi(b)) := \omega(3|b| + 2)$

- $\mathrm{rk}(a \in b) := \max\{\omega(3|a|+2), \omega(3|b|+1)\}$
- $\mathrm{rk}(A \vee B) := \max\{\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)\} + 1$
- $\mathrm{rk}(\exists x{\in}a\, B(x)) := \begin{cases} \max\{\omega 3|a|, \mathrm{rk}(B(\varnothing)) + 2\} & \textit{falls } a \equiv \mathrm{L}_\alpha \\ \max\{\omega(3|a|+1), \mathrm{rk}(B(\varnothing))\} & \textit{falls } a \not\equiv \mathrm{L}_\alpha \end{cases}$
- $\mathrm{rk}(A) := \mathrm{rk}(\neg A)$ *für die restlichen Sätze* A
- $\|\Lambda\| := \omega^{\mathrm{rk}(A_1)} \oplus \cdots \oplus \omega^{\mathrm{rk}(A_n)}$, *falls* Λ *die Multimenge* $(A_1, \cdots, A_n)$ *ist.*

Definition 4.7 (Norm eines RS (ϑ)–Satzes) *Die Norm eines* RS(ϑ)–*Satzes wird induktiv definiert.*

- $\mathrm{no}(\mathrm{Ad}(b)) := \mathrm{no}(\mathrm{Ad}^\xi(b)) := \omega^{3|b|+2}$
- $\mathrm{no}(a \in b) := \omega^{3|a|+2} \oplus \omega^{3|b|+1}$
- $\mathrm{no}(A \vee B) := \mathrm{no}(A) \oplus \mathrm{no}(B) + 2$
- $\mathrm{no}(\exists x{\in}a\, B(x)) := \begin{cases} \omega^{3|a|} \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing)) + 1 & \textit{falls } a \equiv \mathrm{L}_\alpha \\ \omega^{3|a|+1} \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing)) & \textit{falls } a \not\equiv \mathrm{L}_\alpha \end{cases}$
- $\mathrm{no}(A) := \mathrm{no}(\neg A)$ *für die restlichen Sätze* A
- $\mathrm{No}(\Lambda) := \omega^{\mathrm{no}(A_1)} \oplus \cdots \oplus \omega^{\mathrm{no}(A_n)}$, *falls* Λ *die Multimenge* $(A_1, \cdots, A_n)$ *ist.*

Lemma 4.8 *Sei* A *ein* RS(ϑ)–*Satz und* $\gamma \in \mathrm{EPS}$.

(i) *Ist* $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ *oder* $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$, *so gilt* $\mathrm{rk}(A_\iota) < \mathrm{rk}(A)$ *für* $\iota \in \mathrm{J}$.

(ii) $\mathrm{stg}(A) < \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{no}(A), \mathrm{rk}(A) < \gamma$

(iii) $\mathrm{rk}(A) = \gamma \quad \Leftrightarrow \quad A \equiv \exists x{\in}\mathrm{L}_\gamma\, B(x)$ *oder* $A \equiv \forall x{\in}\mathrm{L}_\gamma\, B(x)$ $\&\ \mathrm{stg}(B(\varnothing)) \subseteq \gamma$

(iv) $\mathrm{rk}(A) \lhd^1 \mathrm{no}(A)\ \&\ \mathrm{lh}(A) \lhd^1 \mathrm{no}(A)$

(v) $\mathrm{rk}(A) < \vartheta + \omega$ *und* $\mathrm{No}(\Lambda) < \varepsilon_{\vartheta+1}$ *gilt für jede Multimenge* Λ *von* RS(ϑ)–*Sätzen.*

(vi) $\mathrm{no}(A(s)) \trianglelefteq_s \mathrm{no}(A(t))$ *gilt für alle* $s \in \mathcal{T}^\vartheta_{|t|}$.

(vii) *Zu jeder* $\mathcal{L}^\vartheta_{\mathrm{Ad}}$–*Formel* $\phi(\vec{x})$ *gibt es ein* $n < \omega$, *so dass* $\mathrm{rk}(\phi^\gamma(\vec{a})) \le \gamma + n$ *für alle* $\vec{a} \in \mathcal{T}^\vartheta_\gamma$ *gilt.*

Die *Beweise* von (ii), (iv) und (v) folgen direkt aus den entsprechenden Definitionen. Für (i) und (iii) siehe [Glaß 1990] Lemma 11.7 und 11.15.

(vi) Tritt x nur einmal in $A(x)$ auf, so gilt $\mathrm{No}(A(s)) < \mathrm{No}(A(t))$ und $N\mathrm{No}(A(s)) \leq N\mathrm{No}(A(t)) + 3N|s| < \Phi(N\mathrm{No}(A(t)) + N|s|)$. Die Behauptung in ihrer Allgemeinheit folgt durch Iteration dieses Argumentes.

(vii) Man addiere die Anzahl der unbeschränkten Quantoren von $\phi(\vec{x})$ zu den Auftreten der Zeichen $\wedge$ und $\vee$ in $\phi(\vec{x})$, um ein solches n zu erhalten.

4.2 Kripke-Platek Mengenlehren

Die nach Saul Kripke und Richard Platek benannte Mengenlehre KP stellt ein fruchtbares Teilsystem der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre dar. Besonders bei Hinzunahme starker Reflexionsprinzipien kann in dieser Theroie ein Großteil der für die „Praxis“ relevanten Mengenlehre entwickelt werden. Obwohl KPω (KP+Existenz einer unendlichen Menge) eine imprädikative Theorie ist, sind die Axiome so vorsichtig gewählt, dass man sich vom Prädikativen nicht weit entfernt. Dies emöglicht eine gute Zugriffsmöglichkeit über die von Wolfram Pohlers entwickelte Methode der lokalen Prädikativität, die als Grundprinzip dieser Analyse fungiert.

Die **Axiome von KP$\boldsymbol{\omega}$** sind die Allabschlüsse folgender Formeln:

$$
\begin{array}{rll}
\text{(Ext)} & s = t \rightarrow s \in r \rightarrow t \in r & \\
\text{(Fund)} & \forall x(\forall y{\in}x\, \phi(y) \rightarrow \phi(x)) \rightarrow \forall x\, \phi(x) & \\
\text{(Paar)} & \exists z\,(s \in z \wedge t \in z) & \\
\text{(Verein)} & \exists z\, \forall x{\in}s\, \forall y{\in}x\, (y \in z) & \\
\text{(Unendl)} & \exists z\, \mathrm{infinite}(z) & \\
(\Delta_0\text{–Sep}) & \exists z\,(\forall x{\in}z\,(x \in s \wedge \phi(x)) \wedge \forall x{\in}s\,(\phi(x) \rightarrow x \in z)) & \text{für } \phi \in \Delta_0 \\
(\Delta_0\text{–Koll}) & \forall x{\in}s\, \exists y\, \phi(x,y) \rightarrow \exists z\, \forall x{\in}s\, \exists y{\in}z\, \phi(x,y) & \text{für } \phi \in \Delta_0
\end{array}
$$

KPM entsteht aus KPω durch Auslassen von (Unendl) und Hinzufügen von

(Ad1) $\mathrm{Ad}(s) \to trans(s)$
(Ad2) $\mathrm{Ad}(s) \wedge \mathrm{Ad}(t) \to (s \in t \vee s = t \vee t \in s)$
(Ad3) $\mathrm{Ad}(s) \to \phi^s$ für jede Instanz ϕ von (Paar), (Verein), (Unendl), (Δ_0–Sep), (Δ_0–Koll)
(Mahlo) $\forall x\, \exists y\, \phi(x,y) \to \exists z\, (\mathrm{Ad}(z) \wedge \forall x{\in}z\, \exists y{\in}z\, \phi(x,y))$ für $\phi \in \Delta_0$

KP+(Π_3-Ref) entsteht aus KPω durch Ersetzung der (Δ_0–Koll) durch das folgende Schema.

(Π_3–Ref) $\phi \to \exists z\, (\mathrm{trans}(z) \wedge z \neq \varnothing \wedge \phi^z)$ für $\phi \in \Pi_3$

4.3 Die Zwischensysteme RS $(\vartheta)^\star$

Die von Wilfried Buchholz ersonnenen Zwischensysteme RS(ϑ) bieten ein willkommenes Hilfsmittel bei der Einbettung. In ihnen ist ein einfaches Argumentieren möglich, ohne sich um Ordinalzahlschranken kümmern zu müssen. Durch Kapitel 6 werden die Sternherleitungen in die infinitären Systeme übertragen, in denen die Ordinalzahlanalyse stattfindet.
Um den verfeinerten Operatoren, die in dieser Arbeit in den infinitären Systemen verwendet werden, genüge zu tun, muss bei der $(\bigvee)^\star$–Regel gegenüber [Buchholz 1991a] eine Einschränkung ausgesprochen werden. Die Anzahl der Prämissen muss sich mit Hilfe einer Information aus der Konklusion beschränken lassen. Dieser Eingriff macht sich im negativen Sinne nur beim Beweis des Gleichheitslemmas bemerkbar. Aber selbst dort ist die Zusatzbedingung in natürlicher Weise erfüllt.

Definition 4.9 *Für $X \subseteq ON$ sei*

$$X^\star := X \cup \{\omega\} \cup \{\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n : n \in X \ \&\ \xi_1, \ldots, \xi_n \in X\} \\ \cup \{m{\in}\omega : \exists n{\in}X \cap \omega\, (m \le n+3)\}.$$

Diese Definition weicht von der in [Buchholz 1991a] ab. Die hinzugekommene letzte Komponente wird für den Beweis von Lemma 8.6 benutzt. Die vorletzte Komponente ist so erweitert, dass man (Δ_0–Sep) in den unten definierten

Sternkalkülen herleiten kann. Dies ist aufgrund der eingeschränkten Möglichkeiten bei der Termbildung schwieriger, als in der Analyse von Wilfried Buchholz.

Definition 4.10 (Die halbformalen Systeme RS(M)* und RS$\,(\mathcal{K})^\star$)
Die Terme und Formeln von $\mathrm{RS}(\vartheta)^\star$ *sind die* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Terme und* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Formeln. Die* $\mathrm{RS}(\vartheta)^\star$*–Herleitungen werden von den folgenden Herleitungsregeln bzw. Axiomen generiert.*

$$(\bigwedge)^\star \qquad \frac{\ldots\Lambda, A_\iota \ldots (\iota \in \mathrm{J})}{\Lambda, \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}}$$

$$(\bigvee)^\star \qquad \frac{\Lambda, A_{\iota_1}, \cdots, A_{\iota_n}}{\Lambda, \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}} \quad \textit{falls} \quad \begin{array}{l} \iota_1, \ldots, \iota_n \in \mathrm{J} \\ \&\, \mathrm{stg}(\iota_1, \ldots, \iota_n) \subseteq \mathrm{stglh}(\Lambda, \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}})^\star \\ \&\, 1 \le n \le 2 \cdot max\{\mathrm{nt}(B) : B \in \Lambda\} \end{array}$$

$$(\mathrm{Fund})^\star \qquad \Lambda, \exists x{\in}\mathrm{L}_\alpha\, (\forall y{\in}x\, A(y) \,\wedge\, \neg A(x)), \forall x{\in}\mathrm{L}_\alpha\, A(x)$$

Das System $\mathrm{RS}(M)^\star$ *kennt im Gegensatz zu* $\mathrm{RS}(\mathcal{K})^\star$ *darüber hinaus*

$$(\mathrm{Ad})^\star \qquad \frac{\ldots\Lambda, B(\mathrm{L}_\kappa)\ldots(\kappa \le |a|)}{\Lambda, \mathrm{Ad}(a) \,\to\, B(a)}$$

$$(\mathrm{Ref})^\star \qquad \Lambda, A \,\to\, \exists z{\in}\mathrm{L}_\kappa\, A^{(z,\kappa)} \quad \textit{falls } A \in \Sigma_{\le 1}(\kappa)$$

Wir benutzen die folgenden Schreibweisen.

$$\mathrm{RS}(M)\overset{\star}{\underset{\rho}{\vdash}} \Lambda \;:\Leftrightarrow\; \begin{cases} \textit{Es gibt eine } \mathrm{RS}(M)^\star\textit{–Herleitung } d \textit{ von } \Lambda, \textit{ so dass} \\ \mathrm{rk}(B(a)) < \rho \textit{ bei jedem } (\mathrm{Ad})^\star\textit{–Schluss in } d \textit{ mit} \\ \textit{Hauptformel } \mathrm{Ad}(a) \,\to\, B(a) \textit{ gilt.} \end{cases}$$

$$\mathrm{RS}(\mathcal{K})\overset{\star}{\vdash} \Lambda \quad :\Leftrightarrow \quad \textit{es gibt eine } \mathrm{RS}(\mathcal{K})^\star\textit{–Herleitung von } \Lambda.$$

$$\overset{\star}{\vdash} \Lambda \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Lambda \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\mathcal{K})} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{RS}(\mathcal{K})\overset{\star}{\vdash} \Lambda \\ \Lambda \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{RS}(M)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{RS}(M)\overset{\star}{\underset{0}{\vdash}} \Lambda \quad \textit{ohne (Ref)}^\star \end{cases}$$

Bei einer $\mathrm{RS}(\vartheta)^\star$*–Herleitung* $\overset{\star}{\vdash} \Lambda$ *wird* Λ *als Multimenge interpretiert.*

Lemma 4.11

(i) $\stackrel{\star}{\vdash} A, \neg A$

(ii) $\stackrel{\star}{\vdash} a \subseteq a$ *und* $\stackrel{\star}{\vdash} a = a$

(iii) $\stackrel{\star}{\vdash} a \in \mathrm{L}_\gamma$ *und* $\stackrel{\star}{\vdash} \mathrm{L}_\gamma \neq \varnothing$ *falls* $|a| < \gamma$

(iv) $\stackrel{\star}{\vdash} trans(\mathrm{L}_\alpha)$

(v) $\stackrel{\star}{\vdash} \exists x{\in}\mathrm{L}_\alpha\, infinite(x)$ *falls* $\alpha > \omega$

(vi) $\stackrel{\star}{\vdash} \mathrm{Ad}(\mathrm{L}_\kappa)$, *falls* $\kappa \in \mathrm{REG}^{\leq M}$

(vii) $\stackrel{\star}{\vdash} [s_1 \neq t_1], \cdots, [s_n \neq t_n], \neg A(\vec{s}), A(\vec{t})$,
falls jedes x_j *höchstens einmal in der* $\mathcal{L}_\in$*–Formel* $A(\vec{x})$ *auftritt.*

Beweise sind in [Buchholz 1991a] Lemma 2.4, 2.5, 2.7 und 2.8. Die zusätzliche Beschränkung beim $(\bigvee)^\star$–Schluss kommt hier noch nicht zum Tragen. Nur beim Beweis des Gleichheitslemmas wird in [Buchholz 1991a] von mehreren Prämissen zu einer Konklusion geschlossen.

Lemma 4.12 (Gleichheitslemma)
Seien $x_1, \ldots, x_n$ *genau die freien Variablen der* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Formel* $A(\vec{x})$*. Dann gilt für* $\vec{s}, \vec{t} \in \mathcal{T}$

$$\stackrel{\star}{\vdash} s_1 \neq t_1, \ldots, s_n \neq t_n, \neg A(\vec{s}), A(\vec{t}).$$

Beweis. Sei k_j die Anzahl der Auftreten der Variablen x_j in der Formel A. $\tilde{A}(\vec{y})$ entstehe aus $A(\vec{x})$ dadurch, dass man (für $j = 1, \ldots, n$) die k_j Auftreten der Variablen x_j durch paarweise verschiedenen Variablen $y_1^j, \ldots, y_{k_j}^j$ ersetzt. Dann ergibt Lemma 4.11 (vii)

$$\stackrel{\star}{\vdash} \underbrace{[s_1 \neq t_1], \cdots, [s_1 \neq t_1]}_{k_1\text{-mal}}, \cdots, \underbrace{[s_n \neq t_n], \cdots, [s_n \neq t_n]}_{k_n\text{-mal}}, \neg A(\vec{s}), A(\vec{t}),$$

wobei man ganz penibel $\tilde{A}(\underbrace{t_1, \ldots, t_1}_{k_1\text{-mal}}, \ldots, \underbrace{t_n, \ldots, t_n}_{k_n\text{-mal}})$ anstelle von $A(\vec{t})$ schreiben müßte und Analoges für $\neg A(\vec{s})$. Mit n $(\bigvee)^\star$–Schlüssen kann die Behauptung hergeleitet werden. Da in $A(\vec{x})$ genau $\mathrm{nt}(A)$–viele Variablen auftreten, gilt $k_j \le \mathrm{nt}(A)$. Da sich hinter der Abkürzung $[s_j \neq t_j]$ zwei $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Formeln verbergen ist die Bedingung an die Anzahl der Prämissen für den $(\bigvee)^\star$–Schluss mit $2 \cdot k_j \le 2 \cdot \mathrm{nt}(A(\vec{t}))$ erfüllt. Die stg–Bedingung ist bei einem Schluss mit Hauptformel $A_0 \vee A_1$ trivialerweise erfüllt, denn es gilt $\mathrm{stg}(0) = \mathrm{stg}(1) = \emptyset \subseteq X^\star$ für alle $X \subseteq ON$.

Lemma 4.13

(i) $\mathop{\mid\!\!\!-}^{\star}\ (\mathit{Ext})^\lambda \wedge (\mathit{Paar})^\lambda \wedge (\mathit{Verein})^\lambda \wedge (\mathit{Fund})^\lambda \wedge (\Delta_0\text{–}\mathit{Sep})^\lambda$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{AP}$

(ii) $\mathrm{RS}(M) \mathop{\mid\!\!\!-}^{\star}_{0} (\Delta_0\text{–}\mathit{Koll})^\kappa$ *für alle* $\kappa \in \mathrm{REG}^{\le M}$

(iii) $\mathrm{RS}(M) \mathop{\mid\!\!\!-}^{\star}_{\lambda} (\mathrm{Ad1})^\lambda \wedge (\mathrm{Ad2})^\lambda \wedge (\mathrm{Ad3})^\lambda$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{EPS}$

Der *Beweis* von (i) ist in [Buchholz 1991a] Satz 2.9 a). Nur der Beweis von $\mathop{\mid\!\!\!-}^{\star} (\Delta_0\text{–Sep})^\lambda$ bedarf aufgrund der Einschränkungen bei der Definition der $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Terme in dieser Arbeit einer kleinen Anpassung. Für die Schicht des zu konstruierenden Terms wähle man $\delta := |a| \oplus |\vec{c}| + lh(\phi)$. Wegen $a, \vec{c} \in \mathcal{T}_\lambda$ und $\lambda \in \mathrm{AP}$ gilt $\delta < \lambda$. Dann kann man den $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Term $d :\equiv [x \in \mathrm{L}_\delta : x \in a \wedge \phi(x, \vec{c})]$ definieren. Die nachfolgende $(\bigvee)^\star$–Regel kann wegen $\delta \in \mathrm{stglh}(\exists x{\in}\mathrm{L}_\lambda\, \forall x{\in}y\, (x \in a \wedge \phi(x, \vec{c})) \wedge \forall x{\in}a\, (\phi(x, \vec{c}) \rightarrow x \in y))^\star$ angewendet werden. Ansonsten kann der Beweis wörtlich übernommen werden.

(ii) folgt aus einer Anwendung des Axioms $(\mathrm{Ref})^\star$.

(iii) Sei ϕ ein Axiom (Ad1) oder (Ad3). Es gilt also $\phi \equiv \forall x\, (\mathrm{Ad}(x) \rightarrow \chi(x))$ mit $\chi(x) \in \Delta_0$ und nach Lemma 4.11 (iv), (v) und Teil (i), (ii) dieses Lemmas gilt $\mathop{\mid\!\!\!-}^{\star}_{0} \chi(\mathrm{L}_\kappa)$ für $\kappa \in \mathrm{REG}^{\le M}$. Wegen $\lambda \in \mathrm{EPS}$ gilt $\forall a{\in}\mathcal{T}^M_\lambda\, (\mathrm{rk}(\chi(a)) < \lambda)$, also erhalten wir mit $(\mathrm{Ad})^\star$ für alle $a \in \mathcal{T}^M_\lambda$: $\mathop{\mid\!\!\!-}^{\star}_{\lambda} \mathrm{Ad}(a) \rightarrow \chi(a)$ und es folgt $\mathop{\mid\!\!\!-}^{\star}_{\lambda} \phi^\lambda$.

Nun zu (Ad2). Aus Lemma 4.11 (ii), (iii) folgt $\forall \kappa, \pi\, (\mathop{\mid\!\!\!-}^{\star} \mathrm{L}_\kappa \in \mathrm{L}_\pi \vee \mathrm{L}_\kappa = \mathrm{L}_\pi \vee \mathrm{L}_\pi \in \mathrm{L}_\kappa)$. Mit zwei Anwendungen von $(\mathrm{Ad})^\star$ erhalten wir für alle $a, b \in \mathcal{T}^M_\lambda$: $\mathop{\mid\!\!\!-}^{\star}_{\lambda} \mathrm{Ad}(a) \wedge \mathrm{Ad}(b) \rightarrow (a \in b \vee a = b \vee b \in a)$ und so folgt $\mathop{\mid\!\!\!-}^{\star}_{\lambda} \forall x{\in}\mathrm{L}_\lambda\, \forall y{\in}\mathrm{L}_\lambda\, (\mathrm{Ad}(x) \wedge \mathrm{Ad}(y) \rightarrow (x \in y \vee x = y \vee y \in x))$.

Kapitel 5

Operator kontrollierte Herleitungen

Wir führen zunächst den Begriff Operator ein und definieren dann die verfeinerten Operatoren $\mathcal{H}^\eta$. Die Entwicklung dieser Verfeinerung ist das wesentliche Mittel, um aus einer Ordinalzahlanalyse mit Operator kontrollierten Herleitungen eine Charakterisierung der beweisbar rekursiven Funktionen zu gewinnen. Anschließend werden die infinitären Systeme dargeboten, in denen Schnittelimination möglich ist. Darauf folgen Beweise der einfacheren Eigenschaften dieser Kalküle.

Die Verfeinerung der Operatoren ist abhängig von der zugrundeliegenden Normfunktion $N \in \{N_M, N_\mathcal{K}\}$. Um die Formeln nicht mit Indizes überzustrapazieren, machen wir diese Abhängigkeit in den Schreibweisen $\lhd_x^Y$ und $\mathcal{H}^\eta$ nicht explizit sichtbar. Es ist klar, dass beim Kalkül $\mathrm{RS}(M)$ die Operatoren $\mathcal{H}^\eta$ mit Norm N_M und bei $\mathrm{RS}(\mathcal{K})$ mit Norm $N_\mathcal{K}$ verwendet werden.

Auch in diesem Kapitel betrachten wir nur Ordinalzahlen aus einem Bezeichnungssystem, d.h. mit $\mathrm{Pow}^{<\omega}(\mathrm{ON})$ ist immer $\mathrm{Pow}^{<\omega}(\mathrm{ON}) \cap \mathrm{T}(\vartheta)$ gemeint.

Definition 5.1 (Operatoren)
Eine Abbildung $\mathcal{H} : \mathrm{Pow}^{<\omega}(\mathrm{ON}) \to \mathrm{Pow}(\mathrm{ON})$ *heißt Operator, falls sie monoton ist, d.h. wenn* $X \subseteq X' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(X) \subseteq \mathcal{H}(X')$ *gilt. Gut nennen wir einen Operator* $\mathcal{H}$*, der zusätzlich für alle* $X \in \mathrm{Pow}^{<\omega}(\mathrm{ON})$

(H0) $\{0\} \cup X \subseteq \mathcal{H}(X)$

(H1) $X' \subseteq \mathcal{H}(X) \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}(X') \subseteq \mathcal{H}(X)$

(H2) $\forall n{\in}\omega\, \forall\vec{\alpha}\, (\, \omega^{\alpha_0} \oplus \cdots \oplus \omega^{\alpha_n} \in \mathcal{H}(X) \quad\Leftrightarrow\quad \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{H}(X)\,)$

(H3) $\alpha, \beta \in \mathcal{H}(X) \quad\Rightarrow\quad \varphi\alpha\beta \in \mathcal{H}(X)$

erfüllt. Wir setzen $\vee X := \max\{N\xi :\ \xi \in X\}$ *und für eine endliche Menge* Θ *von* $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Sätzen und Elementen von* $\mathcal{T}^\vartheta \cup \{0,1\}$ *sei* $\vee\Theta := \vee\mathrm{stg}(\Theta)$*. Zu gegebenem Operator* $\mathcal{H}$ *werden folgende Relationen und Operatoren gebildet.*

- $\mathcal{H}[\Theta] : X \mapsto \mathcal{H}(\mathrm{stg}(\Theta) \cup X)$
- $\lhd_x^Y := TC\,\{(\alpha,\beta) \in Y \times Y :\ \alpha \lhd_x^{N,1} \beta\}$
- $\mathcal{H}^\eta : X \mapsto \mathcal{H}(X) \cap \{\alpha :\ \alpha \lhd_{\vee X}^{\mathcal{H}(X)} \eta\}$

Wenn wir $\mathcal{H}$ *mit einem oberen Index schreiben, setzen wir dabei stillschweigend voraus, dass* $\mathcal{H}$ *ein guter Operator ist.*

Abkürzungen. Ist keine Verwechselung zu befürchten, schreiben wir $\mathcal{H}$ anstelle von $\mathcal{H}(\emptyset)$, z.B. bei $\alpha \in \mathcal{H}$ oder bei $\mathrm{stg}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}$. Des Weiteren benutzen wir folgende Schreibweisen:

- $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}' \quad :\Leftrightarrow \quad \forall X{\in}\mathrm{Pow}^{<\omega}(\mathrm{ON})\ \big(\mathcal{H}(X) \subseteq \mathcal{H}'(X)\big)$
- $\alpha \lhd_\iota \eta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha \lhd_{|\iota|} \eta$
- $\alpha \lhd_\Theta \eta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha \lhd_{\vee\Theta} \eta$
- $\eta_0 \lhd_\Theta \eta_1$ in $\mathcal{H} \quad :\Leftrightarrow \quad \eta_0 \lhd_\Theta^{\mathcal{H}[\Theta]} \eta_1$

Die letzte Schreibweise benutzen wir auch für Ungleichungsketten:

$$\eta_0 \lhd_{\Theta_0} \eta_1 \lhd_{\Theta_1} \cdots \lhd_{\Theta_{n-1}} \eta_n \ \text{ in } \mathcal{H}$$

steht für $\forall i{<}n\, (\eta_i \lhd_{\Theta_i} \eta_{i+1}$ in $\mathcal{H})$ und impliziert also $\mathcal{H}^{\eta_0}[\Theta] \subseteq \mathcal{H}^{\eta_n}[\Theta]$, falls $\bigcup_i \Theta_i \subseteq \Theta$ ist.

Die Rechnungen mit der $\lhd$–Relation sind sehr elementar, aber von Zeit zu Zeit doch etwas verwickelt. Damit die Abschätzungen trotzdem leicht nachzuvollziehen sind, werden sie immer in folgender Weise ausgeführt. In jedem Schritt wird entweder die Relation $\lhd_\Theta$ (ohne oberen Index 1) notiert. Dann wird nur ein Summand durch einen anderen ersetzt, wobei man aus einer

Voraussetzung weiss, dass diese beiden Summanden in der $\lhd_\Theta$–Beziehung zueinander stehen. Diese Operation ist nach Lemma 3.33 (iv) zulässig. In jedem anderen Fall wird nur die Relation $\lhd^1_x$ eingesetzt. Die Überprüfung kann durch einfaches Ausrechnen geschehen. In nicht-trivialen Fällen ist die Rechnung ausgeführt.
Die zusätzliche Bedingung, die das Anhängsel „in $\mathcal{H}$“ mit sich bringt, ist zwar für die Analyse von entscheidender Bedeutung[1], aber nichtsdestotrotz ist sie immer aus simplen Gründen erfüllt. Die guten Abschlusseigenschaften guter Operatoren garantieren, dass man bei den Rechnungen nicht den vom Operator vorgegebenen Rahmen verlässt.

Bemerkungen.

- Gute Operatoren sind abgeschlossen gegen $\otimes$.
- Mit $\mathcal{H}$ ist auch $\mathcal{H}[\Theta]$ gut.
- $\mathcal{H}^\eta$ ist nicht gut, selbst wenn $\mathcal{H}$ es ist.
- Ist $\mathcal{H}^\eta \neq \emptyset$, so gilt $\eta \in \mathcal{H}$ und $\eta > 0$.

Lemma 5.2 *Sei* $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ *oder* $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$.

(i) $\mathcal{H}^\eta[\Theta,\iota][\iota] = \mathcal{H}^\eta[\Theta,\iota]$

(ii) $|\iota| \in \mathcal{H}^\eta[\Theta] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^\eta[\Theta,\iota] \subseteq \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+1}[\Theta]$

(iii) $\mathrm{stglh}(A) \subseteq \mathcal{H}^\eta[\Theta] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rk}(A) \in \mathcal{H}^{\eta\otimes\omega^2}[\Theta]$

(iv) $\mathrm{stg}(A) \subseteq \mathcal{H}^\eta[\Theta] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{stg}(A_\iota) \subseteq \mathcal{H}^\eta[\Theta,\iota]$ *für alle* $\iota \in \mathrm{J}$

(v) $\mathrm{stglh}(A) \subseteq \mathcal{H}^\eta[\Theta] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{lh}(A_\iota) \in \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta]$ *für alle* $\iota \in \mathrm{J}$

Beweis. (i) ist klar.

(ii) Wegen $|\iota| \in \mathcal{H}^\eta[\Theta]$ gilt $|\iota| \in \mathcal{H}[\Theta]$, also $\mathcal{H}[\Theta,\iota] = \mathcal{H}[\Theta]$. (Nach der Definition von $\mathcal{H}^\eta$ haben wir vereinbart, dass dabei der zugrundeliegende Operator immer ein guter ist. Daher konnte ($\mathcal{H}1$) eingesetzt werden.) Sei $\alpha \in \mathcal{H}^\eta[\Theta,\iota]$ gegeben, d.h. es gibt $\eta_0,\ldots,\eta_n$ aus $\mathcal{H}[\Theta]$ mit $\alpha = \eta_0 \lhd^1_{\Theta,\iota} \cdots \lhd^1_{\Theta,\iota} \eta_n = \eta$. Für $i < n$ gilt also $N(\eta_i \oplus |\iota|+1) \leq \Phi(N\eta_{i+1} + \max\{\vee\Theta, N|\iota|\}) + N|\iota| + 1 \leq \Phi(N\eta_{i+1} +$

[1] Sie ermöglicht die η–Kollabierung 8.5.

$N|\iota|+\vee\Theta)+N|\iota|+1 \leq \Phi(N\eta_{i+1}+N|\iota|+1+\vee\Theta) = \Phi(N(\eta_{i+1}\oplus|\iota|+1)+\vee\Theta)$. Damit haben wir $\alpha \lhd^1 \eta_0 \oplus |\iota|+1 \lhd^1_\Theta \cdots \lhd^1_\Theta \eta_n \oplus |\iota|+1 = \eta \oplus |\iota|+1$. Mit η_i ist auch $\eta_i \oplus |\iota|+1 \in \mathcal{H}[\Theta]$, also gilt $\alpha \lhd^{\mathcal{H}[\Theta]}_\Theta \eta \oplus |\iota|+1$. Aus der Voraussetzung $|\iota| \in \mathcal{H}^\eta[\Theta]$ folgt $\eta\oplus|\iota|+1 \lhd^{\mathcal{H}[\Theta]}_\Theta \eta\cdot 2+1$, also haben wir $\alpha \in \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+1}[\Theta]$ gezeigt.

(iii) Durch Induktion nach A zeigt man $\mathrm{rk}(A) \lhd^{\mathcal{H}[\Theta]}_\Theta \omega\cdot(3\eta+3)\cdot\mathrm{lh}(A)$. Daraus erhält man die Behauptung durch $\omega\cdot(3\eta+3)\cdot\mathrm{lh}(A) \lhd^1 \omega\cdot(3\eta+4)+\mathrm{lh}(A) \lhd_\Theta \omega\cdot(3\eta+4)\oplus\eta \lhd^1 \eta\otimes\omega^2$ in $\mathcal{H}$.

(iv) Diese Aussage ist nicht direkt klar, da in A_ι auch außer ι Terme auftreten können, die nicht in A auftreten, d.h. es gilt nicht immer $\mathrm{stg}(A_\iota) \subseteq \mathrm{stg}(A)\cup\{|\iota|\}$. Aussage (iv) gilt nur aufgrund der Einschränkung für innere Terme bei der Termdefinition 4.1. Sei $\iota \equiv [x \in \mathrm{L}_{|\iota|} : B(x)]$ und t ein Term in $B(x)$. Wegen der Güte von $\mathcal{H}$ und $\mathrm{SC}(|t|) \subseteq \mathrm{SC}(|\iota|)$ gilt $|t| \in \mathcal{H}[\Theta,\iota]$. Es gibt einen Term in A mit Schicht β, so dass $|\iota| \leq \beta$ gilt. Im Verein mit $\beta \in \mathrm{stg}(A) \subseteq \mathcal{H}^\eta[\Theta]$ folgt $|t| < |\iota| < \eta$. Da für t außerdem die Bedingung $N|t| < N|\iota|$ gilt, haben wir insgesamt $|t| \in \mathcal{H}^\eta[\Theta,\iota]$ nachgewiesen.

(v) Wegen $0 < \mathrm{lh}(A) < \eta$ gilt $\eta \geq 2$.

- $A \equiv \mathrm{Ad}(a)$ oder $A \equiv \mathrm{Ad}^\xi(a)$: $\mathrm{lh}(\iota = a) = 5 \unlhd^1 \eta\cdot 2+4$
- $A \equiv a \in \mathrm{L}_\gamma$: $\mathrm{lh}(\iota \notin \varnothing \to \iota = a) = 7 \lhd^1 \eta\cdot 2+4$
- $A \equiv a \in [x \in \mathrm{L}_\gamma : F(x)]$: $\mathrm{lh}(F(\iota) \wedge \iota = a)) \lhd^1 \gamma+6 \lhd_\Theta \eta+6 \unlhd^1 \eta\cdot 2+4$ in $\mathcal{H}$

  Dabei gilt $\mathrm{lh}(F)\lhd^1\gamma$ nach Definition der $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Terme und $\gamma \in \mathrm{stg}(A) \subseteq \mathcal{H}^\eta[\Theta]$ nach Voraussetzung.
- $A \equiv A_0 \vee A_1$: $\mathrm{lh}(A_\iota) \lhd^1 \mathrm{lh}(A) \lhd_\Theta \eta$ in $\mathcal{H}$
- $A \equiv \exists x{\in}\mathrm{L}_\gamma\, B(x)$: $\mathrm{lh}(\iota \notin \varnothing \wedge B(\iota)) = \mathrm{lh}(A)+1 \lhd_\Theta \eta+1$ in $\mathcal{H}$
- $A \equiv \exists y{\in}[x \in \mathrm{L}_\gamma : F(x)]\, B(y)$: $\mathrm{lh}(F(\iota) \wedge B(\iota)) \lhd^1 \gamma+\mathrm{lh}(B)+1 \lhd_\Theta \eta\cdot 2+4$ in $\mathcal{H}$

  Dabei gilt $\mathrm{lh}(F)\lhd^1\gamma$ nach Definition der $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Terme und $\gamma \in \mathrm{stg}(A) \subseteq \mathcal{H}^\eta[\Theta]$ nach Voraussetzung.

5.1 Das infinitäre System RS(M)

Definition 5.3 *Wir definieren die Herleitungsrelation der Operator kontrollierten Herleitungen durch Rekursion nach der Herleitungslänge α.*

$$\mathcal{H}\big|\!\frac{\alpha}{\rho}\;\Gamma \quad \textit{gilt, falls} \quad \{\alpha\} \cup \mathrm{stg}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}$$

und einer der folgenden Fälle erfüllt ist:

$$(\bigvee) \qquad \bigvee(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}} \in \Gamma \quad \& \quad \mathcal{H}\big|\!\frac{\alpha_0}{\rho}\;\Gamma, A_{\iota_0} \qquad \textit{mit} \quad \alpha_0 < \alpha \quad \textit{für ein } \iota_0 \in \mathrm{J}$$

$$(\bigwedge) \qquad \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}} \in \Gamma \quad \& \quad \mathcal{H}[\iota]\big|\!\frac{\alpha_\iota}{\rho}\;\Gamma, A_{\iota} \qquad \textit{mit} \quad \alpha_\iota < \alpha \quad \textit{für alle } \iota \in \mathrm{J}$$

$$(\mathrm{cut}) \qquad \mathrm{rk}(C) < \rho \quad \& \quad \mathcal{H}\big|\!\frac{\alpha_0}{\rho}\;\Gamma, (\neg)C \qquad \textit{mit} \quad \begin{array}{l}\alpha_0 < \alpha \\ \mathrm{lh}(C) \in \mathcal{H}\end{array}$$

$$(\mathrm{ref}_\kappa) \qquad \exists z{\in}\mathrm{L}_\kappa\, A^{(z,\kappa)} \in \Gamma \quad \& \quad \mathcal{H}\big|\!\frac{\alpha_0}{\rho}\;\Gamma, A \qquad \textit{mit} \quad \begin{array}{l}\alpha_0, \kappa < \alpha \\ A \in \Sigma_{\le 1}(\kappa)\end{array}$$

$$(\mathrm{mah}) \qquad \exists z{\in}\mathrm{L}_M\, [\mathrm{Ad}(z) \wedge A^{(z,M)}] \quad \& \quad \mathcal{H}\big|\!\frac{\alpha_0}{\rho}\;\Gamma, A \qquad \textit{mit} \quad \begin{array}{l}\alpha_0, M < \alpha \\ A \in \Pi_2(M)\end{array}$$

Dabei wurde in (cut) folgende Abkürzung benutzt.

$$\mathcal{H}\big|\!\frac{\alpha}{\rho}\;\Gamma, (\neg)C \quad :\Leftrightarrow \quad \mathcal{H}\big|\!\frac{\alpha}{\rho}\;\Gamma, C \;\;\&\;\; \mathcal{H}\big|\!\frac{\alpha}{\rho}\;\Gamma, \neg C$$

Die Schlüsse ($\bigwedge$) und ($\bigvee$) bezeichnen wir je nach Gestalt der Hauptformel auch genauer mit ($\wedge$), ($\neg$Ad) und ($\vee$), (Ad). Dagegen bezeichnen wir mit ($\forall$) eine Kombination aus einem ($\vee$) und einem ($\bigwedge$)–Schluss zu der Regel

$$(\forall) \quad \frac{\mathcal{H}[t]\big|\!\frac{\alpha_t}{\rho}\;\Gamma, A(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_\gamma}{\mathcal{H}\big|\!\frac{\alpha}{\rho}\;\Gamma, \forall x{\in}\mathrm{L}_\gamma\, A(x)} \qquad \alpha_t + 1 \in \mathcal{H} \cap \alpha.$$

Dabei muss natürlich auch $\{\alpha\} \cup \mathrm{stg}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}$ und $\forall x{\in}\mathrm{L}_\gamma\, A(x) \in \Gamma$ gelten. Ebenso findet ($\exists$) Verwendung.

Bemerkungen.

- Beim ($\bigvee$)–Schluss kann man o.E. annehmen, dass $\mathrm{stg}(\iota_0) \subseteq \mathrm{stg}(A_{\iota_0})$ gilt, denn falls ι_0 nicht in A_{ι_0} auftritt, kann man im ganzen Beweis $\iota_0 :\equiv \mathrm{L}_0$ wählen.
- Der einzige wesentliche Unterschied zu [Buchholz 1991b] besteht darin, dass hier die Länge jeder Schnittformel im Operator sein muss. Diese Information wird benötigt, um die prädikative Schnittelimination 5.8 durchführen zu können.
- Die Bedingung $|\iota_0| < \alpha$ im Schluss ($\bigvee$) wurde weggelassen, um die Voraussetzungen an die Herleitungsrelation möglichst gering zu halten. Für die Auswirkungen siehe die Bemerkung hinter dem Beschränkungslemma 7.3.
- Die gegenüber [Buchholz 1991a] abweichende Form von (ref_κ) wurde aus Geschmacksgründen gewählt und um eine Einheitlichkeit zur Analyse von KP+(Π_3–Ref) zu bekommen. Mit den benötigten kleinen Änderungen funktionieren alle folgenden Beweise auch für den (ref_κ)-Schluss aus [Buchholz 1991a].
- Sollen die RS(M)–Herleitungen von den im nächsten Abschnitt definierten RS($\mathcal{K}$)–Herleitungen abgehoben werden, so schreiben wir RS(M) : $\mathcal{H}\vert\frac{\alpha}{\rho}\,\Gamma$.

Lemma 5.4 (Monotonie)
Für $\alpha \le \beta \;\&\; \rho \le \sigma \;\&\; \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}' \;\&\; \{\beta\} \cup \mathrm{stg}(\Delta) \subseteq \mathcal{H}'$ *gilt*

$$\mathcal{H}\vert\frac{\alpha}{\rho}\,\Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}'\vert\frac{\beta}{\sigma}\,\Gamma, \Delta.$$

Lemma 5.5 (Persistenz)

$$\mathcal{H}\vert\frac{\alpha}{\rho}\,\Gamma, \forall x{\in}\mathrm{L}_\gamma\, A(x) \;\;\&\;\; \beta \in \mathcal{H} \cap \gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}\vert\frac{\alpha}{\rho}\,\Gamma, \forall x{\in}\mathrm{L}_\beta\, A(x)$$

Lemma 5.6 (Inversion)

(i) $\mathcal{H}^\eta[\Theta]\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ & $\iota_0 \in \mathrm{J} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}^\eta[\Theta,\iota_0]\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, A_{\iota_0}$

(ii) $\mathcal{H}\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, A_0 \wedge A_1 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, A_i$ *für $i < 2$*

(iii) $\mathcal{H}\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, A_0 \vee A_1 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, A_0, A_1$

Beweis durch Induktion nach α. Bei (i) benutzt man Lemma 5.2 (i) und (iv).

Lemma 5.7 (Reduktion)
Für $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ *mit* $\rho \geq \mathrm{rk}(A) \notin \mathrm{REG}$ *und* $\mathrm{lh}(A) \in \mathcal{H}^\eta[\Theta]$ *gilt*

$$\mathcal{H}^\eta[\Theta]\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, \neg A \ \&\ \mathcal{H}^\eta[\Theta]\overset{\beta}{\underset{\rho}{\vdash}} \Delta, A \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta]\overset{\alpha+\beta}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, \Delta.$$

Beweis durch Induktion nach β. Es wird nur der kritische Fall betrachtet, dass A Hauptformel des letzten Schlusses in der Herleitung von Δ, A ist. Wegen $\mathrm{rk}(A) \notin \mathrm{REG}$ kann dies nur $(\bigvee)$ sein.

(1) $\quad \mathcal{H}^\eta[\Theta]\overset{\beta_0}{\underset{\rho}{\vdash}} \Delta, A, A_{\iota_0}$ für ein $\iota_0 \in \mathrm{J}$ und $\beta_0 < \beta$

Die Induktionsvoraussetzung liefert

(2) $\quad \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta]\overset{\alpha+\beta_0}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, \Delta, A_{\iota_0}.$

Mit Inversion 5.6 (i) folgt aus der Herleitung von $\Gamma, \neg A$

(3) $\quad \mathcal{H}^\eta[\Theta,\iota_0]\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, \neg A_{\iota_0}.$

Herleitung (1) beinhaltet $|\iota_0| \in \mathcal{H}^\eta[\Theta]$, also ist $\mathcal{H}^\eta[\Theta,\iota_0] \subseteq \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta]$ nach Lemma 5.2 (ii). Mit Monotonie folgt aus (3)

(4) $\quad \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta]\overset{\alpha+\beta_0}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, \Delta, \neg A_{\iota_0}.$

Aus $\alpha, \beta \in \mathcal{H}^\eta[\Theta]$ folgt $\alpha + \beta \in \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta]$ und es gilt $\mathrm{rk}(A_{\iota_0}) < \mathrm{rk}(A) \leq \rho$ sowie $\mathrm{lh}(A_{\iota_0}) \in \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta]$ nach Lemma 5.2 (v), also folgt die Behauptung aus (2) und (4) mit (cut).

Satz 5.8 (Prädikative Schnittelimination)
Es gelte $[\rho, \rho + \omega^\alpha[\cap \mathrm{REG} = \emptyset$ *und* $\alpha \in \mathcal{H}$.

$$\mathcal{H}^\eta[\Theta] \Big|\frac{\beta}{\rho + \omega^\alpha}\ \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^{\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta+1)} \cdot 2}[\Theta] \Big|\frac{\varphi\alpha\beta}{\rho}\ \Gamma$$

Beweis durch Hauptinduktion nach α und Nebeninduktion nach β.
1. Der letzte Schluss ist (cut). Es gilt also

$$(1) \quad \mathcal{H}^\eta[\Theta] \Big|\frac{\beta_0}{\rho + \omega^\alpha}\ \Gamma, (\neg)C \quad \text{mit } \beta_0 < \beta.$$

Eine Anwendung der Nebeninduktionsvoraussetzung liefert

$$\mathcal{H}^{\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta_0+1)} \cdot 2}[\Theta] \Big|\frac{\varphi\alpha\beta_0}{\rho}\ \Gamma, (\neg)C.$$

1.1. $\mathrm{rk}(C) < \rho$.
Aus (1) folgt $\beta_0 \in \mathcal{H}^\eta[\Theta]$ und somit $\mathcal{H}^{\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta_0+1)} \cdot 2}[\Theta] \subseteq \mathcal{H}^{\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta+1)} \cdot 2}[\Theta]$ (siehe Lemma 3.33 (v)). Außerdem ist $\varphi\alpha\beta_0 < \varphi\alpha\beta \in \mathcal{H}^{\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta+1)} \cdot 2}[\Theta]$, also folgt die Behauptung mit (cut).

1.2. $\mathrm{rk}(C) = \rho + \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$ mit $n \geq 0$, $\alpha_n \leq \ldots \leq \alpha_1 < \alpha$.
Im Fall $n = 0$ setzen wir $\alpha_1 := 0$. Es ist $\rho \leq \mathrm{rk}(C) \leq \rho + \omega^{\alpha_1} \cdot n$ und $[\rho, \rho + \omega^{\alpha_1} \cdot n] \subseteq [\rho, \rho + \omega^\alpha[$, also $\mathrm{rk}(C) \notin \mathrm{REG}$. Wir können daher das Reduktionslemma 5.7 einsetzen. Wegen $(\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta_0+1)} \cdot 2) \cdot 2 + 4 \lhd^1 \eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta_0+1)} \cdot 5$ erhalten wir

$$\mathcal{H}^{\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta_0+1)} \cdot 5}[\Theta] \Big|\frac{\varphi\alpha\beta_0 \cdot 2}{\rho + \omega^{\alpha_1} \cdot n}\ \Gamma.$$

Nun wollen wir n–mal die Hauptinduktionsvoraussetzung anwenden. Aus $\mathrm{stg}(C) \subseteq \mathcal{H}$ folgt $\mathrm{rk}(C) \in \mathcal{H}$, also gilt nach (H2): $\alpha_1 \in \mathcal{H}$. Außerdem ist $[\rho, \rho + \omega^{\alpha_1} \cdot i[\cap \mathrm{REG} \subseteq [\rho, \rho + \omega^\alpha[\cap \mathrm{REG} = \emptyset$.

$$\mathcal{H}^{\eta'_n}[\Theta] \Big|\frac{\beta'_n}{\rho}\ \Gamma \quad \text{mit} \quad \begin{array}{lll} \beta'_0 := \varphi\alpha\beta_0 \cdot 2 & \text{und} & \eta'_0 := \eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta_0+1)} \cdot 5 \\ \beta'_{i+1} := \varphi\alpha_1\beta'_i & \text{und} & \eta'_{i+1} := \eta'_i \otimes \omega^{\varphi\alpha_1(\beta'_i+1)} \cdot 2 \end{array}$$

Nach Lemma 3.1 (i) gilt $\varphi\alpha_1\beta'_i < \varphi\alpha\beta$. Damit folgt $\beta'_n < \varphi\alpha\beta \in \mathcal{H}^{\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta+1)} \cdot 2}[\Theta]$ und analog $\omega^{\varphi\alpha(\beta_0+1)} \otimes \bigotimes_{i<n} \omega^{\varphi\alpha_1(\beta'_i+1)} < \omega^{\varphi\alpha(\beta+1)}$, da man

Ordinalzahlen der Gestalt $\omega^{\varphi\rho\xi}$ auch in der Gestalt (nicht unbedingt Normalform) $\omega_2(\gamma)$ schreiben kann und daher Lemma 3.30 (iii) greift. Nach Lemma 5.2 (iii) gilt $\alpha_1, n \trianglelefteq^1 \mathrm{rk}(C) \triangleleft_\Theta \eta \otimes \omega^2$ in $\mathcal{H}$. Insgesamt ergibt sich (in $\mathcal{H}$) für $n > 0$:

- $$\begin{aligned} \eta'_n &\triangleleft^1 \ \eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta+1)} \oplus \alpha_1 \oplus \beta_0 + 2n + 4 \\ &\triangleleft_\Theta \eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta+1)} \oplus \eta \otimes \omega^2 \cdot 5 \\ &\triangleleft^1 \ \eta \oplus \omega^{\varphi\alpha(\beta+1)} \cdot 2 \end{aligned}$$

  Man erhält die Normabschätzung für die erste Ungleichung wie folgt. Es ist $\varphi\alpha(\beta+1)$ in Normalform (dafür die „+1“) und daher gilt:

  ∘ $N\varphi\alpha(\beta+1) = N\alpha + N\beta + 2$

  ∘ $N\beta'_i \leq 2 + 2N\alpha + 2N\beta_0 + i(1 + N\alpha_1)$

  ∘ $$\begin{aligned} N\eta'_n &= N(\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta_0+1)} \otimes \omega^{\varphi\alpha_1(\beta'_0+1)} \otimes \cdots \otimes \omega^{\varphi\alpha_1(\beta'_{n-1}+1)} \cdot 9 \cdot 2^n) \\ &\leq 9 \cdot 2^n \cdot 3^{n+1} \cdot N\eta \cdot N\omega^{\varphi\alpha(\beta_0+1)} \cdot \textstyle\prod_{i<n} N\omega^{\varphi\alpha_1(\beta'_i+1)} \\ &\leq 2^{n+2} \cdot 3^{n+2} \cdot N\eta \cdot (3 + N\alpha + N\beta_0) \cdot \textstyle\prod_{i<n}(3 + N\alpha_1 + N\beta'_i) \\ &\leq 6^{n+2} \cdot N\eta \cdot (3 + N\alpha + N\beta_0) \\ &\qquad \cdot (5 + 2N\alpha + 2N\beta_0 + n - 1 + nN\alpha_1)^n \\ &\leq 6^{n+2} \cdot (2n)^n \cdot N\eta \cdot (2 + N\alpha + N\beta_0 + N\alpha_1)^{n+1} \\ &\leq \Phi(n+1) \cdot \Phi(N\eta) \cdot \Phi(2 + N\alpha + N\beta_0 + N\alpha_1 + n + 1) \quad \text{mit } (\Phi.1, 3) \\ &\leq \Phi(N\eta + N\alpha + N\beta + N\beta_0 + N\alpha_1 + 2n + 4) \qquad \text{mit } (\Phi.4) \\ &\leq \Phi(N(\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta+1)} \oplus \alpha_1 \oplus \beta_0 + 2n + 4)) \qquad \text{mit Lemma 3.31} \end{aligned}$$

2. Die anderen Fälle folgen aus der Induktionsvoraussetzung mit dem gegebenen Schluss. Man braucht nur folgende Monotonieeigenschaft der Operatoren

$$\beta_0 \in \mathcal{H}^\eta[\Theta'] \cap \beta \ \ \& \ \ \Theta' \supseteq \Theta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^{\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta_0+1)} \cdot 2}[\Theta'] \subseteq \mathcal{H}^{\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta+1)} \cdot 2}[\Theta'],$$

die aus Lemma 3.33 (v) folgt.

5.2 Transformationen des η–Parameters

Bei der gerade bewiesenen prädikativen Schnittelimination, trat das erste Mal eine kompliziertere Transformation des Parameters η auf. Auch in den folgenden Schnitteliminationssätzen sind ähnliche Transformationen erforderlich. Sie sehen auf den ersten Blick etwas unnatürlich und ausgetüfftelt aus. In Wirklichkeit ergeben sie sich aber bei Kenntnis der $\lhd$–Relation durch einfache Erwägungen. Das gemeinsame Grundprinzip, dass allen diesen Transformationen zueigen ist, soll in diesem Abschnitt erläutert werden.
Angenommen, wir wollen einen Satz $\mathcal{H}\frac{\alpha}{} \Gamma \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}}\frac{\tilde{\alpha}}{} \tilde{\Gamma}$ einer Ordinalzahlanalyse mit Operator kontrollierten Herleitungen mit verfeinerten Operatoren beweisen: $\mathcal{H}^{\eta}\frac{\alpha}{} \Gamma \Rightarrow \hat{\mathcal{H}}^{\hat{\eta}}\frac{\tilde{\alpha}}{} \tilde{\Gamma}$. Gilt $N\hat{\alpha} > N\alpha$, so muss der Parameter $\hat{\eta}$ gegenüber η offensichtlich vergrößert werden. Als naheliegender Kandidat bietet sich $\eta \oplus \hat{\alpha}$ an. Damit der Operator im Laufe einer Herleitungsinduktion nicht kleiner wird, muss folgende Eigenschaft gelten:

$$\alpha_0 < \alpha \ \& \ \alpha_0, \alpha \in \mathcal{H}^{\eta} \quad \Rightarrow^{[\text{falsch}]} \quad \eta \oplus \hat{\alpha_0} \lhd \eta \oplus \hat{\alpha}$$

Der Versuch dies zu zeigen, scheitert schon, falls $\hat{\alpha} = \alpha$ ist. Aus $\alpha_0 \lhd^1 \eta$ folgt zwar $\eta \oplus \alpha_0 \lhd^1 \eta \oplus \alpha$, denn es gilt $\eta \oplus \alpha_0 < \eta \oplus \alpha$ und $N(\eta \oplus \alpha_0) = N\eta + N\alpha_0 \leq N\eta + \Phi(N\eta) \leq \Phi(N\eta \oplus \alpha)$, aber dieser Beweis lässt sich nicht für die transitive Relation $\lhd$ durchführen. Haben wir $\alpha_0 \lhd^1 \alpha_1 \lhd^1 \eta$ gegeben, so folgt zwar wie oben $\eta \oplus \alpha_0 \lhd^1 \eta \oplus \alpha_1$, aber da $\alpha_1 > \alpha$ sein kann, gilt im allgemeinen nicht $\eta \oplus \alpha_1 \lhd \eta \oplus \alpha$. Für alle Abbildungen $(\alpha \mapsto \hat{\alpha})$, die in dieser Arbeit vorkommen, lässt sich

$$\alpha_0 < \alpha \ \& \ \alpha_0 \in \mathcal{H}^{\eta} \quad \Rightarrow \quad \eta \otimes (\hat{\alpha_0} + 1) \lhd \eta \otimes (\hat{\alpha} + 1),$$

analog zu Lemma 3.33 (v) zeigen. Diese Schrankenart findet in der η–Kollabierung 8.5 Verwendung. In der Schnittelimination 7.13 haben wir $\eta \otimes \omega^{\hat{\alpha}} \cdot 2$ benutzt, obwohl es $\eta \otimes (\hat{\alpha} + 1)$ genauso gut getan hätte. Wird aber beim Beweis die Induktionsvoraussetzung mehrfach angewendet, bzw. Hauptinduktionsvoraussetzung und Nebeninduktionsvoraussetzung kombiniert, so funktioniert dies Verfahren nicht. Nach zweifacher Anwendung der Induktionsvoraussetzung ist man bei der Operatorschranke $\eta \otimes (\hat{\alpha_0} + 1) \otimes (\hat{\alpha_0} + 1)$, die durchaus

größer als $\eta \otimes (\hat{\alpha} + 1)$ sein kann. Man muss in diesem Fall sicherstellen, dass zwischen $(\hat{\alpha_0} + 1)$ und $(\hat{\alpha} + 1)$ eine multiplikative Hauptzahl liegt. Dazu kann man von $\hat{\alpha}$ zu $\omega_2(\hat{\alpha})$ übergehen. Um Klammern im Ausdruck $\eta \otimes (\omega_2(\hat{\alpha}) + 1)$ einzusparen, kann man alternativ auch $\eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \cdot 2$ verwenden. Diese Form wird in den Sätzen 7.6 und 7.15 benutzt und in gewisser Weise auch in der obigen prädikativen Schnittelimination. Dort heißt es zwar $\eta \otimes \omega^{\hat{\alpha}} \cdot 2$, aber es ist $\hat{\alpha} = \varphi\alpha(\beta + 1)$ und diese Ordinalzahl kann man auch in der Gestalt $\omega^{\alpha'}$ darstellen.
Nun ist die Frage zu klären, wie man aus der transformierten Herleitungsschranke $\tilde{\alpha}$ des zugrundeliegenden Satzes auf den Term $\hat{\alpha}$ kommt, den man zur Bildung der Operatorschranke benutzt[2]. Es muss $\hat{\alpha}$ eine effektive Version von $\tilde{\alpha}$ sein, die Fixpunkte vermeidet. Dazu wird $+$ durch $\oplus$ und $\varphi\alpha\beta$ durch $\varphi\alpha(\beta + 1)$ ersetzt. Um die Beweise möglichst einfach zu gestalten, werden Anwendungen der Kollabierungsfunktionen ψ_κ und Ψ^ξ_π weggelassen. Damit die Herleitungsschranken trotzdem im Operator sind, werden die fehlenden Komponenten, also κ bzw. ξ und π zur η–Schranke dazuaddiert. Das Kollabieren der Operatorschranke findet erst ganz am Ende der Analsye in der η–Kollabierung statt.
Bei den beiden Sätzen zur partiellen Schnittelimination in RS($\mathcal{K}$) wird zu der so erhaltenen Operatorschranke noch die Mächtigkeit der hergeleiteten Formelmenge addiert, da dies aus beweistechnischen Gründen nötig ist. Man könnte auch die Information über die Kardinalität der Formelmenge grundsätzlich in jeder Herleitung speichern, aber da auf diese Weise die Monotonie unangenehm eingeschränkt wird, wurde dies nicht gemacht.

[2]Um Schreibarbeit zu sparen, nutzen wir $\hat{\alpha}$ auch als Herleitungslänge. Man könnte aber auch die ursprüngliche Herleitungslänge $\tilde{\alpha}$ beibehalten.

5.3 Das infinitäre System RS$(\mathcal{K})$

Definition 5.9 *Wir definieren die Herleitungsrelation der Operator kontrollierten Herleitungen und Rekursion nach α.*

$$\mathcal{H}\vert\!\frac{\alpha}{\rho}\,\Gamma \quad \textit{gilt, falls} \quad \{\alpha\}\cup \mathrm{stg}(\Gamma)\subseteq \mathcal{H}$$

und einer der folgenden Fälle erfüllt ist:

$$(\textstyle\bigvee) \qquad \bigvee(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}}\in\Gamma \quad \& \quad \mathcal{H}\vert\!\frac{\alpha_0}{\rho}\,\Gamma, A_{\iota_0} \qquad \textit{mit} \quad \alpha_0<\alpha \quad \textit{für ein } \iota_0\in \mathrm{J}$$

$$(\textstyle\bigwedge) \qquad \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}}\in\Gamma \quad \& \quad \mathcal{H}[\iota]\vert\!\frac{\alpha_\iota}{\rho}\,\Gamma, A_{\iota} \qquad \textit{mit} \quad \alpha_\iota<\alpha \quad \textit{für alle } \iota\in \mathrm{J}$$

$$(\mathrm{cut}) \qquad \mathrm{rk}(C)<\rho \quad \& \quad \mathcal{H}\vert\!\frac{\alpha_0}{\rho}\,\Gamma,(\neg)C \qquad \textit{mit} \quad \begin{array}{l}\alpha_0<\alpha\\ \mathrm{lh}(C)\in\mathcal{H}\end{array}$$

$$(\mathrm{ref}_{\mathcal{K}}) \qquad \begin{array}{l}\exists z{\in}\mathrm{L}_\kappa\,[\mathrm{trans}(z)\ \wedge\ z\neq\varnothing\ \wedge\ A^{(z,\mathcal{K})}]\in\Gamma \quad \& \quad \mathcal{H}\vert\!\frac{\alpha_0}{\rho}\,\Gamma, A\\ \textit{mit} \quad \alpha_0,\mathcal{K}<\alpha \quad \& \quad A\in\Pi_3(\mathcal{K}) \quad \& \quad \vec{\mathrm{lh}}(\Gamma)\subseteq\mathcal{H}\end{array}$$

$$(\mathrm{ref}^\xi_\pi) \qquad \begin{array}{l}\exists z{\in}\mathrm{L}_\pi\,[\mathrm{Ad}^\xi(z)\ \wedge\ \bigwedge_{j\le k}\exists x{\in}z\, A_j(x)^{(z,\pi)}]\in\Gamma \quad \& \quad \mathcal{H}\vert\!\frac{\alpha_0}{\rho}\,\Gamma, \bigwedge_{j\le k} A_j(t_j)\\ \textit{mit} \quad \alpha_0,\pi<\alpha \quad \& \quad \mathrm{stat}(\xi,\pi) \quad \& \quad \xi\in\mathcal{H} \quad \& \quad A_j(t_j)\in\Pi_{\le 2}(\pi)\end{array}$$

Sollen die RS$(\mathcal{K})$–Herleitungen von den RS(M)–Herleitungen abgehoben werden, so schreiben wir RS$(\mathcal{K})$: $\mathcal{H}\vert\!\frac{\alpha}{\rho}\,\Gamma$. Es treffen auch hier die Bemerkungen hinter Definition 5.3 zu.
Warum die Regel (ref$^\xi_\pi$) anders als in [Rathjen 1994b] formuliert wurde, wird am Anfang von Abschnitt 7.2 erläutert.

Lemma 5.10 (Monotonie)
Für $\alpha\le\beta$ & $\rho\le\sigma$ & $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{H}'$ & $\{\beta\}\cup\mathrm{stg}(\Delta)\subseteq\mathcal{H}'$ gilt

$$\mathcal{H}\vert\!\frac{\alpha}{\rho}\,\Gamma \ \&\ (\alpha\le\mathcal{K}\ \textit{oder}\ \vec{\mathrm{lh}}(\Delta)\subseteq\mathcal{H}') \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}'\vert\!\frac{\beta}{\sigma}\,\Gamma,\Delta.$$

Beweis durch Induktion nach α. Bei der Behandlung von (ref$_{\mathcal{K}}$) braucht man die Voraussetzung $\vec{\mathrm{lh}}(\Delta)\subseteq\mathcal{H}'$. Ist $\alpha\le\mathcal{K}$, so kann in der gegebenen Herleitung dieser Schluss nicht vorkommen.

Lemma 5.11 (Persistenz)

$$\mathcal{H}\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, \forall x{\in}\mathrm{L}_\gamma\, A(x)\ \ \&\ \ \beta \in \mathcal{H} \cap \gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, \forall x{\in}\mathrm{L}_\beta\, A(x)$$

Lemma 5.12 (Inversion)

(i) $\mathcal{H}^\eta[\Theta]\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}\ \ \&\ \ \iota_0 \in \mathrm{J} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta,\iota_0]\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, A_{\iota_0}$

(ii) $\mathcal{H}^\eta[\Theta]\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}\ \ \&\ \ \iota_0 \in \mathrm{J}\ \ \&\ \ \alpha < \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^{\eta}[\Theta,\iota_0]\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, A_{\iota_0}$

(iii) $\mathcal{H}\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, A_0 \wedge A_1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, A_i$ *für alle* $i < 2$

(iv) $\mathcal{H}\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, A_0 \vee A_1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, A_0, A_1$

Beweis durch Induktion nach α. Bei (i) benutzt man Lemma 5.2 (i) und (iv), sowie, für den Fall (ref$_\mathcal{K}$), Teil (v). Bei (ii) kann dieser Schluss nicht auftreten.

Lemma 5.13 (Reduktion)
Für $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ *mit* $\rho \geq \mathrm{rk}(A) \notin \mathrm{REG}$ *und* $\mathrm{lh}(A) \in \mathcal{H}^\eta[\Theta]$ *gilt*

$$\mathcal{H}^\eta[\Theta]\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, \neg A\ \ \&\ \ \mathcal{H}^\eta[\Theta]\big|\frac{\beta}{\rho}\ \Delta, A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^{\eta\cdot 4+9}[\Theta]\big|\frac{\alpha+\beta}{\rho}\ \Gamma, \Delta.$$

Beweis durch Induktion nach β. Es wird nur der kritische Fall betrachtet, dass A Hauptformel des letzten Schlusses in der Herleitung von Δ, A ist. Wegen $\mathrm{rk}(A) \notin \mathrm{REG}$ kann dies nur ($\bigvee$) sein.

(1) $\quad \mathcal{H}^\eta[\Theta]\big|\frac{\beta_0}{\rho}\ \Delta, A, A_{\iota_0}$ für ein $\iota_0 \in \mathrm{J}$ und $\beta_0 < \beta$

Die Induktionsvoraussetzung liefert

(2) $\quad \mathcal{H}^{\eta\cdot 4+9}[\Theta]\big|\frac{\alpha+\beta_0}{\rho}\ \Gamma, \Delta, A_{\iota_0}.$

Mit Inversion 5.12 (i) folgt aus der Herleitung von $\Gamma, \neg A$

(3) $\quad \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta,\iota_0]\big|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma, \neg A_{\iota_0}.$

Herleitung (1) beinhaltet $|\iota_0| \in \mathcal{H}^{\eta}[\Theta]$, also ist $\mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta, \iota_0] \subseteq \mathcal{H}^{\eta\cdot 4+9}[\Theta]$. Mit Monotonie folgt aus (3)

$$(4) \quad \mathcal{H}^{\eta\cdot 4+9}[\Theta] \Big|\frac{\alpha \oplus \beta_0}{\rho}\; \Gamma, \Delta, \neg A_{\iota_0}.$$

Aus $\alpha, \beta \in \mathcal{H}^{\eta}[\Theta]$ folgt $\alpha + \beta \in \mathcal{H}^{\eta\cdot 4+9}[\Theta]$ und es gilt $\mathrm{rk}(A_{\iota_0}) < \mathrm{rk}(A) \leq \rho$ sowie $\mathrm{lh}(A_{\iota_0}) \in \mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta]$ nach Lemma 5.2 (v), also folgt die Behauptung aus (2) und (4) mit (cut).

Gilt $\alpha \leq \mathcal{K}$ bei der Prämisse des Reduktionslemmas, so kommt man wie im Lemma 5.7 mit dem Operator $\mathcal{H}^{\eta\cdot 2+4}[\Theta]$ aus, da man dann die Inversion 5.12 (ii) anstelle von (i) benutzen kann.

Satz 5.14 (Prädikative Schnittelimination)
Es gelte $[\rho, \rho + \omega^{\alpha}[\cap \mathrm{REG} = \emptyset$ *und* $\alpha \in \mathcal{H}$.

$$\mathcal{H}^{\eta}[\Theta] \Big|\frac{\beta}{\rho + \omega^{\alpha}}\; \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^{\eta \otimes \omega^{\varphi\alpha(\beta+1)}\cdot 2}[\Theta] \Big|\frac{\varphi\alpha\beta}{\rho}\; \Gamma$$

Beweis analog zu 5.8.

Kapitel 6

Einbettungen

Damit wir die Sternherleitungen aus Abschnitt 4.3 in unseren infinitären Systemen $\mathrm{RS}(M)$ und $\mathrm{RS}(\mathcal{K})$ ausnutzen können, müssen wir einen Einbettungssatz herleiten, der einen Beweis im Sternkalkül in eine Operator kontrollierte Herleitung transformiert. Da wir diese Einbettung für verfeinerte Operatoren benötigen, kommt einiges an Rechenarbeit auf uns zu. Dadurch, dass in den $\mathcal{H}^{\eta}$–Operatoren auch endliche Ordinalzahlen eine entscheidende Rolle spielen, fallen sehr detaillierte Abschätzungen für die Normen von Formeln an. Damit man $\mathrm{No}(\Lambda)$ als Verfeinerungsparameter bei der Einbettung einer Sternherleitung der Formelmenge Λ wählen kann, muss man nachweisen, dass die Subformelbeziehung eine geeignete Monotonie der Operatoren ergibt, wenn man die Normen der Formeln als oberen Index nimmt. Die Eigenschaft erscheint sehr plausibel, da die Formelnorm analog zum Rang gebildet wird, aber auf eine Weise, dass keine Ordinalzahlen, die in der Formel auftreten verloren gehen, d.h. jedes Element von $\mathrm{stg}(A)$ tritt in der Normalformtermdarstellung von $\mathrm{no}(A)$ auf. Allerdings ergibt sich eine Schwierigkeit dadurch, dass z.B. in der Subformel von $\mathrm{L}_{\alpha} \in [x{\in}\mathrm{L}_{\beta} : B(x,\vec{a})]$ neue Terme in Gestalt der $\vec{a}$ zutage treten. Diese können nur dadurch geeignet kontrolliert werden, dass in der Termdefinition starke Einschränkungen für solche $\vec{a}$ vorgenommen wurden.

Da die Rechnungen für das folgende Lemma langwierig sind und keine weitere

Einsicht für den großen Beweisgang geben, sind sie in den Anhang verlegt worden.

Lemma 6.1 *Sei* $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ *oder* $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ *und* $\mathrm{stg}(\Lambda, A) \subseteq \mathcal{H}$*, wobei* $\mathcal{H}$ *ein guter Operator ist. Dann gilt für* $\iota, \iota_1, \dots, \iota_n \in \mathrm{J}$

(i) $\mathrm{no}(A_\iota) \lhd_\iota \mathrm{no}(A)$ *in* $\mathcal{H}$

(ii) $\mathrm{stg}(\iota_1, \dots, \iota_n) \subseteq \mathrm{stg}(\Lambda, A)^\star$ & $1 \leq n \leq 2 \cdot \max\{\mathrm{nt}(B) : B \in \Lambda\}$
$\Rightarrow \quad \mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \dots, A_{\iota_n}) + n \lhd \mathrm{No}(\Lambda, A)$ *in* $\mathcal{H}$

Der *Beweis* findet sich im Anhang, Lemma B.5.

Lemma 6.2

$$\mathrm{RS}(\vartheta) \overset{\star}{\underset{\rho}{\vdash}} \Lambda \quad \Rightarrow \quad \mathrm{RS}(\vartheta) : \mathcal{H}^{\mathrm{No}(\Lambda)}[\Lambda] \overset{\|\Lambda\|}{\underset{\rho}{\vdash}} \Lambda$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{H}\vartheta \overset{\star}{\underset{\rho}{\vdash}} \Lambda :\equiv \mathrm{RS}(\vartheta) : \mathcal{H}^{\mathrm{No}(\Lambda)}[\Lambda] \overset{\|\Lambda\|}{\underset{\rho}{\vdash}} \Lambda$ abgeschlossen ist unter den Schlüssen von $\mathrm{RS}(\vartheta)^\star$. Generell sei angemerkt, dass mit der Güte von $\mathcal{H}$ aus $\mathrm{stg}(\Lambda) \subseteq \mathcal{H}[\Lambda]$, was nach Definition gilt, $\|\Lambda\| \in \mathcal{H}[\Lambda]$ folgt. Im Verein mit Lemma 4.8 (iv) erhalten wir

(1) $\quad \|\Lambda\| \in \mathcal{H}^{\mathrm{No}(\Lambda)}[\Lambda]$.

1. $\Lambda = \Lambda', A$ mit $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ und $\mathcal{H}\vartheta \overset{\star}{\underset{\rho}{\vdash}} \Lambda', A_\iota$ für alle $\iota \in \mathrm{J}$. Es folgt aus $\mathcal{H}\vartheta \overset{\star}{\underset{\rho}{\vdash}} \Lambda', A_\iota$ wegen $\mathrm{stg}(\Lambda', \iota) \subseteq \mathrm{stg}(\Lambda, \iota)$ und Lemma 6.1 (i) $\mathcal{H}^{\mathrm{No}(\Lambda)}[\Lambda, \iota] \overset{\|\Lambda, A_\iota\|}{\underset{\rho}{\vdash}} \Lambda', A_\iota$ aus Monotoniegründen und daraus wiederum $\mathcal{H}\vartheta \overset{\star}{\underset{\rho}{\vdash}} \Lambda$ mit $(\bigwedge)$, da $\|\Lambda', A_\iota\| < \|\Lambda\| \in \mathcal{H}^{\mathrm{No}(\Lambda)}[\Lambda]$ nach Lemma 4.8 (i) und (1).

2. $\Lambda = \Lambda', A$ mit $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ und $\mathcal{H}\vartheta \overset{\star}{\underset{\rho}{\vdash}} \Lambda', A_{\iota_1}, \cdots, A_{\iota_n}$ wobei $\iota_1, \dots, \iota_n \in \mathrm{J}$ und $\mathrm{stg}(\iota_1, \dots, \iota_n) \subseteq \mathrm{stg}(\Lambda)^\star$ sowie $1 \leq n \leq \max\{\mathrm{nt}(B) : B \in \Lambda\}$. Aus $\mathrm{stg}(\iota_1, \dots, \iota_n) \subseteq \mathrm{stg}(\Lambda)^\star$ folgt $\mathrm{stg}(\Lambda', A_{\iota_1}, \cdots, A_{\iota_n}) \subseteq \mathrm{stg}(\Lambda)^\star \subseteq \mathcal{H}[\Lambda]$, also $\mathcal{H}[\Lambda', A_{\iota_1}, \cdots, A_{\iota_n}] \subseteq \mathcal{H}[\Lambda]$. Daher und wegen $\mathrm{No}(\Lambda', A_{\iota_1}, \cdots, A_{\iota_n}) \lhd^{\mathcal{H}[\Lambda]} \mathrm{No}(\Lambda)$ (nach Lemma 6.1 (ii)) folgt aus Monotonie $\mathcal{H}^{\mathrm{No}(\Lambda)}[\Lambda] \overset{\alpha_0}{\underset{\rho}{\vdash}} \Lambda, A_{\iota_1}, \cdots, A_{\iota_n}$ für

$\alpha_0 := \|\Lambda', A_{\iota_1}, \cdots, A_{\iota_n}\|$. Durch Lemma 4.8 (iv) und aus Lemma 6.1 (ii) erhalten wir $\alpha_0 + n \lhd^1 \mathrm{No}(\Lambda', A_{\iota_1}, \cdots, A_{\iota_n}) + n \lhd \mathrm{No}(\Lambda)$ in $\mathcal{H}[\Lambda]$, also gilt $\alpha_0 + n \in \mathcal{H}^{\mathrm{No}(\Lambda)}[\Lambda]$. Außerdem ist $|\iota_j| < \|A_{\iota_j}\| \leq \alpha_0$ (siehe erste Bemerkung nach Definition 5.9). Daher liefern n $(\bigvee)$–Schlüsse $\mathcal{H}^{\mathrm{No}(\Lambda)}[\Lambda]\,|\!\frac{\alpha_0+n}{\rho}\,\Lambda$. Nun ergibt sich die Behauptung mit $\alpha_0 + n < \|\Lambda\| \in \mathcal{H}^{\mathrm{No}(\Lambda)}[\Lambda]$.

3. Sei $C \equiv \exists x{\in}\mathrm{L}_\alpha\,\big(\forall y{\in}x\,A(y) \wedge \neg A(x)\big)$ und setze $\gamma_t := \|C\| + \omega|t|$. Wir zeigen durch Induktion nach $|a|$ für $\eta := \mathrm{No}(C, \forall x{\in}\mathrm{L}_\alpha\,A(x))$

$$(1) \quad \forall a{\in}\mathcal{T}^\vartheta_\alpha \cup \{\mathrm{L}_\alpha\} \quad \mathcal{H}^\eta[C,a]\,|\!\frac{\gamma_a}{\rho}\, C, \forall x{\in}a\,A(x).$$

Hieraus folgt für $a :\equiv \mathrm{L}_\alpha$ die Behauptung, denn es ist $\|C\| + \omega \cdot \alpha < \|C, \forall x{\in}\mathrm{L}_\alpha\,A(x)\| \in \mathcal{H}^\eta[C]$.

Für den Nachweis von (1) sei $a \in \mathcal{T}^\vartheta_\alpha \cup \{\mathrm{L}_\alpha\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$(2) \quad \mathcal{H}^\eta[C,t]\,|\!\frac{\gamma_t}{\rho}\, C, \forall y{\in}t\,A(y) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}^\vartheta_{|a|}.$$

Aus 1. und 2. folgt mit Lemma 4.11 (i) $\mathcal{H}\,|\!\frac{\star}{0}\, \neg A(t), A(t)$. Wegen $\|\neg A(t), A(t)\| \leq \gamma_t \in \mathcal{H}^\eta[C,t]$ und $\mathrm{No}(\neg A(t), A(t)) \lhd_{|t|} \eta$ (folgt aus $\mathrm{no}(A(t)) \lhd_t \mathrm{no}(\forall x{\in}\mathrm{L}_\alpha\,A(x))$, Lemma 6.1 (i)) und $\mathrm{stg}(A(t)) \subseteq \mathrm{stg}(C,t)$ folgt mit Monotonie $\mathcal{H}^\eta[C,t]\,|\!\frac{\gamma_t}{\rho}\, \neg A(t), A(t)$. Mit (2) folgt weiter:

$$(\wedge) \quad \mathcal{H}^\eta[C,t]\,|\!\frac{\gamma_t+1}{\rho}\, C, \forall y{\in}t\,A(y) \wedge \neg A(t), A(t) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}^\vartheta_{|a|}$$

$$(\bigvee) \quad \mathcal{H}^\eta[C,t]\,|\!\frac{\gamma_t+2}{\rho}\, C, A(t) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_{|a|}$$

$$(\forall) \quad \mathcal{H}^\eta[C,a]\,|\!\frac{\gamma_a}{\rho}\, C, \forall x{\in}a\,A(x)$$

Für die Schlüsse ist noch $\gamma_t + 3 \in \mathcal{H}[C,t]$ für $t \in \mathcal{T}_\alpha \cup \{\mathrm{L}_\alpha\}$ zu zeigen. Dies folgt aus $\mathrm{rk}(C) \lhd^1 \mathrm{no}(C)$ (Lemma 4.8 (iv)) und $\omega \cdot |t| \unlhd^1_t \omega^\alpha \lhd^1 \mathrm{no}(\forall x{\in}\mathrm{L}_\alpha\,A(x))$. Ebenso folgt die Bedingung $\gamma_a \in \mathcal{H}^\eta[C,a]$, die zusätzlich für den letzten Schluss benötigt wird.

Für die Einbettung von $\mathrm{RS}(M)^\star$–Herleitungen sind noch zwei weitere Fälle zu betrachten.

4. $\Lambda = \Lambda', \mathrm{Ad}(a) \to B(a)$ mit $\mathrm{rk}(B(a)) < \rho$ und für alle $\kappa \leq |a|$ gilt $\mathcal{H}\overset{\star}{\underset{\rho}{|}}\ \Lambda', B(\mathrm{L}_\kappa)$. Sei $\alpha_0 := \|\Lambda', \neg\mathrm{Ad}(a), B(a), B(a)\|$. Nach 1.–3. gilt $\overset{\star}{|}\!\!-\ \Lambda \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}\vartheta\overset{\star}{\underset{0}{|}}\ \Lambda$, also folgt aus Lemma 4.12 $\mathcal{H}\overset{\star}{\underset{0}{|}}\ \mathrm{L}_\kappa \neq a, \neg B(\mathrm{L}_\kappa), B(a)$. $\mathrm{No}(\mathrm{L}_\kappa \neq a, \neg B(\mathrm{L}_\kappa), B(a)) \lhd_\kappa \eta := \mathrm{No}(\Lambda)$ in $\mathcal{H}[\Lambda, \kappa]$ gilt wegen

- $\mathrm{no}(B(\mathrm{L}_\kappa)) \unlhd_\kappa \mathrm{no}(B(a))$ nach Lemma 4.8 (vi)
- $\mathrm{no}(\mathrm{L}_\kappa \neq a) \lhd_\kappa \mathrm{no}(\neg\mathrm{Ad}(a))$ nach Lemma 6.1 (i)

Daher bekommen wir mit Monotonie und anschließendem Schnitt (mit Rang $\mathrm{rk}(B(\mathrm{L}_\kappa)) \leq \mathrm{rk}(B(a)) < \rho$): $\mathcal{H}^\eta[\Lambda, \kappa]\overset{\alpha_0+1}{\underset{\rho}{|}}\ \Lambda', \mathrm{L}_\kappa \neq a, B(a)$. Ein $(\bigwedge)$–Schluss liefert $\mathcal{H}^\eta[\Lambda]\overset{\alpha_0+2}{\underset{\rho}{|}}\ \Lambda', \neg\mathrm{Ad}(a), B(a)$. Zwei $(\vee)$–Schlüsse bringen uns zu $\mathcal{H}^\eta[\Lambda]\overset{\alpha_0+4}{\underset{\rho}{|}}\ \Lambda$. Nun ergibt sich die Behauptung mit $\alpha_0 + 4 < \|\Lambda\| \in \mathcal{H}^{\mathrm{No}(\Lambda)}[\Lambda]$.

5. Sei $A \in \Sigma_{\leq 1}(\kappa)$. Aus 1.–3. folgt mit Lemma 4.11 (i) $\mathcal{H}\overset{\star}{\underset{0}{|}}\ \neg A, A$. Mit (ref) folgt für $C :\equiv A \to \exists z{\in}\mathrm{L}_\kappa\, A^{(z,\kappa)}$ wegen $\mathrm{No}(\neg A, A) \lhd \mathrm{No}(C)$ in $\mathcal{H}[C]$ und $\|\neg A, A\| + 1 \in \mathcal{H}^{\mathrm{No}(C)}[C]$ (nach Lemma 4.8 (iv)) $\mathcal{H}^{\mathrm{No}(C)}[C]\overset{\|\neg A,A\|+1}{\underset{0}{|}}\ \neg A, \exists z{\in}\mathrm{L}_\kappa\, A^{(z,\kappa)}$. Lemma 4.8 (iv) impliziert auch $\|\neg A, A\| + 2 \in \mathcal{H}^{\mathrm{No}(C)}[C]$, also folgt mit zwei $(\vee)$–Schlüssen die Behauptung, wobei die Herleitungsschranke wegen $\|\neg A, A\| + 2 < \|C\| \in \mathcal{H}^{\mathrm{No}(C)}[C]$ erreicht werden kann.

Korollar 6.3

Zu jedem $\Lambda(\vec{x}) \subseteq \mathcal{L}^\vartheta_{\mathrm{Ad}}$ gibt es $\eta \in \mathcal{T}^\vartheta$ und $\alpha < \omega^{\vartheta+\omega}$, so dass für alle $\vec{a} \in \mathcal{T}^\vartheta_\vartheta$

$$\mathrm{RS}(\vartheta)\overset{\star}{\underset{\rho}{|}}\ \Lambda^\vartheta(\vec{a}) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{RS}(\vartheta):\ \mathcal{H}^\eta[\vec{a}]\overset{\alpha}{\underset{\rho}{|}}\ \Lambda^\vartheta(\vec{a})$$

gilt.

Beweis. Zu $\Lambda(\vec{x})$ setze $\eta := \mathrm{No}(\Lambda^\vartheta(\vec{\mathrm{L}_\vartheta}))$. Iterierte Anwendung von Lemma 4.8 (vi) ergibt $\mathcal{H}^{\mathrm{No}(\Lambda^\vartheta(\vec{a}))}[\vec{a}] \subseteq \mathcal{H}^\eta[\vec{a}]$. Die Behauptung folgt mit Lemma 6.2, wobei man die Herleitungslänge α zu $\Lambda(\vec{x})$ mit Lemma 4.8 (vii) wählt.

Als nächstes wird die Aussagenlogik in die infinitären Systeme eingebettet. Um ein kleines technisches Problem beim Existenzschluss meistern zu können, wird vorweg ein Hilfslemma bewiesen.

Lemma 6.4 *Sei* $a \in \mathcal{T}^\vartheta$ *und* $C(x)$ *eine* RS(ϑ)*–Formel.*

(i) $\models^{\star} \neg(b \in a \wedge C(b)), \exists x{\in}a\, C(x)$ *für alle* $b \in \mathcal{T}^\vartheta$

(ii) $\models^{\star} \neg(b \in a \to C(b)), b \mathrel{\mathring{\in}} a \to C(b)$ *für alle* $b \in \mathcal{T}^\vartheta_{|a|}$

(iii) *Zu* $\psi(\vec{x}) \in \mathcal{L}^\vartheta_{\mathrm{Ad}}$ *gibt es ein* $\eta \in \mathcal{T}^\vartheta$*, so dass für* $\vec{a} \in \mathcal{T}^\vartheta$ *und* $b \in \mathcal{T}^\vartheta_{|a_i|}$ $\mathrm{No}(\neg(b \in a_i \to \psi^\vartheta(\vec{a}, b)), b \mathrel{\mathring{\in}} a_i \to \psi^\vartheta(\vec{a}, b)) \lhd_b \eta$ *gilt.*

Beweis. (i) Wir beschränken uns auf den schwierigeren Fall, dass $a \equiv [x{\in}\mathrm{L}_\alpha : A(x)]$ ist. Für alle $t \in \mathcal{T}^\vartheta_{|a|}$ gilt $\models^{\star} t \neq b, \neg C(b), C(t)$ nach dem Gleichheitslemma 4.12 und ein $(\bigwedge)^\star$–Schluss mit der Tautologie $\models^{\star} \neg A(t), A(t)$ liefert $\models^{\star} \neg A(t), t \neq b, \neg C(b), A(t) \wedge C(t)$. Durch zwei $(\bigvee)^\star$–Schlüsse erhalten wir $\models^{\star} \neg A(t) \vee t \neq b, \neg C(b), \exists x{\in}a\, C(x)$. Da dies für alle $t \in \mathcal{T}^\vartheta_{|a|}$ gilt, bekommen wir $\models^{\star} b \notin a, \neg C(b), \exists x{\in}a\, C(x)$ mit $(\bigwedge)^\star$ und daraus folgt die Behauptung.

(ii) Für $a \equiv \mathrm{L}_\alpha$ gilt $\models^{\star} b \in a$ nach 4.11 (iii), also $\models^{\star} b \in a \wedge \neg C(b), C(b)$, was die Behauptung ist. Für $a \equiv [x{\in}\mathrm{L}_\alpha : A(x)]$ erhalten wir der Reihe nach $\models^{\star} b = b \wedge A(b), \neg A(b)$ $\models^{\star} b \in a, \neg A(b)$ $\models^{\star} b \in a \wedge \neg C(b), \neg A(b), C(b)$ $\models^{\star} b \in a \wedge \neg C(b), A(b) \to C(b)$, was die Behauptung ist.

(iii) Laut Lemma 6.1 (i) gilt $\mathrm{no}(b \mathrel{\mathring{\in}} a_i) \lhd_b \mathrm{no}(a_i \in a_i)$ für $b \in \mathcal{T}^\vartheta_{|a_i|}$. Mit Lemma 4.8 (vi) können wir auf $\mathrm{No}(\neg(b \in a_i \to \psi^\vartheta(\vec{a}, b)), b \mathrel{\mathring{\in}} a_i \to \psi^\vartheta(\vec{a}, b)) \lhd_{\vec{a},b} \eta_1$ für $\eta_1 := \mathrm{No}(\neg(\mathrm{L}_\vartheta \in \mathrm{L}_\vartheta \to \psi^\vartheta(\vec{\mathrm{L}}_\vartheta, \mathrm{L}_\vartheta)), \mathrm{L}_\vartheta \in \mathrm{L}_\vartheta \to \psi^\vartheta(\vec{\mathrm{L}}_\vartheta, \mathrm{L}_\vartheta))$ schließen.

Lemma 6.5

Zu aussagenlogisch gültigem $\Gamma(\vec{x}) \subseteq \mathcal{L}^\vartheta_{\mathrm{Ad}}$ *gibt es* $\eta \in \mathcal{T}^\vartheta$ *und* $n < \omega$*, so dass*

$$\mathcal{H}^\eta[\vec{a}] \mathop{\Big|}\!\frac{\omega^{\vartheta+\omega} + n}{\vartheta + n}\ \Gamma^\vartheta(\vec{a}) \quad \textit{für alle } \vec{a} \in \mathcal{T}^\vartheta_\vartheta$$

gilt.

Beweis durch Induktion nach einer schnittfreien Tait-Herleitung von $\Gamma(\vec{x})$. Ein geeigneter Schnittrang, der unabhängig von den Termen $\vec{a}$ ist, kann in jedem Fall mit Lemma 4.8 (vii) gewählt werden.

1. Ist $\phi, \neg\phi \subseteq \Gamma(\vec{x})$ mit Primformel ϕ, so folgt die Behauptung aus der Zusammenarbeit von Lemma 4.11 (i) und Korollar 6.3.

2. $\forall y\, \phi(\vec{x}, y) \in \Gamma(\vec{x})$ mit $y \notin \{\vec{x}\}$ ist Hauptformel des letzten Schlusses, also existieren $\eta \in \mathcal{T}^\vartheta$ und $n < \omega$ nach Induktionsvoraussetzung, so dass

$$(1) \quad \mathcal{H}^\eta[\vec{a}, b] \Big|\frac{\omega^{\vartheta+\omega} + n}{\vartheta + n}\ \Gamma^\vartheta(\vec{a}), \phi^\vartheta(\vec{a}, b) \quad \text{für alle } \vec{a}, b \in \mathcal{T}^\vartheta_\vartheta$$

gilt.

2.1. Ist $\phi(\vec{x}, y) \equiv y \in x_i \rightarrow \psi(\vec{x}, y)$, so ist $(\forall y\, \phi(\vec{a}, b))^\vartheta \equiv \forall y{\in}a_i\, \psi^\vartheta(\vec{a}, y)$. Mit Lemma 6.4 (iii) bekommen wir ein von $\vec{a}, b$ unabhängiges η_1, mit dem wir

$$\mathcal{H}^{\eta_1}[\vec{a}, b] \Big|\frac{\omega^{\vartheta+\omega} + n}{0}\ \neg(b \in a_i \rightarrow \psi^\vartheta(\vec{a}, b)), b \mathrel{\mathring{\in}} a_i \rightarrow \psi^\vartheta(\vec{a}, b)$$

mit Hilfe von Lemma 6.4 (ii) und 6.2 für alle $\vec{a} \in \mathcal{T}^\vartheta_\vartheta, b \in \mathcal{T}^\vartheta_{|a_i|}$ herleiten können. Wir schneiden mit (1) und erhalten die Behauptung durch $(\bigwedge)$.

2.2. Ist $\forall y$ unbeschränkt, so ist $(\forall y\, \phi(\vec{a}, b))^\vartheta \equiv \forall y{\in}\mathrm{L}_\vartheta\, \phi^\vartheta(\vec{a}, y)$. Von (1) kann mit $(\forall)$ die Behauptung erschlossen werden.

3.1. $\exists y\, (y \in x_i \wedge \psi(\vec{x}, y)) \in \Gamma(\vec{x})$ mit $y \not\equiv x_i$ ist Hauptformel, also existieren nach Induktionsvoraussetzung $\eta \in \mathcal{T}^\vartheta$ und $n < \omega$, so dass für alle $\vec{a} \in \mathcal{T}^\vartheta_\vartheta$

$$\mathcal{H}^\eta[\vec{a}] \Big|\frac{\omega^{\vartheta+\omega} + n}{\vartheta + n}\ \Gamma^\vartheta(\vec{a}), b \in a_i \wedge \psi^\vartheta(\vec{a}, b) \quad \text{mit } b :\equiv \begin{cases} a_j & \text{falls } y \equiv x_j \\ \varnothing & \text{falls } y \notin \{\vec{x}\} \end{cases}$$

gilt. Aus Lemma 6.4 (i) folgt mit Korollar 6.3 (u.U. mit größerm n) für ein (von $\vec{a}, b$ unabhängiges) $\eta_1 \in \mathcal{T}^\vartheta$

$$\mathcal{H}^{\eta_1}[\vec{a}] \Big|\frac{\omega^{\vartheta+\omega} + n}{0}\ \neg(b \in a_i \wedge \psi^\vartheta(\vec{a}, b)), \exists y{\in}a_i\, \psi^\vartheta(\vec{a}, y).$$

Mit einem Schnitt folgt die Behauptung.

3.2. $\exists y\, \phi(\vec{x}, y) \in \Gamma(\vec{x})$ mit unbeschränktem $\exists y$ ist Hauptformel, also gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein $\eta \in \mathcal{T}^\vartheta$ und ein $n < \omega$, so dass für alle $\vec{a} \in \mathcal{T}^\vartheta_\vartheta$

$$\mathcal{H}^\eta[\vec{a}] \Big|\frac{\omega^{\vartheta+\omega} + n}{\vartheta + n}\ \Gamma^\vartheta(\vec{a}), \phi^\vartheta(\vec{a}, b) \quad \text{mit } b :\equiv \begin{cases} a_j & \text{falls } y \equiv x_j \\ \varnothing & \text{falls } y \notin \{\vec{x}\} \end{cases}$$

gilt. Mit einem ($\exists$)–Schluss folgt die Behauptung.

Als letztes bleibt noch die Herleitung der stärksten Axiome (Mahlo) und (Π_3–Ref) zu leisten. Da die infinitären Systeme sonst zu schwach wären, haben wir diese Abschlusseigenschaften einfach als Regeln integriert. Das macht die Einbettung trivial.

Lemma 6.6 *Sei $M \in \mathcal{H}$ und F eine* $\mathrm{RS}(M)$*–Formel mit* $\mathrm{stg}(F) \subseteq M$ *und* $FV(F) \subseteq \{x, y\}$. *Für* $B(z) :\equiv \forall x{\in}z\, \exists y{\in}z\, F(x, y)$ *gilt*

$$\mathcal{H}^{\mathrm{No}(Max)} \Big|\frac{\|Max\|}{0}\; Max,$$

wobei $Max :\equiv B(\mathrm{L}_M) \to \exists z{\in}\mathrm{L}_M\, (\mathrm{Ad}(z) \wedge B(z))$ *gesetzt ist.*

Beweis. Es gilt $\mathrm{No}(B(\mathrm{L}_M), B(\mathrm{L}_M)) \lhd^1 \eta := \mathrm{No}(Max)$ in $\mathcal{H}$. Durch Lemma 4.11 (i) und 6.2 bekommen wir

$$\mathcal{H}^{\eta} \Big|\frac{\omega^{\beta} \cdot 2}{0}\; B(\mathrm{L}_M), \neg B(\mathrm{L}_M) \quad \text{mit } \beta := \mathrm{rk}(B(\mathrm{L}_M)).$$

Eine Anwendung von (mah) liefert

$$\mathcal{H}^{\eta} \Big|\frac{\omega^{\beta} \cdot 2 \oplus M}{0}\; \neg B(\mathrm{L}_M), \exists z{\in}\mathrm{L}_M\, (\mathrm{Ad}(z) \wedge B(z)).$$

Mit zwei ($\vee$)–Schlüssen folgt (es gilt $\omega^{\beta} \cdot 2 \oplus M + 2 \lhd^1 \|Max\| \in \mathcal{H}^{\eta}$)

$$\mathcal{H}^{\eta} \Big|\frac{\omega^{\beta} \cdot 2 \oplus M + 2}{0}\; B(\mathrm{L}_M) \to \exists z{\in}\mathrm{L}_M\, (\mathrm{Ad}(z) \wedge B(z))$$

und die Behauptung gilt aus Monotoniegründen: $\omega^{\beta} \cdot 2 \oplus M + 2 < \|Max\| \in \mathcal{H}^{\eta}$.

Satz 6.7 (KPM-Interpretationssatz)
Für jeden $\mathcal{L}_{\in}$–Satz ϕ gibt es $\eta \in \mathcal{T}^M$ und $n < \omega$, so dass

$$\mathrm{KPM} \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^{\eta} \Big|\frac{\omega^{M+\omega} + n}{M + n}\; \phi^M$$

gilt.

Beweis. Es gibt endlich viele Instanzen $Ax_1, \cdots, Ax_m$ von KPM–Axiomen, so dass $Ax_1 \to \cdots \to Ax_m \to \phi$ aussagenlogisch gültig ist. Diesen Satz können wir also mit Lemma 6.5 in RS(M) einbetten. Die Einbettung der Axiome erhalten wir aus den Lemmata 4.11 und 4.13 mit Lemma 6.2 und aus Lemma 6.6. Mit m–vielen Schnitten erlangen wir die Behauptung.

Lemma 6.8 *Sei $\mathcal{K} \in \mathcal{H}$ und $A \in \Pi_3(\mathcal{K})$. Es gilt*

$$\mathcal{H}^{\mathrm{No}(Pi_3Ax)} \Big|\frac{\|Pi_3Ax\|}{0}\ Pi_3Ax,$$

wobei $Pi_3Ax :\equiv A \to \exists z{\in}\mathrm{L}_\mathcal{K}\,[\mathrm{trans}(z) \wedge z \neq \varnothing \wedge A^{(z,\mathcal{K})}]$ gesetzt ist.

Beweis. Es gilt $\mathrm{No}(A, \neg A) \lhd^1 \eta := \mathrm{No}(Pi_3Ax)$, daher bekommen wir

$$\mathcal{H}^{\eta} \Big|\frac{w^\alpha \cdot 2}{0}\ A, \neg A \quad \text{mit } \alpha := \mathrm{rk}(A).$$

Wegen $\mathrm{lh}(A) \lhd^1 \mathrm{no}(A) \lhd^1 \eta$ (Lemma 4.8 (iv)) dürfen wir ($\mathrm{ref}_\mathcal{K}$) benutzen.

$$\mathcal{H}^{\eta} \Big|\frac{\omega^\alpha \cdot 2 \oplus \mathcal{K}}{0}\ \neg A, \exists z{\in}\mathrm{L}_\mathcal{K}\,[\mathrm{trans}(z) \wedge z \neq \varnothing \wedge A^{(z,\mathcal{K})}]$$

Nun wenden wir zwei ($\vee$)–Schlüsse an, um

$$\mathcal{H}^{\eta} \Big|\frac{\omega^\alpha \cdot 2 \oplus \mathcal{K} + 2}{0}\ A \to \exists z{\in}\mathrm{L}_\mathcal{K}\,[\mathrm{trans}(z) \wedge z \neq \varnothing \wedge A^{(z,\mathcal{K})}]$$

zu erhalten. Die Behauptung ergibt sich durch $\omega^\alpha \cdot 2 \oplus \mathcal{K} + 2 \lhd^1 \omega^{\alpha \oplus \mathcal{K}} \lhd^1 \|Pi_3Ax\| \in \mathcal{H}^\eta$.

Satz 6.9 (KP+(Π_3–Ref)–Interpretationssatz)
Für jeden $\mathcal{L}_\in$–Satz ϕ gibt es $\eta \in \mathcal{T}^\mathcal{K}$ und $n < \omega$, so dass

$$\mathrm{KP} + (\Pi_3\text{–Ref}) \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^{\eta} \Big|\frac{\omega^{\mathcal{K}+\omega} + n}{\mathcal{K} + n}\ \phi^\mathcal{K}$$

gilt.

Beobachtung. In der Herleitung, die der Interpretationssatz 6.9 liefert, kommt kein (ref_τ^σ) vor. Diese Tatsache ist wichtig für den Beweis des Hauptsatzes 8.10.

Kapitel 7

Kollabierung und imprädikative Schnittelimination

Die Schnitteliminationstechnik kann aus [Buchholz 1991b] bzw. [Rathjen 1994b] übernommen werden. Welchen Transformationen der Parameter η bei den Schnitteliminationssätzen unterzogen werden muss, wurde schon im Abschnitt 5.2 erläutert. Zusätzlich zu den herkömmlichen Beweisen fallen nur Rechnungen an, die bestätigen, dass diese transformierten Schranken richtig gewählt sind.

7.1 Schnittelimination in RS(M)

Definition 7.1 (Die guten $\mathcal{H}_\gamma$–Operatoren)

$$\mathcal{H}_\gamma(X) := \bigcap\{C(\alpha,\beta) :\ X \subseteq \mathrm{C}(\alpha,\beta)\ \ \&\ \ \gamma < \alpha\}$$

Lemma 7.2 *Für beliebige Θ gilt:*

(i) $\mathcal{H}_\gamma$ *ist ein guter Operator und es gilt* $M \in \mathcal{H}_\gamma$.

(ii) $\gamma \leq \gamma' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subseteq \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta]$

(iii) $\gamma, \kappa \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]\ \ \&\ \ \psi_\kappa\gamma$ *ist in Normalform* $\quad \Rightarrow \quad \psi_\kappa\gamma \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$

Schreibweise. Wir schreiben $\mathcal{H}_\gamma^\eta$ für $(\mathcal{H}_\gamma)^\eta$.

Lemma 7.3 (Beschränkung)
Es gelte $C \in \Sigma_{\le 1}(\beta) \quad \& \quad \alpha \le \beta \le \kappa \quad \& \quad \psi_\kappa(\gamma+1) \le \nu \in \mathcal{H}^\eta_{\gamma+1}[\Theta]$ $\&\ \mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}_\kappa(\gamma+1)$.

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, C \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^\eta_{\gamma+1}[\Theta]\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, C^{(\nu,\beta)}$$

Beweis durch Induktion nach α. Sei $C \simeq \bigvee(C_\iota)_{\iota\in\mathcal{T}^M_\beta}$ (sonst ist $C \equiv C^{(\nu,\beta)}$, also nichts zu zeigen). Interessant ist nur der Fall, dass C Hauptformel des letzten Schlusses ist. Wegen $\alpha \le \beta$ kann dies nicht (ref) oder (mah), also aufgrund der Gestalt von C nur $(\bigvee)$ sein. Dann haben wir

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]\overset{\alpha_0}{\underset{\rho}{\vdash}} \Gamma, C, C_{\iota_0} \quad \text{mit } \alpha_0 < \alpha \quad \text{für ein } \iota_0 \in \mathcal{T}^M_\beta.$$

Wie nach Definition 5.3 bemerkt, können wir $|\iota_0| \in \mathrm{stg}(C_{\iota_0})$ annehmen. Dies impliziert $|\iota_0| \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \cap \beta \subseteq \mathrm{C}_\kappa(\gamma+1) \cap \kappa = \psi_\kappa(\gamma+1) \subseteq \nu$, also ist $\iota_0 \in \mathcal{T}^M_\nu$ und die Behauptung folgt mit $(\bigvee)$ aus der Induktionsvoraussetzung.Die Voraussetung $\nu \in \mathcal{H}^\eta_{\gamma+1}[\Theta]$ braucht man für den Axiomfall, d.h. ein $(\bigwedge)$–Schluss mit Hauptformel $\bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\emptyset}$.

Nimmt man in den $(\bigvee)$–Schluss bei der Definition der Operator kontrollierten Herleitungen die Bedingung $|\iota_0| < \alpha$ hinzu, so erhält man das Beschränkungslemma in einer einfacheren Form (vergleiche Lemma A.20). Die in obiger Version kompiziert anmutenden Voraussetzungen sind aber bei der imprädikativen Schnittelimination ohnehin erfüllt.

Definition 7.4

- $\mathrm{Card}^M := \{\Omega_\sigma :\ 0 < \sigma \le M\}$
- *Für* $\mu \in \mathrm{Card}^M$ *sei* $\bar{\mu} := \begin{cases} \mu+1 & \textit{falls } \mu \in \mathrm{REG} \\ \mu & \textit{sonst} \end{cases}$
- $\mathcal{A}(\Theta;\gamma,\kappa,\mu) \quad :\Leftrightarrow \quad \mu \in \mathrm{Card}^M \ \&\ \gamma,\kappa,\mu \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ $\&\ \mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \bigcap_{\tau\ge\kappa} \mathrm{C}_\tau(\gamma+1)$
- $\overset{\alpha}{\underset{\cdot}{\vdash}} \Gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{\vdash}} \Gamma$

Lemma 7.5 *Gelte* $\mathcal{A}(\Theta;\gamma,\kappa,\mu)$ *und* $\hat{\alpha}=\gamma\oplus\omega^{\mu\oplus\alpha}$. *Dann hat man folgendes.*

$(\mathcal{A}1)$ $\alpha,\xi\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \quad\Rightarrow\quad \hat{\alpha}\oplus\xi\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ & $\psi_\kappa(\hat{\alpha}\oplus\xi)\in\mathcal{H}_{\hat{\alpha}\oplus\xi}[\Theta]$ & $\psi_\kappa(\hat{\alpha}\oplus\xi)$ *ist in Normalform*

$(\mathcal{A}2)$ $\alpha,\xi\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ & $\hat{\alpha}\oplus\xi<\gamma\oplus\beta \quad\Rightarrow\quad \psi_\kappa(\hat{\alpha}\oplus\xi)<\psi_\kappa(\gamma\oplus\beta)$

$(\mathcal{A}3)$ $\kappa\leq\tau \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}_\gamma[\Theta]\cap\tau\subseteq\psi_\tau(\gamma+1)$

Beweis. $(\mathcal{A}1)$. Aus $\gamma,\mu,\alpha,\xi\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ folgt durch die Güte von $\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$, dass $\hat{\alpha}\oplus\xi\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ ist. Mit Lemma 3.11 (iii) bzw. 3.10 (iv) folgt $\mathrm{stg}(\Theta)\subseteq \mathrm{C}_\kappa(\gamma+1)\subseteq\mathrm{C}_\kappa(\hat{\alpha}\oplus\xi)$, also $\hat{\alpha}\oplus\xi,\kappa\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\subseteq\mathrm{C}_\kappa(\hat{\alpha}\oplus\xi)$, d.h. $\psi_\kappa(\hat{\alpha}\oplus\xi)$ ist in Normalform. Mit Lemma 7.2 (ii) und (iii) folgt $\psi_\kappa(\hat{\alpha}\oplus\xi)\in\mathcal{H}_{\hat{\alpha}\oplus\xi}[\Theta]$.

$(\mathcal{A}2)$. Aus $(\mathcal{A}1)$ erhalten wir $\hat{\alpha}\oplus\xi\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\subseteq\mathrm{C}_\kappa(\gamma+1)$. Die Inklusion gilt nach Definition von $\mathcal{H}_\gamma$, denn es ist $\mathrm{stg}(\Theta)\subseteq\mathrm{C}_\kappa(\gamma+1)$. Ebenso gilt $\kappa\in\mathrm{C}_\kappa(\gamma+1)$. Mit Lemma 3.11 (iii) bzw. 3.10 (iv) folgt $\kappa,\hat{\alpha}\oplus\xi\in\mathrm{C}_\kappa(\gamma\oplus\beta)$, also $\psi_\kappa(\hat{\alpha}\oplus\xi)<\psi_\kappa(\gamma\oplus\beta)$ mit Lemma 3.11 (iii) bzw. 3.10 (iii).

$(\mathcal{A}3)$. $\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\cap\tau\subseteq\mathrm{C}_\tau(\gamma+1)\cap\tau=\psi_\tau(\gamma+1)$

Satz 7.6 (Imprädikative Schnittelimination)
Gelte $\mathcal{A}(\Theta;\gamma,\kappa,\mu)$ & $\Gamma\subseteq\Sigma_{\leq 1}(\kappa)$.

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]\Big|\frac{\alpha}{\mu}\ \Gamma \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\kappa\hat{\alpha}}{\cdot}\ \Gamma \quad mit \quad \begin{array}{l}\hat{\alpha}:=\ \gamma\oplus\omega^{\mu\oplus\alpha}\\ \hat{\eta}:=\ \kappa\oplus\eta\otimes\omega_2(\hat{\alpha})\cdot 2\end{array}$$

Beweis durch Hauptinduktion nach μ und Nebeninduktion nach α. Alle im Beweis auftretenden ψ–Terme sind nach $(\mathcal{A}1)$ in Normalform. Für beliebiges $\iota\in\mathcal{T}^M\cup\{0,1\}$ und dazu gegebenes α_ι setzen wir $\hat{\alpha_\iota}:=\ \gamma\oplus\omega^{\mu\oplus\alpha_\iota}$ und $\hat{\eta_\iota}:=\ \kappa\oplus\eta\otimes\omega_2(\hat{\alpha_\iota})\cdot 2$. Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt:

(a) $\{\psi_\kappa\hat{\alpha}\}\cup\mathrm{stg}(\Gamma)\subseteq\mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta]$

(b) $\mathcal{A}(\Theta';\gamma,\kappa,\mu)$ & $\alpha_0\in\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta']\cap\alpha$ für ein $\Theta'\supseteq\Theta$

$$\Rightarrow\quad \psi_\kappa\hat{\alpha_0}<\psi_\kappa\hat{\alpha}\ \ \&\ \ \mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta']\subseteq\mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta']$$

Außer der Anwendung von $(\mathcal{A}1)$, $(\mathcal{A}2)$ und Lemma 7.2 (ii) braucht man zum Beweis folgendes.

(a): Wegen $\eta \lhd^1 \hat{\eta}$ ist $\mathrm{stg}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \subseteq \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta]$ und zudem gilt $\psi_\kappa\hat{\alpha} \lhd^1 \hat{\eta}$, denn $\psi_\kappa\hat{\alpha}$ ist nach ($\mathcal{A}1$) in Normalform.

(b): $\hat{\eta_0} = \kappa \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \cdot 2 \lhd^1 \kappa \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \alpha_0 \lhd_{\Theta'} \kappa \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \eta$

$\lhd^1 \kappa \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \cdot 2 = \hat{\eta}$ in $\mathcal{H}_\gamma$

In (b) gilt natürlich erst recht $\mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}}[\Theta'] \subseteq \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta']$. Weiterhin bemerken wir, dass $\psi_\kappa(\gamma+1) < \psi_k(\hat{\alpha})$ gilt.

1. $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}} \in \Gamma$ ist die Hauptformel des letzten Schlusses und es gilt

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta,\iota]\Big|\frac{\alpha_\iota}{\mu}\ \Gamma, A_\iota \quad \text{mit } \alpha_\iota < \alpha \text{ für alle } \iota \in \mathrm{J}.$$

Wegen $A \in \Sigma_{\leq 1}(\kappa)$ existiert ein $\beta \in \mathrm{stg}(A) \cap \kappa$, so dass $\forall\iota{\in}\mathrm{J}\,(|\iota| \leq \beta)$. Aus $\mathrm{stg}(A) \subseteq \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ folgt mit ($\mathcal{A}3$) für $\tau \geq \kappa$: $\beta \in \mathrm{stg}(A) \cap \tau \subseteq \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \tau \subseteq \psi_\tau(\gamma+1)$ und somit ist $\forall\iota{\in}\mathrm{J}\,\big(|\iota| < \psi_\tau(\gamma+1)\big)$. Also gilt $\mathcal{A}(\Theta,\iota;\gamma,\kappa,\mu)$ für alle $\iota \in \mathrm{J}$ und die Nebeninduktionsvoraussetzung liefert

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta_\iota}}_{\hat{\alpha_\iota}}[\Theta,\iota]\Big|\frac{\psi_\kappa\hat{\alpha_\iota}}{\cdot}\ \Gamma, A_\iota \quad \text{für alle } \iota \in \mathrm{J}.$$

(b) ergibt $\mathcal{H}^{\hat{\eta_\iota}}_{\hat{\alpha_\iota}}[\Theta,\iota] \subseteq \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta,\iota]$, also kann der Operator wie folgt vergrößert werden:

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta,\iota]\Big|\frac{\psi_\kappa\hat{\alpha_\iota}}{\cdot}\ \Gamma, A_\iota \quad \text{für alle } \iota \in \mathrm{J}$$

Desweiteren liefert (b) $\psi_\kappa\hat{\alpha_\iota} < \psi_\kappa\hat{\alpha}$ und wegen (a) folgt mit ($\bigwedge$) die Behauptung.

2. $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}} \in \Gamma$ ist die Hauptformel des letzten Schlusses und es gilt

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]\Big|\frac{\alpha_0}{\mu}\ \Gamma, A_{\iota_0} \quad \text{mit } \alpha_0 < \alpha \text{ für ein } \iota_0 \in \mathrm{J}.$$

Aus der Nebeninduktionsvoraussetzung folgt

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\kappa\hat{\alpha_0}}{\cdot}\ \Gamma, A_{\iota_0}.$$

($\bigvee$) liefert wegen (a), (b) die Behauptung.

3. $\exists z{\in}\mathrm{L}_\pi\, A^{(z,\pi)} \in \Gamma$ mit $A \in \Sigma_{\leq 1}(\pi)$ und $\pi \leq \kappa$ ist die Hauptformel des letzten Schlusses und es gilt

$$\mathcal{H}_\gamma^\eta[\Theta]\Big|\frac{\alpha_0}{\bar{\mu}}\ \Gamma, A \quad \text{mit } \alpha_0, \pi < \alpha.$$

Die Nebeninduktionsvoraussetzung liefert

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}}^{\hat{\eta_0}}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\kappa\hat{\alpha_0}}{\cdot}\ \Gamma, A.$$

Das weitere Vorgehen hängt von der Größe von $\psi_\kappa\hat{\alpha_0}$ ab.

3.1. $\psi_\kappa\hat{\alpha_0} \geq \pi$: Die Behauptung folgt wegen $\psi_\kappa\hat{\alpha_0}, \pi < \psi_\kappa\hat{\alpha} \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\eta}}[\Theta]$ mit (ref) und (b).

3.2. $\psi_\kappa\hat{\alpha_0} < \pi$: Aus dem Beschränkungslemma 7.3 folgt (Man sieht $\psi_\kappa(\hat{\alpha_0}{+}1) \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}+1}^{\hat{\eta_0}}[\Theta]$ mit ($\mathcal{A}$1) ein.)

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}+1}^{\hat{\eta_0}}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\kappa\hat{\alpha_0}}{\cdot}\ \Gamma, A^{(\psi_\kappa(\hat{\alpha_0}+1),\pi)}.$$

Mit einem ($\exists$)–Schluss kommt man durch (a) und (b) zur Behauptung.

4. Der letzte Schluss ist (cut) mit Schnittformel C. Also ist $\mathrm{rk}(C) < \bar{\mu}$ und es gilt

$$(1) \quad \mathcal{H}_\gamma^\eta[\Theta]\Big|\frac{\alpha_0}{\bar{\mu}}\ \Gamma, (\neg)C \quad \text{mit} \quad \alpha_0 < \alpha \quad \text{und} \quad \mathrm{lh}(C) \in \mathcal{H}_\gamma^\eta[\Theta].$$

4.1. $\mathrm{rk}(C) < \kappa$.
Wegen $\mathrm{stg}(C) \subseteq \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ folgt $\mathrm{rk}(C) \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \kappa \subseteq \psi_\kappa(\gamma+1)$ nach ($\mathcal{A}$3), also kann die Behauptung aus der Nebeninduktionsvoraussetzung mit (cut) unter Verwendung von (a), (b) abgeleitet werden.

4.2. $\kappa \leq \mathrm{rk}(C) \notin \mathrm{REG}$.
Sei $\pi := \Omega_{\sigma+1}$, wobei σ so gewählt ist, dass $\Omega_\sigma \leq \mathrm{rk}(C) < \Omega_{\sigma+1}$ gilt (mit Lemma 3.14). Aus diesem Lemma folgt auch $N\pi \leq N\mathrm{rk}(C) + 2$. Dann ist

$\kappa \leq \mathrm{rk}(C) < \pi$ und $\pi \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ nach Lemma 3.12 (iv), also gilt $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \pi, \mu)$. Wegen $C, \neg\mathrm{C} \in \Delta_0(\pi)$ liefert die Nebeninduktionsvoraussetzung

$$\mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\pi \hat{\alpha_0}}{\cdot}\ \Gamma, (\neg)C \quad \text{mit } \eta_1 := \pi \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \cdot 2.$$

Es ist $\pi \leq \mu$ und aus (1) bekommen wir $\mathrm{stglh}(C) \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]$, also $\mathrm{rk}(C) \in \mathcal{H}^{\eta\otimes\omega^2}_\gamma[\Theta]$ mit Lemma 5.2 (iii). Aus diesen beiden Tatsachen folgt im Verein mit $N\pi \leq N\mathrm{rk}(C) + 2$ (siehe oben):

$$\pi \lhd^1 \mu \oplus \mathrm{rk}(C) \lhd_\Theta \mu \oplus \eta \otimes \omega^2 \lhd^1 \eta \otimes \mu \ \text{ in } \mathcal{H}_\gamma$$

$\mathrm{rk}(C) \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \pi$ impliziert $\mathrm{rk}(C) < \psi_\pi(\gamma + 1)$, also kann man mit $C' :\equiv C$ aus simplen Monotoniegründen bei ($\Box$) weitermachen.

4.3. $\kappa \leq \mathrm{rk}(C) = \pi < \bar{\mu}$ mit $\pi \in \mathrm{REG}$.
Sei oEdA. $C \equiv \exists x{\in}\mathrm{L}_\pi\, A(x) \in \Sigma_1(\pi)$. Wegen $\kappa \leq \pi \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ gilt $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \pi, \mu)$ und $\Gamma, C \subseteq \Sigma_{\leq 1}(\pi)$, also folgt aus der Nebeninduktionsvoraussetzung

$$(2) \quad \mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\pi \hat{\alpha_0}}{\cdot}\ \Gamma, C \quad \text{mit } \eta_1 = \pi \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \cdot 2.$$

Aus ($\mathcal{A}1$) für $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \pi, \mu)$ folgt (mit $\xi := 1$) $\psi_\pi(\hat{\alpha_0} + 1) \in \mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta] \cap \pi$. Da auch $\mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}_\pi(\gamma + 1) \subseteq \mathrm{C}_\pi(\hat{\alpha_0} + 1)$ erfüllt ist, können wir nun mit dem Beschränkungslemma 7.3 aufwarten.

$$(3) \quad \mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\pi \hat{\alpha_0}}{\cdot}\ \Gamma, C^{(\psi_\pi(\hat{\alpha_0}+1),\pi)}$$

Aus der Herleitung von $\Gamma, \neg C$ aus (1) ergibt sich mit Monotonie und Persistenz 5.5, die wegen $\psi_\pi(\hat{\alpha_0} + 1) \in \mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta] \cap \pi$ zum Einsatz kommen kann

$$\mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta]\Big|\frac{\alpha_0}{\bar{\mu}}\ \Gamma, \neg C^{(\psi_\pi(\hat{\alpha_0}+1),\pi)}.$$

Aus $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \pi, \mu)$ und $\gamma < \hat{\alpha_0} + 1 \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subseteq \mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta]$ folgt $\mathcal{A}(\Theta; \hat{\alpha_0} + 1, \pi, \mu)$. Da außerdem $\Gamma, \neg C^{(\psi_\pi(\hat{\alpha_0}+1),\pi)} \subseteq \Sigma_{\leq 1}(\pi)$ ist, erhalten wir mit der Nebeninduktionsvoraussetzung

$$(4) \quad \mathcal{H}^{\eta_2}_{\gamma'}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\pi \gamma'}{\cdot}\ \Gamma, \neg C^{(\psi_\pi(\hat{\alpha_0}+1),\pi)} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \gamma' := \hat{\alpha_0} \oplus \omega^{\mu\oplus\alpha_0} + 1 \\ \eta_2 := \pi \oplus \eta_1 \otimes \omega_2(\gamma') \cdot 2. \end{array}$$

Es gilt $\psi_\pi(\hat{\alpha_0}+1) < \psi_\pi\gamma' \in \mathcal{H}_{\gamma'}^{\eta_2}[\Theta]$ und $\eta_1 \lhd^1 \eta_2$, also gewinnen wir aus (3)

$$\mathcal{H}_{\gamma'}^{\eta_2}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\pi\gamma'}{\cdot}\ \Gamma, C^{(\psi_\pi(\hat{\alpha_0}+1),\pi)}.$$

Es ist $\pi = \mathrm{rk}(C) \lhd_\Theta \eta \otimes \omega^2 \lhd^1 \eta \otimes \mu$, also können wir für $C' :\equiv C^{(\psi_\pi(\hat{\alpha_0}+1),\pi)}$ fortfahren mit ...

$$(\Box) \quad \mathrm{rk}(C') < \psi_\pi\gamma' \ \& \ \pi \leq \mu \ \& \ \pi \lhd_\Theta \eta \otimes \mu \text{ in } \mathcal{H}_{\gamma'} \ \& \ \mathrm{lh}(C') = \mathrm{lh}(C) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}_{\gamma'}^{\eta_2}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\pi\gamma'}{\cdot}\ \Gamma, (\neg)C' \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \gamma' := \hat{\alpha_0} \oplus \omega^{\mu\oplus\alpha_0}+1 \\ \eta_2 = \pi \oplus \eta_1 \otimes \omega_2(\gamma') \cdot 2 \end{array}$$

Mit einem Schnitt erhalten wir wegen $\mathrm{lh}(C') = \mathrm{lh}(C) \in \mathcal{H}_\gamma^\eta[\Theta] \subseteq \mathcal{H}_{\gamma'}^{\eta_2}[\Theta]$ (diese Information gewinnen wir aus (1))

$$\mathcal{H}_{\gamma'}^{\eta_2}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\pi\gamma'+1}{\psi_\pi\gamma'}\ \Gamma.$$

Wir wählen ein σ, mit $\Omega_\sigma \leq \psi_\pi\gamma' < \Omega_{\sigma+1}$ und $N\sigma \leq N\psi_\pi\gamma'$ mit Lemma 3.14. Dann folgt aus der in ($\Box$) gegebenen Herleitung im Verein mit Lemma 3.12 (iv) $\nu := \Omega_\sigma \in \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta]$ und es gilt $[\bar{\nu}, \psi_\pi\gamma'[\ \cap \mathrm{REG} = \emptyset$ und $\psi_\pi\gamma' \in \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta]$. Wir können nun die prädikative Schnittelimination 5.8 anwenden.

$$\mathcal{H}_{\gamma'}^{\eta_3}[\Theta]\Big|\frac{\beta}{\bar{\nu}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \beta := \varphi(\psi_\pi\gamma')(\psi_\pi\gamma'+2) \\ \eta_3 := \eta_2 \otimes \beta \cdot 2 \end{array}$$

Aus $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \kappa, \mu)$ und $\gamma', \nu \in \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta]$ folgt $\mathcal{A}(\Theta; \gamma', \kappa, \nu)$, also können wir die Hauptinduktionsvoraussetzung anwenden ($\nu < \pi \leq \mu$).

$$\mathcal{H}_{\beta'}^{\eta_4}[\Theta]\Big|\frac{\psi_\kappa\beta'}{\cdot}\ \Gamma \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \beta' := \gamma' \oplus \omega^{\nu\oplus\beta} \\ \eta_4 := \kappa \oplus \eta_3 \otimes \omega_2(\beta') \cdot 2 \end{array}$$

Um mit Monotonie zum gewünschten Ergebnis zu gelangen, zeigen wir zunächst $\psi_\kappa\beta' < \psi_\kappa\hat{\alpha}$. Aus $\gamma', \nu, \beta \in \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta]$ folgt $\beta' \in \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta]$. Wegen $\mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}_\kappa(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}_\kappa(\hat{\alpha})$ und $\gamma' < \hat{\alpha}$ ist $\mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta] \subseteq \mathrm{C}_\kappa(\hat{\alpha})$, also $\beta' \in \mathrm{C}_\kappa(\hat{\alpha})$.

Mit $\beta' < \hat{\alpha}$ folgt nun $\psi_\kappa\beta' < \psi_\kappa\hat{\alpha}$ mit Lemma 3.11 (iii) bzw. 3.10 (iii). Es bleibt noch

(5) $\quad \eta_4 \lhd \hat{\eta}$ in $\mathcal{H}_{\hat{\alpha}}[\Theta]$

zu zeigen. Dann folgt die Behauptung mit dem Monotonielemma.

- $\eta_1 = \pi \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \cdot 2 \lhd_\Theta \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \cdot 3$,
  da $\pi \lhd_\Theta \eta \otimes \mu$ nach ($\Box$) gilt.
- $\eta_2 = \eta_1 \otimes \omega_2(\gamma') \cdot 2 \lhd_\Theta \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \otimes \omega_2(\gamma') \cdot 6$
- $\eta_3 = \eta_2 \otimes \beta \cdot 2 \lhd_\Theta \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \otimes \omega_2(\gamma') \otimes \beta \cdot 12$
- $\eta_4 = \kappa \oplus \eta_3 \otimes \omega_2(\beta') \cdot 2 \lhd_\Theta \kappa \oplus \eta \otimes \omega_2(\beta') \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \otimes \omega_2(\gamma') \otimes \beta \cdot 24 =: \eta_5$
- $\eta_5 \lhd^1 \kappa \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \hat{\alpha_0} \oplus \pi =: \eta_6$ errechnet man wie folgt:
  - $\circ\ N\gamma' \leq 2N\hat{\alpha_0} + 1$
  - $\circ\ N\beta = 2N\psi_\pi\gamma' + 3 \leq 2N\pi + 4N\hat{\alpha_0} + 7$
  - $\circ\ N\beta' \leq N\gamma' + N\psi_\pi\gamma' + N\beta + 2 \leq 3N\pi + 8N\hat{\alpha_0} + 13$
  - $\circ\ N\eta_5 \leq N\kappa + 24 \cdot 3^4 \cdot N\eta \cdot [N\beta' + 2]^4$

$$\begin{aligned} &\leq N\kappa + 8[3(N\eta + 3N\pi + 8N\hat{\alpha_0} + 15)]^5 \\ &\leq N\kappa + 8[45(N\eta + N\pi + N\hat{\alpha_0} + 1)]^5 \\ &\leq N\kappa + \Phi(N\eta + N\pi + N\hat{\alpha_0} + 1) \quad \text{nach } (\Phi.2) \\ &\leq \Phi(N\kappa \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \hat{\alpha_0} \oplus \pi) \end{aligned}$$

  Die letzte Ungleichung folgt mit Lemma 3.30, da $N\omega_2(\hat{\alpha}) \geq 2$ ist.
- $\eta_6 \lhd^1_\Theta \kappa \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \cdot 2$

Damit ist (5) bewiesen.

5. $\exists z{\in}\mathrm{L}_M\,(\mathrm{Ad}(z) \wedge B(z)) \in \Gamma$ ist Hauptformel eines (mah)–Schlusses, wobei $B(z) \equiv \forall x{\in}z\,\exists y{\in}z\,A(x,y)$ und $\mathrm{stg}(A) \subseteq M$ ist. Wir haben als Prämisse

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]\Big|\frac{\alpha_0}{\mu}\ \Gamma, B(\mathrm{L}_M) \quad \text{mit } \alpha_0, M < \alpha.$$

Es gilt $\kappa = M$ (denn es ist $\Gamma \subseteq \Sigma_{\leq 1}(\kappa)$ und $\kappa \leq M$). Eine Anwendung der Inversion 5.6 (i) liefert

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta, \iota]\Big|\frac{\alpha_0}{\mu}\ \Gamma, \iota \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_M \to \exists y{\in}\mathrm{L}_M\,A(\iota, y) \quad \text{für alle } \iota \in \mathcal{T}^M_M.$$

Wir setzen $\gamma_\iota := \gamma \oplus |\iota|$. Es gilt $\mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}_M(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}_M(\gamma_\iota+1)$ nach Lemma 3.10 (iv). Lemma 3.10 (ii) besagt $\gamma_\iota \in \mathrm{C}_M(\gamma_\iota)$, also ist $\mathrm{SC}(\gamma_\iota) \subseteq \mathrm{C}_M(\gamma_\iota)$. Damit erhält man $|\iota| < \psi_M\gamma_\iota$ aus $\mathrm{SC}(|\iota|) \subseteq \mathrm{SC}(\gamma_\iota) \subseteq \mathrm{C}_M(\gamma_\iota)$. So ist $\mathrm{stg}(\Theta,\iota) \subseteq \mathrm{C}_M(\gamma_\iota+1)$ erhellt. Aus $\gamma \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ folgt $\gamma_\iota \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta,\iota]$, also insgesamt $\mathcal{A}(\Theta,\iota;\gamma_\iota,M,\mu)$ und damit kann die Nebeninduktionsvoraussetzung angewendet werden. Sie liefert für $\alpha_\iota^* := \gamma_\iota \oplus \omega^{\mu\oplus\alpha_0}$ und $\eta_\iota := M \oplus \eta \otimes \omega_2(\alpha_\iota^*)\cdot 2$

$$\mathcal{H}_{\alpha_\iota^*}^{\eta_\iota}[\Theta,\iota] \overset{\psi_M\alpha_\iota^*}{\underset{\cdot}{\Big|}} \Gamma, \iota \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_M \to \exists y{\in}\mathrm{L}_M\, A(\iota,y).$$

Wegen $\alpha_0, M < \alpha$ gilt $\alpha_\iota^* = \hat{\alpha_0}\oplus|\iota| < \hat{\alpha_0}\oplus M =: \alpha^*$. Also ist $\mathcal{H}_{\alpha_\iota^*}[\Theta] \subseteq \mathcal{H}_{\alpha^*}[\Theta]$. Setze $\beta_\iota := \psi_M\alpha_\iota^*$ und $\pi := \psi_M(\alpha^*+1)$. Es ist

- $\eta_\iota \lhd^1 M \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \alpha_0 \oplus |\iota|$

  $\lhd_\iota^1 M \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \alpha_0 \oplus M$

  $\lhd_\Theta M \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \eta \oplus M$

  $\lhd^1 \hat{\eta}$ in $\mathcal{H}_\gamma$.

Also können wir den Operator auf $\mathcal{H}_{\alpha^*}^{\hat{\eta}}[\Theta,\iota]$ erhöhen. Es gilt $\pi \in \mathcal{H}_{\alpha^*+1}[\Theta]$ nach ($\mathcal{A}$1) und aus ($\mathcal{A}$2) mit $\xi := M+1$ folgt $\pi < \psi_M\hat{\alpha}$. Für $|\iota| < \pi$ ist $|\iota| \in \mathrm{C}_M(\alpha^*+1)$. Damit folgt $\mathrm{SC}(\alpha_\iota^*) \subseteq \mathrm{SC}(|\iota|) \cup \mathrm{SC}(\alpha^*) \subseteq \mathrm{C}_M(\alpha^*+1)$. Somit haben wir $\alpha_\iota^* \in \mathrm{C}_M(\alpha^*+1)$, also $\beta_\iota < \pi$ für alle $\iota \in \mathcal{T}_\pi$. Wir erhalten mit dem Beschränkungslemma 7.3, das wegen $\pi \in \mathcal{H}_{\alpha^*+1}^{\hat{\eta}}[\Theta]$ genutzt werden kann,

$$\mathcal{H}_{\alpha^*+1}^{\hat{\eta}}[\Theta,\iota] \overset{\beta_\iota}{\underset{\cdot}{\Big|}} \Gamma, \iota \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_M \to \exists y{\in}\mathrm{L}_\pi\, A(\iota,y) \quad \text{für alle } \iota \in \mathcal{T}_\pi^M.$$

Ein $(\bigwedge)$–Schluss führt uns wegen $\iota \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_M \equiv \iota \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_\pi$ und $\beta_\iota < \pi \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\eta}}[\Theta]$ zu

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\eta}}[\Theta] \overset{\pi}{\underset{\cdot}{\Big|}} \Gamma, B(\mathrm{L}_\pi).$$

Lemma 4.8 (iv) liefert $\|\mathrm{Ad}(\pi)\| \lhd^1 \mathrm{No}(\mathrm{Ad}(\pi)) = \omega_2(\pi+2)$ und $\omega_2(\pi+2) \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\eta}}[\Theta]$ folgt aus (6), am Schluss dieses Beweises. Damit gewinnen wir aus Lemma 4.11 und 6.2 die Herleitung

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\eta}}[\Theta] \overset{\omega_2(\pi+2)}{\underset{0}{\Big|}} \mathrm{Ad}(\mathrm{L}_\pi).$$

Nun können wir einen $(\wedge)$–Schluss durchführen und erhalten

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\eta}}[\Theta] \Big|\frac{\omega_2(\pi+2)+1}{\cdot} \; \Gamma, \mathrm{Ad}(\mathrm{L}_\pi) \wedge B(\mathrm{L}_\pi).$$

Wegen $\mathrm{L}_\pi \in \mathcal{T}_{\psi_M \hat{\alpha}}$ und $\omega_2(\pi+2)+2 < \varepsilon_{\pi+1} < \psi_M \hat{\alpha}$ liefert eine Anwendung der $(\exists)$–Regel die Behauptung. Es bleibt allerdings noch

(6) $\quad \omega_2(\pi+2)+2 \lhd_\Theta \hat{\eta} \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha}}$

zu zeigen. Dies ist aber schnell getan:

- $$\begin{aligned} \omega_2(\pi+2)+2 = \; & \omega_2(\psi_M(\hat{\alpha_0} \oplus M+1)+2)+2 \\ \lhd^1 \; & \hat{\alpha} \oplus \alpha_0 \\ \lhd_\Theta \; & \hat{\alpha} \oplus \eta \\ \lhd^1 \; & \hat{\eta} \text{ in } \mathcal{H}_{\hat{\alpha}} \end{aligned}$$

7.2 Schnittelimination in KP+(Π_3–Ref)

Die Schnittelimination in RS($\mathcal{K}$) verläuft in zwei Punkten anders, als in [Rathjen 1994b]. Dies ist natürlich durch die abweichende Formulierung des (ref_π^ξ)–Schlusses bedingt. Im Beweis der $\Sigma_3(\pi)$–Reflexion in [Rathjen 1994b], Lemma 8.13 sind pränexe Umformungen im RS($\mathcal{K}$)–Kalkül vonnöten. Dort reicht ein abstraktes Einbettungsargument über eine Grundmengenlehre, in der die pränexen Umformungen durchgeführt werden können. Um diese Herleitungen mit verfeinerten Operatoren leisten zu können, müssten die Beweise formal ausgeführt und langwierige Normabschätzungen vorgenommen werden. Wir haben diese Klippe umschifft, indem wir die pränexen Umformungen überflüssig gemacht haben. Der (ref_π^ξ)–Schluss ist so formuliert, dass er auf endliche Konjunktionen von (invertierten) $\Sigma_3(\pi)$–Sätzen angewendet werden kann.

Konvention. In diesem Kapitel schreiben wir $\mathcal{T}$ für $\mathcal{T}^{\mathcal{K}}$.

Definition 7.7 (Die guten $\mathcal{H}_\gamma$–Operatoren)

$$\mathcal{H}_\gamma(X) := \bigcap\{C(\alpha,\beta) : \; X \subseteq \mathrm{C}(\alpha,\beta) \;\; \& \;\; \alpha > \gamma\}$$

Lemma 7.8 *Für beliebige Θ gilt:*

(i) $\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ *ist ein guter Operator und es gilt* $\mathcal{K} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$.

(ii) $\gamma \leq \gamma' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subseteq \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta]$

(iii) $\xi, \pi, \alpha \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \;\; \& \;\; \xi \leq \alpha \leq \gamma \quad \Rightarrow \quad \Psi^\xi_\pi(\alpha) \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$

(iv) $\alpha \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \;\; \& \;\; \alpha \leq \gamma \quad \Rightarrow \quad \Xi(\alpha) \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$

Schreibweise. Wir schreiben $\mathcal{H}^\eta_\gamma$ für $(\mathcal{H}_\gamma)^\eta$.

Lemma 7.9 (Beschränkung)
Es gelte $C \in \Sigma_{\leq 1}(\beta) \;\; \& \;\; \alpha \leq \beta \leq \pi \;\; \& \;\; \Psi^\xi_\pi(\gamma+1) \leq \nu \in \mathcal{H}^\eta_{\gamma+1}[\Theta]$ $\& \;\; \mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}^\xi_\pi(\gamma+1)$.

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \left|\frac{\alpha}{\rho}\right. \Gamma, C \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^\eta_{\gamma+1}[\Theta] \left|\frac{\alpha}{\rho}\right. \Gamma, C^{(\nu,\beta)}$$

Beweis durch Induktion nach α. Sei $C \simeq \bigvee(C_\iota)_{\iota \in \mathcal{T}_\beta}$. Interessant ist nur der Fall, dass C Hauptformel des letzten Schlusses ist. (Mit C erfüllt $C^{(\nu,\beta)}$ alle Anforderungen, die in einer Herleitung an eine Seitenformel gestellt werden können, da $\mathrm{lh}(C^{(\nu,\beta)}) = \mathrm{lh}(C)$ gilt.) Wegen $\alpha \leq \beta$ kann der letzte Schluss nur $(\bigvee)$ sein. Dann haben wir als Prämisse

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \left|\frac{\alpha_0}{\rho}\right. \Gamma, C, C_{\iota_0} \quad \text{mit } \alpha_0 < \alpha \quad \text{für ein } \iota_0 \in \mathcal{T}_\beta.$$

Wegen $C \in \Sigma_{\leq 1}(\beta)$ gilt $|\iota_0| \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \cap \beta \subseteq \mathrm{C}^\xi_\pi(\gamma+1) \cap \pi = \Psi^\xi_\pi(\gamma+1) \subseteq \nu$, also ist $\iota_0 \in \mathcal{T}_\nu$ und die Behauptung folgt mit $(\bigvee)$ aus der Induktionsvoraussetzung.

Definition 7.10

- $\mathrm{Card}^{\mathcal{K}} := \{\Omega_\sigma : \; 0 < \sigma < \mathcal{K}\}$
- *Für* $\mu \in \mathrm{Card}^{\mathcal{K}}$ *sei* $\bar{\mu} := \begin{cases} \mu + 1 & \textit{falls } \mu \in \mathrm{REG} \\ \mu & \textit{sonst} \end{cases}$
- $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \pi, \xi, \mu) \quad :\Leftrightarrow \quad \gamma, \pi, \xi, \mu \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \;\; \& \;\; \mathrm{stat}(\xi, \pi)$
  $\& \;\; \mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\gamma+1) \;\; \& \;\; \pi \leq \Xi(\gamma+1)$
  $\& \;\; \pi \in \bigcap\{\mathrm{C}^0_\kappa(\beta) : \; \beta > \gamma \;\; \& \;\; \kappa > \pi\}$
  $\& \;\; \xi \leq \gamma \;\; \& \;\; \mu \in \mathrm{Card}^{\mathcal{K}} \;\; \& \;\; \pi \leq \mu$

- $\mathcal{B}(\Theta;\gamma) \quad :\Leftrightarrow \quad \gamma \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]\ \&\ \mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}_\mathcal{K}(\gamma+1)$

Lemma 7.11 *Es gelte $\mathcal{B}(\Theta;\gamma)$ und $\alpha \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]$. Sei $\hat{\alpha} := \gamma \oplus \omega_2(\mathcal{K} \oplus \alpha)$, $\hat{\alpha_0} := \gamma \oplus \omega_2(\mathcal{K} \oplus \alpha_0)$, $\hat{\eta} := \eta \otimes \omega^{\hat{\alpha}} \cdot 2 + m$ und $\hat{\eta_0} := \eta \otimes \omega^{\hat{\alpha_0}} \cdot 2 + m + 1$.*

($\mathcal{B}$1) $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \mathcal{K} \subseteq \Xi(\gamma+1) \subseteq \Xi(\hat{\alpha})$

($\mathcal{B}$2) $\Xi(\hat{\alpha} \oplus \pi) \in \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}\oplus\pi}[\Theta,\pi]$

($\mathcal{B}$3) $\mathcal{B}(\Theta';\gamma)\ \&\ \alpha_0 \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta'] \cap \alpha$ *für ein* $\Theta' \supseteq \Theta$

$$\Rightarrow \quad \hat{\alpha_0} < \hat{\alpha}\ \&\ \Xi(\hat{\alpha_0} \oplus \pi) < \Xi(\hat{\alpha} \oplus \pi)$$
$$\&\ \mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta',\pi] \subseteq \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}\oplus\pi}[\Theta',\pi]\ \&\ \mathrm{M}^{\hat{\alpha}} \subseteq \mathrm{M}^{\hat{\alpha_0}}$$

($\mathcal{B}$4) *Sei $\iota \in \mathcal{T}_\pi$ mit $\pi \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha}}$ und gelte $\alpha_\iota \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta,\iota] \cap \alpha$.*
Des Weiteren sei $\gamma_\iota := \gamma \oplus |\iota|$ und $\alpha^*_\iota := \gamma_\iota \oplus \omega_2(\mathcal{K} \oplus \alpha_\iota)$. Dann gilt

$$\mathcal{B}(\Theta,\iota;\gamma_\iota) \text{ und } \Xi(\alpha^*_\iota \oplus \pi) < \Xi(\hat{\alpha} \oplus \pi) \text{ und } \pi \in \mathrm{M}^{\alpha^*_\iota}.$$

Beweis. ($\mathcal{B}$1). Aus der Voraussetzung $\mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}_\mathcal{K}(\gamma+1)$ und der Definition von $\mathcal{H}_\gamma$ folgt $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \mathcal{K} \subseteq \mathrm{C}_\mathcal{K}(\gamma+1) \cap \mathcal{K} = \Xi(\gamma+1)$ nach Lemma 3.21 (i). $\Xi(\gamma+1) < \Xi(\hat{\alpha})$ gilt nach Teil (iv) des Lemmas 3.21.

($\mathcal{B}$2). Aus $\gamma, \alpha \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ folgt $\hat{\alpha} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subseteq \mathcal{H}_{\hat{\alpha}\oplus\pi}[\Theta,\pi]$. Trivialerweise gilt $\pi \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha}\oplus\pi}[\Theta,\pi]$, somit erhalten wir $\hat{\alpha} \oplus \pi \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha}\oplus\pi}[\Theta,\pi]$ und mit Lemma 7.8 (iv) $\Xi(\hat{\alpha} \oplus \pi) \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha}\oplus\pi}[\Theta,\pi]$. Wegen $\Xi(\hat{\alpha} \oplus \pi) \lhd^1_\pi \hat{\eta}$ ist damit die Behauptung gezeigt.

($\mathcal{B}$3). Wegen $\alpha \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ und $\Theta \subseteq \Theta'$ gilt $\alpha \in \mathcal{H}[\Theta']$. $\hat{\alpha_0} < \hat{\alpha}$ erhält man direkt aus $\alpha_0 < \alpha$ und $\hat{\eta_0} \lhd_{\Theta'} \hat{\eta}$ aus $\alpha_0 \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta']$ durch $\hat{\eta_0} \lhd^1 \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \alpha_0 + m \lhd_{\Theta'} \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \eta + m \lhd^1 \hat{\eta}$ in $\mathcal{H}_\gamma$. Damit ist $\mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta',\pi] \subseteq \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}\oplus\pi}[\Theta',\pi]$ gezeigt. Aus der Voraussetzung folgt $\gamma, \alpha_0 \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta'] \subseteq \mathrm{C}_\mathcal{K}(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}_\mathcal{K}(\hat{\alpha} \oplus \pi)$. Im Verein mit $\pi \in \mathrm{C}_\mathcal{K}(\pi) \subseteq \mathrm{C}_\mathcal{K}(\hat{\alpha} \oplus \pi)$ bekommen wir $\hat{\alpha_0} \oplus \pi \in \mathrm{C}_\mathcal{K}(\hat{\alpha} \oplus \pi) \cap \hat{\alpha} \oplus \pi$ und infolgedessen $\Xi(\hat{\alpha_0} \oplus \pi) < \Xi(\hat{\alpha} \oplus \pi)$. Es bleibt $\mathrm{M}^{\hat{\alpha}} \subseteq \mathrm{M}^{\hat{\alpha_0}}$ zu zeigen. Wegen $\Xi(\gamma+1) < \Xi(\hat{\alpha})$ (siehe ($\mathcal{B}$1)) gilt $\mathrm{C}_\mathcal{K}(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}_\mathcal{K}(\hat{\alpha})$, dh. für $\pi \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha}}$ gilt $\hat{\alpha_0} \in \mathrm{C}(\hat{\alpha},\pi) \cap \hat{\alpha}$. Mit Lemma 3.20 (ii) folgt $\pi \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha_0}}$, womit die Behauptung bestätigt ist.

($\mathcal{B}4$). Aus $\gamma \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ und $\alpha_\iota \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta,\iota]$ folgt $\gamma_\iota, \alpha_\iota^* \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta,\iota] \subseteq \mathcal{H}_{\gamma_\iota}[\Theta,\iota]$. Nach Lemma 3.21 (ii) gilt $\gamma_\iota + 1 \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\gamma_\iota + 1)$, also $\gamma + 1, |\iota| \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\gamma_\iota + 1)$ nach Lemma 3.20 (iv). Daraus folgt zum einen $\Xi(\gamma+1) \leq \Xi(\gamma_\iota + 1)$, also $\mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\gamma_\iota + 1)$ und zum anderen $|\iota| < \Xi(\gamma_\iota + 1)$ mit Lemma 3.21 (i). Insgesamt ist also $\mathcal{B}(\Theta,\iota;\gamma_\iota)$ bewiesen.
Aus $\hat\alpha \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\hat\alpha)$ folgt $\gamma + 1 \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\hat\alpha) \cap \hat\alpha$, also $\Xi(\gamma+1) < \Xi(\hat\alpha) \leq \pi$, wobei die letzte Abschätzung aus $\pi \in \mathrm{M}^{\hat\alpha}$ resultiert. So bringt uns $|\iota| < \pi$ zu $\mathrm{stg}(\Theta,\iota) \subseteq \mathrm{C}(\hat\alpha,\pi)$. Nach Definition von $\mathcal{H}_\gamma$ folgt $\alpha_\iota^* \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta,\iota] \subseteq \mathrm{C}(\hat\alpha,\pi)$ und mit $\alpha_\iota^* < \hat\alpha$ und $\pi < \Xi(\hat\alpha \oplus \pi)$ erhalten wir $\alpha_\iota^* \oplus \pi \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\hat\alpha \oplus \pi) \cap \hat\alpha \oplus \pi$ und haben damit $\Xi(\alpha_\iota^* \oplus \pi) < \Xi(\hat\alpha \oplus \pi)$ nachgewiesen. Aus $\pi \in \mathrm{M}^{\hat\alpha}$ und $\alpha_\iota^* \in \mathrm{C}(\hat\alpha,\pi) \cap \hat\alpha$ folgt $\pi \in \mathrm{M}^{\alpha_\iota^*}$ nach Lemma 3.20 (ii).

Lemma 7.12 *Sei* $\mathrm{stg}_m(A)$ *wie* $\mathrm{stg}(A)$*, aber als Multimenge definiert.*
Gelte $\mathrm{stg}(A) < \gamma \in \mathrm{EPS}$ *und* $m > 0$.

(i) $\mathrm{no}(A) \lhd \gamma \cdot \mathrm{lh}(A) \oplus \bigoplus_{\xi \in \mathrm{stg}_m(A)} \xi$

(ii) $\mathrm{stg}(A) \in \mathcal{H}^\eta[\Theta]$ & $\mathrm{lh}(A) \in \mathcal{H}^{\eta \cdot m + m}[\Theta]$ & $\gamma < \eta$
$\Rightarrow$ $\mathrm{No}(A) \lhd_\Theta \eta \otimes \gamma + m$ *in* $\mathcal{H}$

Beweis. Wir schreiben in Ordinalzahltermen $\oplus\mathrm{stg}_m(A)$ für $\oplus \bigoplus_{\xi \in \mathrm{stg}_m(A)} \xi$.
(i) rechnet man wie folgt nach.

- $\mathrm{no}(\mathrm{Ad}^\xi(b)) = \omega^{3|b|+2} \lhd^1 \gamma \oplus |b|$
- $\mathrm{no}(a \in b) = \omega^{3|a|+2} \oplus \omega^{3|b|+1} \lhd^1 \gamma \oplus |a| \oplus |b|$
- $\mathrm{no}(A \vee B) \lhd^{\mathrm{Iv}} \gamma \cdot \mathrm{lh}(A) \oplus \mathrm{stg}_m(A) \oplus \gamma \cdot \mathrm{lh}(B) \oplus \mathrm{stg}_m(B) + 2 = \gamma \cdot (\mathrm{lh}(A) + \mathrm{lh}(B)) \oplus \mathrm{stg}_m(A \vee B) + 2 \lhd^1 \gamma \cdot \mathrm{lh}(A \vee B) \oplus \mathrm{stg}_m(A \vee B)$
- $\mathrm{no}(\exists x{\in}a\, B(x)) \lhd^1 \omega^{3|a|+1} \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing)) + 1 \lhd^1 \gamma \oplus |a| \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing)) + 1 \lhd^{\mathrm{Iv}} \gamma \oplus |a| \oplus \gamma \cdot \mathrm{lh}(B) \oplus \mathrm{stg}_m(B) + 1 \lhd^1 \gamma \cdot \mathrm{lh}(\exists x{\in}a\, B(x)) \oplus \mathrm{stg}_m(\exists x{\in}a\, B(x))$

(ii) bekommt man wegen $\mathrm{card}(\mathrm{stg}_m(A)) = \mathrm{nt}(A) \leq 2 \cdot \mathrm{lh}(A)$ mit folgender Rechnung aus (i):

- $$\begin{aligned} \mathrm{No}(A) \lhd\ & \omega^{\gamma \cdot \mathrm{lh}(A) \oplus \mathrm{stg}_m(A)} \\ \lhd^1\ & \omega^{\gamma \otimes \omega} \oplus \mathrm{stg}_m(A) \oplus \mathrm{lh}(A) \\ \lhd_\Theta\ & \omega^{\gamma \otimes \omega} \oplus (\eta \cdot 2 + 1) \cdot \mathrm{lh}(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lhd^1\ \omega^{\gamma\otimes\omega} \oplus \eta \otimes \omega + \mathrm{lh}(A)\\
&\lhd_\Theta\ \omega^{\gamma\otimes\omega} \oplus \eta \otimes \omega \oplus \eta \cdot m + m\\
&\lhd^1\ \eta \otimes \gamma + m
\end{aligned}$$

Dabei rechnet man die Normabschätzung der letzten Ungleichung mit Lemma 3.31 nach, wobei man $N\eta \otimes \gamma \geq N\eta \cdot N\gamma$ wegen $\gamma \in \mathrm{EPS}$ (und $\eta > 1$) beachtet.

$$\begin{aligned}
\circ\ N(\omega^{\gamma\otimes\omega} \oplus \eta \otimes \omega \oplus \eta \cdot m + m) &\leq 3N\gamma \cdot 2 + 1 + 3N\eta \cdot 2 + mN\eta + m\\
&\leq \Phi(N\gamma) + \Phi(N\eta + m)\\
&\leq \Phi(N\eta \otimes \gamma + m)
\end{aligned}$$

Satz 7.13 *Gelte $\mathcal{B}(\Theta;\gamma)$ und sei $\Gamma \subseteq \Pi_{\leq 3}(\mathcal{K})$. Dann gilt für alle $\pi \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha}}$*

$$\mathcal{H}_\gamma^\eta[\Theta]\Big|\frac{\alpha}{\mathcal{K}+1}\ \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_{\hat{\alpha}\oplus\pi}^{\hat{\eta}}[\Theta,\pi]\Big|\frac{\Xi(\hat{\alpha}\oplus\pi)}{\cdot}\ \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}$$

mit $\hat{\alpha} := \gamma \oplus \omega_2(\mathcal{K} \oplus \alpha)$ *und* $\hat{\eta} := \eta \otimes \omega^{\hat{\alpha}} \cdot 2 + \mathrm{card}(\Gamma)$.

Beweis durch Induktion nach α. Für $\iota \in \mathcal{T} \cup \{0,1\}$ sei $\hat{\alpha_\iota} := \gamma \oplus \omega_2(\mathcal{K} \oplus \alpha_\iota)$ und $\hat{\eta_\iota} := \eta \otimes \omega^{\hat{\alpha_\iota}} \cdot 2 + m + 1$ zu gegebenem α_ι, wobei $m := \mathrm{card}(\Gamma)$ gesetzt ist. Wir unterscheiden nach Art des letzten Schlusses.

- $(\bigwedge)$ mit Hauptformel $\forall x{\in}\mathrm{L}_\mathcal{K}\, F(x) \in \Gamma$ wobei $F(\varnothing) \in \Sigma_{\leq 2}(\mathcal{K})$ ist. Wir haben die Prämisse

$$\mathcal{H}_\gamma^\eta[\Theta,t]\Big|\frac{\alpha_t}{\mathcal{K}+1}\ \Gamma, t \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_\mathcal{K} \wedge F(t) \quad \text{mit } \alpha_t < \alpha \text{ für alle } t \in \mathcal{T}_\mathcal{K}.$$

Sei fortan $\pi \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha}}$ und $t \in \mathcal{T}_\pi$ sowie $\gamma_t := \gamma \oplus |t|$. Nach $(\mathcal{B}4)$ gilt $\mathcal{B}(\Theta,t;\gamma_t)$, was uns erlaubt, die Induktionsvoraussetzung einzusetzen. Sie liefert für alle $\pi \in \mathrm{M}^{\alpha_t^*}$

$$(1) \quad \mathcal{H}_{\alpha_t^*\oplus\pi}^{\eta_t}[\Theta,t,\pi]\Big|\frac{\Xi(\alpha_t^*\oplus\pi)}{\cdot}\ \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}, t \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_\mathcal{K} \wedge F(t)^{(\pi,\mathcal{K})}.$$

Wobei $\alpha_t^* := \gamma_t \oplus \omega_2(\mathcal{K} \oplus \alpha_t)$ $\eta_t := \eta \otimes \omega^{\alpha_t^*} \cdot 2 + m + 1$ gesetzt ist. Mittels $(\mathcal{B}4)$ erhalten wir $\pi \in \mathrm{M}^{\alpha_t^*}$ und $\Xi(\alpha_t^* \oplus \pi) < \Xi(\hat{\alpha} \oplus \pi) \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha}\oplus\pi}^{\hat{\eta}}[\Theta,\pi]$. Außerdem ist $\eta_t \lhd^1 \eta \otimes \omega_1(\hat{\alpha}) \oplus \alpha_t \oplus |t| + m \lhd_t^1 \eta \otimes \omega_1(\hat{\alpha}) \oplus \alpha_t \oplus \mathcal{K} + m \lhd_\Theta \hat{\eta}$ in $\mathcal{H}_\gamma$. Somit gilt

$\mathcal{H}^{\eta_t}_{\alpha^*_t\oplus\pi}[\Theta,t,\pi] \subseteq \mathcal{H}^{\hat\eta}_{\hat\alpha\oplus\pi}[\Theta,t,\pi]$ und dank dieser Monotonie können wir auf (1) einen $(\bigwedge)$–Schluss mit Hauptformel $\forall x{\in}\mathrm{L}_\pi\, F(x)$ anwenden ($t \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_\mathcal{K} \equiv t \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_\pi$), wodurch sich die Behauptung erschließt.

- $(\bigwedge)$ mit Hauptformel $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}} \in \Gamma$, wobei $\mathrm{J} \neq \mathcal{T}_\mathcal{K}$ gilt.

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta,\iota] \Big|\frac{\alpha_\iota}{\mathcal{K}+1}\ \Gamma, A_\iota \quad \text{mit } \alpha_\iota < \alpha \quad \text{für alle } \iota \in \mathrm{J}$$

Es gilt $\beta := \sup|\mathrm{J}| < \mathcal{K}$, da $\mathrm{J} \neq \mathcal{T}_\mathcal{K}$ vorausgesetzt wurde. Dies zieht via ($\mathcal{B}1$)

$$(1) \quad |\iota| \leq \beta \in \mathrm{stg}(A) \cap \mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \mathcal{K} \subseteq \Xi(\gamma+1)$$

nach sich. Damit gilt $\mathcal{B}(\Theta,\iota;\gamma)$ für alle $\iota \in \mathrm{J}$ und die Induktionsvoraussetzung kann zum Einsatz kommen.

$$\mathcal{H}^{\hat\eta_\iota}_{\hat\alpha_\iota}[\Theta,\pi,\iota] \Big|\frac{\Xi(\hat\alpha_\iota \oplus \pi)}{\cdot}\ \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}, A^{(\pi,\mathcal{K})}_\iota \quad \text{für alle } \pi \in \mathrm{M}^{\hat\alpha_\iota} \text{ und } \iota \in \mathrm{J}$$

Aus $\mathrm{J} \neq \mathcal{T}_\mathcal{K}$ folgt $A^{(\pi,\mathcal{K})} \simeq \bigwedge(A^{(\pi,\mathcal{K})}_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$. ($\mathcal{B}2$) und ($\mathcal{B}3$) (mit $\Theta' :\equiv \Theta,\iota$ und $\alpha_0 := \alpha_\iota$) liefern die notwendige Information, um mit $(\bigwedge)$ diesen Fall abzuschließen. Für den Fall $\mathrm{J} = \emptyset$ nutzt man $\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \subseteq \mathcal{H}^{\hat\eta}_{\hat\alpha\oplus\pi}[\Theta,\pi]$ und die Information aus der gegebenen Herleitung von Γ, um die Voraussetzungen des Schlusses zu erfüllen.

- $(\bigvee)$ mit Hauptformel $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}} \in \Gamma$. Es ist

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \Big|\frac{\alpha_0}{\mathcal{K}+1}\ \Gamma, A_{\iota_0} \quad \text{mit } \alpha_0 < \alpha \quad \text{für ein } \iota_0 \in \mathrm{J}.$$

Eine Anwendung der Induktionsvoraussetzung führt zu

$$\mathcal{H}^{\hat\eta_0}_{\hat\alpha_0\oplus\pi}[\Theta,\pi] \Big|\frac{\Xi(\hat\alpha_0 \oplus \pi)}{\cdot}\ \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}, A^{(\pi,\mathcal{K})}_{\iota_0} \quad \text{für alle } \pi \in \mathrm{M}^{\hat\alpha_0}.$$

Mit ($\mathcal{B}1$) sehen wir $|\iota_0| \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \cap \mathcal{K} \subseteq \Xi(\hat\alpha) = \min \mathrm{M}^{\hat\alpha} \leq \pi$ ein. Für $\pi \in \mathrm{M}^{\hat\alpha}$ folgt daher die Behauptung mit $(\bigvee)$ unter Beachtung von ($\mathcal{B}2$) und ($\mathcal{B}3$).

- (cut): Bei diesem Schnitteliminationssatz folgt die Beseitigung der Schnitte direkt aus der Induktionsvoraussetzung, denn sie liefert (Wegen $\mathrm{rk}(C) \leq \mathcal{K}$ sind die Schnittformeln $C, \neg C \in \Sigma_{\leq 1}(\mathcal{K}) \cup \Pi_{\leq 1}(\mathcal{K})$, also erst recht $\Pi_{\leq 3}(\mathcal{K})$.)

$$\mathcal{H}^{\hat\eta_0}_{\hat\alpha_0\oplus\pi}[\Theta,\pi] \Big|\frac{\Xi(\hat\alpha_0 \oplus \pi)}{\cdot}\ \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}, (\neg)C^{(\pi,\mathcal{K})} \quad \text{für alle } \pi{\in}\mathrm{M}^{\hat\alpha_0}.$$

Aus $\mathrm{stg}(C^{(\pi,\mathcal{K})}) \subseteq \mathcal{H}_\gamma[\Theta,\pi]$ folgt $\mathrm{rk}(C^{(\pi,\mathcal{K})}) \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta,\pi] \cap \mathcal{K} \subseteq \Xi(\hat{\alpha} \oplus \pi)$. In Anbetracht der entsprechenden Bedingung für den ursprünglichen Schnitt gilt $\mathrm{lh}(C^{(\pi,\mathcal{K})}) = \mathrm{lh}(C) \in \mathcal{H}_\gamma^\eta[\Theta] \subseteq \mathcal{H}_{\hat{\alpha}\oplus\pi}^{\hat{\eta}}[\Theta,\pi]$. Zieht man noch ($\mathcal{B}2$) und ($\mathcal{B}3$) hinzu, so steht einer Anwendung von (cut), die zum Ziel führt, nichts im Wege.

- Im Fall (ref_τ^σ) präsentiert sich uns eine Hauptformel $\exists z{\in}\mathrm{L}_\tau\,[\mathrm{Ad}^\sigma(z) \wedge \bigwedge_{j\le k} \exists x{\in}z\, A_j^{(z,\tau)}(x)]$ mit $A_j \in \Pi_{\le 2}(\tau)$ sowie

$$\mathcal{H}_\gamma^\eta[\Theta] \frac{\alpha_0}{\mathcal{K}+1}\, \Gamma, A_0(t_0) \wedge \cdots \wedge A_k(t_k) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \alpha_0, \tau < \alpha \\ \sigma \in \mathcal{H}_\gamma^\eta[\Theta] \ \ \&\ \ \mathrm{stat}(\sigma,\tau). \end{array}$$

Wegen $\tau < \mathcal{K}$ sind die $A_j(t_j) \in \Delta_0(\mathcal{K})$ und folglich darf induktiv

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}^{\hat{\eta_0}}[\Theta,\pi] \frac{\Xi(\hat{\alpha_0} \oplus \pi)}{\cdot}\, \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}, A_0(t_0) \wedge \cdots \wedge A_k(t_k) \quad \text{für alle } \pi \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha_0}}$$

angenommen werden. ($\mathcal{B}2$) und ($\mathcal{B}3$) geben im Verein mit $\tau \in \mathrm{stg}(\Gamma) \cap \mathcal{K} \subseteq \Xi(\hat{\alpha} \oplus \pi)$ die Erlaubnis, mit (ref_τ^σ) das Gewünschte zu erschließen.

- ($\mathrm{ref}_\mathcal{K}$) mit Hauptformel $C \equiv \exists z{\in}\mathrm{L}_\mathcal{K}\,[\mathrm{trans}(z) \wedge z \neq \varnothing \wedge A^{(z,\mathcal{K})}] \in \Gamma$ mit $A \in \Pi_3(\mathcal{K})$. Als Voraussetzungen haben wir $\vec{\mathrm{lh}}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}_\gamma^\eta[\Theta]$ und

$$\mathcal{H}_\gamma^\eta[\Theta] \frac{\alpha_0}{\mathcal{K}+1}\, \Gamma, A \quad \text{mit } \alpha_0, \mathcal{K} < \alpha.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung bekommen wir für alle $\tau \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha_0}}$

$$(2) \qquad \mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}\oplus\tau}^{\hat{\eta_0}}[\Theta,\tau] \frac{\Xi(\hat{\alpha_0} \oplus \tau)}{\cdot}\, \Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, A^{(\tau,\mathcal{K})}.$$

Sei $\pi \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha}}$ und $\tau \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha_0}} \cap \pi$ gegeben. Es gilt

$$(3) \qquad \mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}\oplus\tau}^{\hat{\eta_0}}[\Theta,\tau] \frac{\Xi(\hat{\alpha_0} \oplus \tau)}{0}\, \mathrm{trans}(\mathrm{L}_\tau) \wedge \mathrm{L}_\tau \neq \varnothing.$$

Dies folgt aus Lemma 4.11 und 6.2 mit folgenden Abschätzungen:

- $\|\mathrm{trans}(\mathrm{L}_\tau) \wedge \mathrm{L}_\tau \neq \varnothing\| = \omega_1(\tau \oplus \omega \oplus 4) < \Xi(\hat{\alpha_0} \oplus \tau) \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}\oplus\tau}^{\hat{\eta_0}}[\Theta,\tau]$ gilt nach Lemma 3.21 (vi).
- $\mathrm{No}(\mathrm{trans}(\mathrm{L}_\tau) \wedge \mathrm{L}_\tau \neq \varnothing) = \omega_1(\omega^{\tau+1} \cdot 2 \oplus \omega^\tau \cdot 2 \oplus \omega^2 \cdot 3 \oplus \omega \cdot 3 \oplus 6) \lhd^1 \omega_2(\tau+2) \lhd^1_\tau \mathcal{K} \lhd^1 \hat{\eta_0}$

Ein ($\wedge$) und ein ($\exists$)–Schluss, sowie m–viele ($\vee$)–Schlüsse auf (2) und (3) angewendet ergeben

$$(4) \quad \mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\tau}[\Theta,\tau,\pi] \Big|\frac{\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\tau)+m+3}{\cdot} \bigvee\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, C^{(\pi,\mathcal{K})}.$$

Dabei folgt $\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\tau)+m+3 \in \mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\tau}[\Theta,\tau]$ aus Nachtrag (8). Wir betrachten Terme $s \in \mathcal{T}_\pi$ und $\tau \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha_0}}$ mit $\tau \leq |s|$. Aus dem Gleichheitslemma 4.12 bekommen wir die Herleitung

$$(5) \quad \mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta,\tau,s] \Big|\frac{\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus|s|)}{0} \mathrm{L}_\tau \neq s, \bigwedge\neg\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, \bigvee\Gamma^{(s,\mathcal{K})}$$

indem wir folgende Monotonien nutzen.

- $\|\mathrm{L}_\tau \neq s, \bigwedge\neg\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, \bigvee\Gamma^{(s,\mathcal{K})}\| < \Xi(\hat{\alpha_0}\oplus|s|)$
  gilt, denn es ist $\mathrm{stg}(\Gamma^{(\varnothing,\mathcal{K})}) \subseteq \mathcal{H}_\gamma[\Theta]\cap\mathcal{K} \subseteq \Xi(\hat{\alpha_0}\oplus|s|)$
  und $\tau \leq |s| < \Xi(\hat{\alpha_0}\oplus|s|) \in \mathrm{EPS}$.
- $\mathrm{No}(\mathrm{L}_\tau \neq s, \bigwedge\neg\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, \bigvee\Gamma^{(s,\mathcal{K})}) \lhd_{\Theta,\tau,s} \hat{\eta_0}$ in $\mathcal{H}_\gamma$ ergibt sich aus:
  - ∘ $\mathrm{No}(\mathrm{L}_\tau \neq s) \lhd_{s,\tau} \mathcal{K}$
  - ∘ $\mathrm{No}(\bigvee\Gamma^{(s,\mathcal{K})}) \lhd_{\Theta,s} \eta\otimes\mathcal{K}+m \lhd^1 \hat{\eta_0}$ gilt nach Lemma 7.12 (ii),
    denn aus $\vec{\mathrm{lh}}(\Gamma) \lhd_\Theta \eta$ in $\mathcal{H}_\gamma$ folgt $\mathrm{lh}(\bigvee\Gamma) \lhd_\Theta \eta\cdot m+m$ in $\mathcal{H}_\gamma$.
  - ∘ $\mathrm{No}(\bigwedge\neg\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}) \lhd_{\Theta,\tau} \eta\otimes\mathcal{K}+m \lhd^1 \hat{\eta_0}$ nach Lemma 7.12 (ii)
- $\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus|s|) \in \mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta,s]$ folgt aus:
  - ∘ $\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus|s|) \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta,s]$
    gilt wegen $\hat{\alpha_0}, |s| \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta,s]$ und $|s| < \pi$ nach Lemma 7.8 (iv).
  - ∘ $\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus|s|) \lhd_{\Theta,s} \hat{\eta_0}$ in $\mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}$ wird in Nachtrag (8) gezeigt.

Auch für die nächsten Herleitungsschritte ist stets (8) zu beachten. Wegen $\mathrm{lh}(\bigvee\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}) \in \mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_\gamma[\Theta]$ und $\mathrm{rk}(\bigvee\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}) < \Xi(\hat{\alpha_0}\oplus|s|)$ (siehe oben) kann diese Formel weggeschnitten werden. Um (4) und (5) auf eine gemeinsame Herleitungslänge zu bringen, setzt man Lemma 3.21 (v) ein.

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta,\tau,\pi,s] \Big|\frac{\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus|s|)+m+4}{\cdot} \mathrm{L}_\tau \neq s, \bigvee\Gamma^{(s,\mathcal{K})}, C^{(\pi,\mathcal{K})}$$

gilt für alle $\tau \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha_0}}$ mit $\tau \leq |s|$. Wir können also ($\neg\mathrm{Ad}^{\hat{\alpha_0}}$) applizieren und erhalten so für alle $s \in \mathcal{T}_\pi$

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta,\pi,s]\Big|\frac{\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus|s|)+m+5}{\cdot}\ \neg\mathrm{Ad}^{\hat{\alpha_0}}(s), \bigvee\Gamma^{(s,\mathcal{K})}, C^{(\pi,\mathcal{K})}.$$

Nach zwei $(\vee)$–Schlüssen und Anwendung der $(\forall)$–Regel unter Beachtung von (8) sind wir bei (aus Lemma 3.21 (v) folgt $\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus|s|)+\omega<\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\pi)$)

$$(6)\qquad \mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta,\pi]\Big|\frac{\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\pi)}{\cdot}\ \forall v{\in}\mathrm{L}_\pi\,[Ad^{\hat{\alpha_0}}(v)\ \to\ \bigvee\Gamma^{(v,\mathcal{K})}], C^{(\pi,\mathcal{K})}$$

angelangt. Nun muss noch von der ersten Formel auf $\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}$ geschlossen werden. Um dies zu tun, haben wir die (quasi) Σ_3–Reflexionsregel in unseren Kalkül aufgenommen. Es ist $\mathrm{stg}(\Gamma^{(\varnothing,\mathcal{K})})\subseteq\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\cap\mathcal{K}\subseteq\Xi(\hat{\alpha})=\min\mathrm{M}^{\hat{\alpha}}\leq\pi$, also ist $\bigwedge\neg\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}$ eine endliche Konjunktion von $\Sigma_{\leq 3}(\pi)$–Sätzen. Sei k die Anzahl der $\Pi_3(\mathcal{K})$– und $\Pi_2(\mathcal{K})$–Sätze in Γ und $\Gamma_{\mathrm{inv}}(x_1,\ldots,x_k)$ diejenige Formelmenge, die aus Γ durch invertieren dieser k Allquantoren zu den freien Variablen $x_1,\ldots,x_k$ entsteht. Dabei wird $\forall x{\in}\mathrm{L}_\mathcal{K}\,A(x)$ zu $A(x_i)$ und nicht zu $x_i\ \mathring{\in}\ \mathrm{L}_\mathcal{K}\ \to\ A(x_i)$ invertiert. Aus Lemma 4.11 (i) schließt man mit einigen $(\wedge)^\star$–Schlüssen auf $\models^{\!\star}\ \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}_{\mathrm{inv}}(\vec{t}),\bigwedge\neg\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}_{\mathrm{inv}}(\vec{t})$. Um mittels Lemma 6.2 auf

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta,\pi,\vec{t}\,]\Big|\frac{\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\pi)}{0}\ \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}_{\mathrm{inv}}(\vec{t}),\bigwedge\neg\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}_{\mathrm{inv}}(\vec{t})\quad\text{für alle } \vec{t}\in\mathcal{T}_\pi$$

zu kommen, macht man folgende Abschätzungen für $\vec{t}\in\mathcal{T}_\pi$.

- $\|\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}_{\mathrm{inv}}(\vec{t}),\bigwedge\neg\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}_{\mathrm{inv}}(\vec{t})\|<\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\pi)$,
  denn es ist $\pi\cup\{\pi\}\cup\mathrm{stg}(\Gamma^{(\varnothing,\mathcal{K})})\subseteq\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\pi)\in\mathrm{EPS}$.
- $\mathrm{No}(\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}_{\mathrm{inv}}(\vec{t}),\bigwedge\neg\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}_{\mathrm{inv}}(\vec{t}))\lhd_{\Theta,\pi,\vec{t}}\ \hat{\eta_0}$ in $\mathcal{H}_\gamma$ errechnet man durch:
  ∘ $\mathrm{No}(\bigwedge\neg\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}_{\mathrm{inv}}(\vec{t}))\lhd_{\Theta,\pi,\vec{t}}\ \mathrm{No}(\bigwedge\neg\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})})$ gilt nach Lemma 6.1 (i).
  ∘ $\mathrm{No}(\bigwedge\neg\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})})\lhd_{\Theta,\pi}(\eta\oplus\mathcal{K})\otimes(\mathcal{K}+4)\lhd^1\eta\otimes\omega_2(\mathcal{K}+1)+m$ in $\mathcal{H}_\gamma$ folgt aus Lemma 7.12 wegen $\pi\lhd_\pi\mathcal{K}$ und $\mathrm{stg}(\Gamma)\lhd_\Theta\eta$ in $\mathcal{H}_\gamma$ und $\mathrm{lh}(\bigwedge\Gamma)\lhd_\Theta\eta\cdot m+m$ (s.o.).

Wie oben gezeigt, gilt $\mathrm{stg}(\Gamma^{(\varnothing,\mathcal{K})})\subseteq\pi$, also ist $\bigwedge\neg\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}_{\mathrm{inv}}(\vec{t})$ eine endliche Konjunktion von $\Pi_{\leq 2}(\pi)$–Sätzen. Es gilt $\hat{\alpha_0}\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\subseteq\mathrm{C}_\mathcal{K}(\gamma+1)\subseteq\mathrm{C}(\hat{\alpha},\pi)$ (denn $\Xi(\gamma+1)\leq\Xi(\hat{\alpha})\leq\pi$, wie oben gezeigt), und somit können wir $\mathrm{stat}(\hat{\alpha_0},\pi)$

aus der Voraussetzung $\pi \in \mathrm{M}^{\hat{\alpha}}$ gewinnen, wenn wir die Definition von $\mathrm{M}^{\hat{\alpha}}$ betrachten. Außerdem gilt $\hat{\alpha_0} \in \mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta,\pi]$ und $\pi < \Xi(\hat{\alpha_0} \oplus \pi)$, weshalb wir $(\mathrm{ref}^{\hat{\alpha_0}}_{\pi})$ nutzen können. Daher ergibt sich für alle $\vec{t} \in \mathcal{T}_\pi$

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta,\pi,\vec{t}]\,\Big|\frac{\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\pi)+1}{0}\; \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}_{\mathrm{inv}}(\vec{t}), \exists v{\in}\mathrm{L}_\pi\,[\mathrm{Ad}^{\hat{\alpha_0}}(v) \wedge \bigwedge \neg\Gamma^{(v,\mathcal{K})}].$$

Durch k Anwendungen der ($\forall$)–Regel erlangen wir (es ist $k \leq m$)

$$(7)\quad \mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta,\pi]\,\Big|\frac{\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\pi)+2m+1}{0}\; \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}, \exists v{\in}\mathrm{L}_\pi\,[\mathrm{Ad}^{\hat{\alpha_0}}(v) \wedge \bigwedge \neg\Gamma^{(v,\mathcal{K})}].$$

Wir sind am Ziel angelangt, sobald wir (6) und (7) in geeigneter Weise geschnitten haben. Es ist $\mathrm{rk}(\exists v{\in}\mathrm{L}_\pi\,[\mathrm{Ad}^{\hat{\alpha_0}}(v) \wedge \bigwedge \neg\Gamma^{(v,\mathcal{K})}]) = \pi < \Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\pi)$. Oben haben wir $\mathrm{lh}(\bigwedge\Gamma) \lhd_\Theta \eta\cdot m + m$ in $\mathcal{H}_\gamma$ beobachtet. Daraus leitet sich $\mathrm{lh}(\exists v{\in}\mathrm{L}_\pi\,[\mathrm{Ad}^{\hat{\alpha_0}}(v) \wedge \bigwedge \neg\Gamma^{(v,\mathcal{K})}]) \lhd_\Theta \hat{\eta}$ in $\mathcal{H}_\gamma$ ab und der Schnitt kann durchgeführt werden. Damit ist die Behauptung auch in diesem Fall bewiesen, sobald der Nachtrag geleistet ist.

(8) Für $\beta < \mathcal{K}$ gilt: $\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\beta) + 2m + 8 \lhd_{\Theta,\beta} \hat{\eta_0}$ in $\mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}\oplus\beta}$

- $\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\beta) + 2m + 8 \lhd^1_\beta \eta\otimes\omega^{\hat{\alpha_0}} + m + 1$ in $\mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}\oplus\beta}$ folgt aus:
  - $\circ\ \Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\beta) + 2m + 8 < \mathcal{K} < \eta\otimes\omega^{\hat{\alpha_0}}$
  - $\circ\ N(\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\beta) + 2m + 8) = N\hat{\alpha_0} + N\beta + 2m + 9$
    $\leq \Phi(N\eta + N\hat{\alpha_0} + m - 1 + N\beta) \leq \Phi(N(\eta\otimes\omega^{\hat{\alpha_0}} + m) + N\beta)$
- $\eta\otimes\omega^{\hat{\alpha_0}} + m + 1 \lhd^1 \hat{\eta_0}$

Beobachtung. Beim Übergang von $\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]\,\Big|\frac{\alpha}{\mathcal{K}+1}\;\Gamma$ zu $\mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}\oplus\pi}[\Theta,\pi]\,\Big|\frac{\Xi(\hat{\alpha}\oplus\pi)}{\cdot}\;\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}$ durch obigen Satz gilt $\sigma \leq \hat{\alpha}$ und $\mathrm{lh}(A) \in \mathcal{H}$ bei jedem hinzugekommenen $(\mathrm{ref}^\sigma_\tau)$–Schluss mit Konklusion $\mathcal{H} \vdash \Delta, A$, wobei A die Hauptformel ist.

Lemma 7.14 *Gelte $\mathcal{A}(\Theta;\gamma,\pi,\xi,\mu)$ und $\alpha \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$.*
Sei $\hat{\alpha} := \gamma\oplus\omega_2(\mu\oplus\alpha)$, $\hat{\alpha_0} := \gamma\oplus\omega_2(\mu\oplus\alpha_0)$, $\hat{\eta} := \pi\oplus\xi\oplus\eta\otimes\omega_2(\hat{\alpha})\cdot 2 + m$ und $\hat{\eta_0} := \pi\oplus\xi\oplus\eta\otimes\omega_2(\hat{\alpha_0})\cdot 2 + m + 1$ gesetzt.

($\mathcal{A}1$) $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha}) \in \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta] \cap \mathrm{M}^\xi \cap \pi$ *und* $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ *ist in Normalform.*

($\mathcal{A}2$) $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\hat{\alpha})$ & $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \pi \subseteq \Psi^0_\pi(\gamma+1) \subseteq \Psi^0_\pi(\hat{\alpha})$

($\mathcal{A}3$) $\mathcal{A}(\Theta'; \gamma, \pi, \xi, \mu)$ & $\alpha_0 \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta'] \cap \alpha$ *für ein* $\Theta' \supseteq \Theta$
$\Rightarrow \quad \hat{\alpha_0} < \hat{\alpha}$ & $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha_0}) < \Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ & $\mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}}[\Theta'] \subseteq \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta']$

($\mathcal{A}4$) *Aus* $\sigma \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$, $\sigma \leq \gamma$, $\mathrm{stat}(\sigma, \pi)$ *und* $t \in \mathcal{T}_\pi$ *folgt für* $\gamma_t := \gamma \oplus |t|$*:* $\mathcal{A}(\Theta, t; \gamma_t, \pi, \sigma, \mu)$

($\mathcal{A}5$) *Aus* $\alpha_0, \tau \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ *und* $\pi \leq \tau \leq \mu$ *folgt* $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \tau, 0, \mu)$ *und* $\mathcal{A}(\Theta; \hat{\alpha_0}, \tau, 0, \mu)$.

Beweis. ($\mathcal{A}1$). Offensichtlich gilt $\hat{\alpha} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ und mit Lemma 7.8 (iii) folgt $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha}) \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha}}[\Theta]$. Aus $\Theta \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\gamma+1)$ folgt $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subseteq \mathrm{C}(\gamma+1, \Psi^0_\pi(\gamma+1)) \subseteq \mathrm{C}(\hat{\alpha}, \pi)$, also $\hat{\alpha}, \xi, \pi \in \mathrm{C}(\hat{\alpha}, \pi)$. Da außerdem nach Voraussetzung $\xi \leq \gamma < \hat{\alpha}$ und $\mathrm{stat}(\xi, \pi)$ gilt, ist $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ in Normalform und Lemma 3.22 (ii) liefert $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha}) \in \mathrm{M}^\xi \cap \pi$. Da $\hat{\alpha}, \xi, \pi$ Teilterme von $\hat{\eta}$ sind und $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha}) < \pi < \hat{\eta}$ gilt, ist $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha}) \lhd^1 \hat{\eta}$ klar.

($\mathcal{A}2$). $\mathrm{C}^0_\pi(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\hat{\alpha})$ gilt nach Lemma 3.22 (v), da $\Psi^0_\pi(\hat{\alpha})$ nach ($\mathcal{A}1$) und $\Psi^0_\pi(\gamma+1)$ mit derselben Argumentation in Normalform ist. Aus $\Theta \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\gamma+1)$ folgt $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\gamma+1)$ nach Definition von $\mathcal{H}_\gamma$. Mit Lemma 3.22 bekommt man daraus $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \pi \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\gamma+1) \cap \pi \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\hat{\alpha}) \cap \pi = \Psi^0_\pi(\hat{\alpha})$.

($\mathcal{A}3$). Aus ($\mathcal{A}1$) $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha}) < \pi$ folgt $\hat{\alpha}, \pi \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ nach Definition von Ψ. Lemma 3.20 (iv) ergibt $\gamma \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ und als Folge ist $\Psi^0_\pi(\gamma+1) \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$. Wie in ($\mathcal{A}1$) folgt, dass $\Psi^0_\pi(\gamma+1)$ in Normalform ist, also $\Psi^0_\pi(\gamma+1) < \pi$ nach Lemma 3.22 (ii). Insgesamt ist $\Psi^0_\pi(\gamma+1) \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha}) \cap \pi = \Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ bewiesen. Daraufhin gewinnen wir $\mathcal{H}_\gamma[\Theta'] \subseteq \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ aus ($\mathcal{A}2$), also $\hat{\alpha_0} \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$. Wie in ($\mathcal{A}1$) für α zeigt man $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha_0}) < \pi$ (bzw. man wendet ($\mathcal{A}1$) für $\alpha := \alpha_0$ und $\Theta :\equiv \Theta'$ an). Mit obigem folgt $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha_0}) \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha}) \cap \pi = \Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha})$.
Aus $\alpha_0 \lhd_{\Theta'} \eta$ in $\mathcal{H}_\gamma$ folgt $\hat{\eta_0} \lhd^1 \pi \oplus \xi \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \alpha_0 + m \lhd_{\Theta'} \pi \oplus \xi \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \eta + m \lhd^1 \hat{\eta}$ in $\mathcal{H}_\gamma$, womit $\mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}}[\Theta'] \subseteq \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta']$ nachgewiesen ist.

($\mathcal{A}4$). $\gamma_t \in \mathcal{H}_{\gamma_t}[\Theta, t]$ ist offensichtlich. Es bleibt nur $\mathrm{stg}(\Theta, t) \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\gamma_t + 1)$ zu zeigen. Nach ($\mathcal{A}2$) gilt $\pi, \gamma \in \mathrm{C}(\gamma_t + 1, \pi)$, also wegen $|t| < \pi$ auch $\pi, \gamma_t \in \mathrm{C}(\gamma_t + 1, \pi)$. Dies impliziert, dass $\Psi^0_\pi(\gamma_t + 1)$ in Normalform ist, also sogar $\gamma_t \in$

$\mathrm{C}^0_\pi(\gamma_t+1)$ gilt, was $\gamma \in \mathrm{C}^0_\pi(\gamma_t+1)$ und schließlich $\Psi^0_\pi(\gamma+1) \leq \Psi^0_\pi(\gamma_t+1)$ nach sich zieht. Damit ist $\mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\gamma_t+1)$ gesichert. Aus dem eben gezeigten $\gamma_t \in \mathrm{C}^0_\pi(\gamma_t+1)$ folgt $|t| \in \mathrm{C}^0_\pi(\gamma_t+1) \cap \pi = \Psi^0_\pi(\gamma_t+1)$, womit insgesamt $\mathrm{stg}(\Theta, t) \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\gamma_t+1)$ bewiesen ist.

($\mathcal{A}5$). Durch die Voraussetzung $\pi \leq \Xi(\gamma+1)$ gilt $\tau \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}_\mathcal{K}(\gamma+1)$. Also ist wegen $\tau < \mathcal{K}$ auch $\tau < \Xi(\gamma+1)$ und umsomehr $\tau < \Xi(\hat{\alpha_0})$ erfüllt. Die weiteren Bedingungen prüfen wir getrennt.
$\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \tau, 0, \mu)$: Im Fall $\pi < \tau$ folgt $\pi \in \mathrm{C}^0_\tau(\gamma+1) \cap \tau = \Psi^0_\tau(\gamma+1)$ aus der Voraussetzung $\pi \in \bigcap\{\mathrm{C}^0_\tau(\delta) \,:\, \delta > \gamma \;\;\&\;\; \tau > \pi\}$, so dass in jedem Fall $\Psi^0_\pi(\gamma+1) \leq \Psi^0_\tau(\gamma+1)$ erfüllt ist. Damit ist der Nachweis von $\mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}^0_\tau(\gamma+1)$ erbracht. Sei nun $\delta > \gamma$ und $\kappa > \tau$ gegeben. Dann ist $\pi \in \mathrm{C}^0_\kappa(\delta) \cap \kappa = \Psi^0_\kappa(\delta)$. Aus $\tau \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ folgt $\tau \in \mathrm{C}(\gamma+1, \pi)$ mittels ($\mathcal{A}2$), was mit $\pi < \Psi^0_\kappa(\delta)$ zu $\tau \in \mathrm{C}^0_\kappa(\delta)$ übergeht. Insgesamt folgt $\tau \in \bigcap\{\mathrm{C}^0_\kappa(\delta) \,:\, \delta > \gamma \;\&\; \kappa > \tau\}$.
$\mathcal{A}(\Theta; \hat{\alpha_0}, \tau, 0, \mu)$: Wir zeigen $\mathrm{C}^0_\pi(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}^0_\tau(\hat{\alpha_0}+1)$. Der Rest wird wie im ersten Teil bewiesen. Im Fall $\pi < \tau$ erhält man $\Psi^0_\pi(\gamma+1) \subseteq \pi \in \mathrm{C}^0_\tau(\hat{\alpha_0}+1) \cap \tau = \Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0}+1)$ aus $\pi \in \bigcap\{\mathrm{C}^0_\tau(\delta) \,:\, \delta > \gamma \;\;\&\;\; \tau > \pi\}$. Im Fall $\tau = \pi$ folgt $\Psi^0_\pi(\gamma+1) < \Psi^0_\pi(\hat{\alpha_0}+1)$ aus Lemma 3.22 (v), da $\Psi^0_\pi(\gamma+1)$ und $\Psi^0_\pi(\hat{\alpha_0})$, wie schon gezeigt, in Normalform sind.

Satz 7.15 *Gelte* $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \pi, \xi, \mu)$ *und* $\Gamma \subseteq \Sigma_{\leq 1}(\pi)$. *In allen folgenden Herleitungen kommt* $(\mathrm{ref}^\sigma_\tau)$ *mit Konklusion* $\mathcal{H} \vdash \Delta, A$ *nur mit* $\sigma \leq \gamma$ *und* $\mathrm{lh}(A) \in \mathcal{H}$ *vor, wobei* A *die Hauptformel ist. Dann gilt*

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \overset{\alpha}{\underset{\mu}{\mid\!\!-}} \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta] \overset{\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha})}{\underset{\cdot}{\mid\!\!-\!\!-\!\!-}} \Gamma$$

$$\textit{mit} \quad \hat{\alpha} := \gamma \oplus \omega_2(\mu \oplus \alpha) \quad \textit{und} \quad \hat{\eta} := \pi \oplus \xi \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \cdot 2 + \mathrm{card}(\Gamma).$$

Beweis durch Hauptinduktion nach μ mit Nebeninduktion nach α. Zu $\iota \in \mathcal{T} \cup \{0,1\}$ und gegebenem α_ι sei $\hat{\alpha_\iota} := \gamma \oplus \omega_2(\mu \oplus \alpha_\iota)$ und $\hat{\eta_\iota} := \pi \oplus \xi \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_\iota}) \cdot 2 + m + 1$ mit $m := \mathrm{card}(\Gamma)$. Wir unterscheiden nach Art des letzten Schlusses in der gegebenen Herleitung.

- ($\bigwedge$) mit Hauptformel $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota \in \mathrm{J}} \in \Gamma$. Es gilt

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta, \iota] \overset{\alpha_\iota}{\underset{\mu}{\mid\!\!-}} \Gamma, A_\iota \quad \text{mit } \alpha_\iota < \alpha \text{ für alle } \iota \in \mathrm{J}.$$

Nach Voraussetzung ist $A \in \Delta_0(\pi)$, daher ist $\mathrm{stg}(A) \subseteq \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \pi \subseteq \Psi^0_\pi(\gamma+1)$ nach ($\mathcal{A}2$), also gilt

$$\forall \iota{\in}\mathrm{J}\ (|\iota| < \Psi^0_\pi(\gamma+1)).$$

Dies zieht $\mathcal{A}(\Theta, \iota; \gamma, \pi, \xi, \mu)$ für alle $\iota \in \mathrm{J}$ nach sich. Nun kommt die Nebeninduktionsvoraussetzung zum Zuge.

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta_\iota}}_{\hat{\alpha_\iota}}[\Theta, \iota] \overset{\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha_\iota})}{\underset{\cdot}{\vdash}} \Gamma, A_\iota$$

Laut ($\mathcal{A}1$) und ($\mathcal{A}3$) kann die Behauptung mit ($\bigwedge$) erschlossen werden.

- ($\bigvee$) mit Hauptformel $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in \mathrm{J}} \in \Gamma$. Es gilt

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \overset{\alpha_0}{\underset{\bar{\mu}}{\vdash}} \Gamma, A_{\iota_0} \quad \text{mit } \alpha_0 < \alpha \quad \text{für ein } \iota_0 \in \mathrm{J}.$$

Die Nebeninduktionsvoraussetzung liefert

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}}[\Theta] \overset{\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha_0})}{\underset{\cdot}{\vdash}} \Gamma, A_{\iota_0}.$$

Mit einem ($\bigvee$)–Schluss folgt die Behauptung unter Berücksichtigung von ($\mathcal{A}1$) und ($\mathcal{A}3$).

- ($\mathrm{ref}_{\mathcal{K}}$) kann wegen $\Gamma \subseteq \Sigma_{\leq 1}(\pi)$ nicht vorliegen.

- ($\mathrm{ref}^\sigma_\kappa$) mit $\kappa < \pi$. ($\kappa > \pi$ kann wegen $\Gamma \subseteq \Sigma_{\leq 1}(\pi)$ nicht der Fall sein, $\kappa = \pi$ wird im nächsten Fall behandelt.) Die Behauptung folgt ähnlich wie im vorigen Fall. Zusätzlich beobachtet man, dass $\kappa \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \cap \pi \subseteq \Psi^0_\pi(\hat{\alpha})$ aus ($\mathcal{A}2$) folgt.

- (ref^σ_π) mit Hauptformel $\exists z{\in}\mathrm{L}_\pi\, [\mathrm{Ad}^\sigma(z) \wedge \bigwedge_{j \leq k} \exists x{\in}z\, A_j(x)] \in \Gamma$, wobei $A_j(\varnothing) \in \Pi_{\leq 2}(\pi)$ für alle $j \leq k$ ist. Laut der über (ref^σ_π) gemachten Voraussetzung gilt $\sigma \leq \gamma$ und $k \lhd_\Theta \eta$ in $\mathcal{H}_\gamma$. Des Weiteren gilt $\mathrm{stat}(\sigma, \pi)$, $\sigma \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]$, sowie $\alpha_0, \pi < \alpha$ und wir haben eine Herleitung

$$(1) \quad \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]\Big|\frac{\alpha_0}{\bar{\mu}}\ \Gamma, \bigwedge_{j\le k} A_j(t_j) \quad \text{mit } t_j \in \mathcal{T}_\pi.$$

Sei $P \subseteq [0,k]$ die Menge der Indices j der $\Pi_2(\pi)$– und $\Pi_1(\pi)$–Sätze unter $A_0(t_0), \cdots, A_k(t_k)$. Diese Sätze haben die Gestalt $A_j(t_j) \simeq \bigwedge(A'_j(t_j,s))_{s\in\mathcal{T}_\pi}$. Da die angestrebte Herleitungsschranke $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ unterhalb von π liegt, muss der vorliegende (ref$^\sigma_\pi$)-Schluss eliminiert werden. Um die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, müssen einige Inversionen vorgenommen werden, zunächst die ($\wedge$)–Inversion 5.12 (iii).

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]\Big|\frac{\alpha_0}{\bar{\mu}}\ \Gamma, A_j(t_j) \quad \text{für alle } j \le k$$

Nun rücken wir den Allquantoren mit der ($\bigwedge$)–Inversion 5.12 (i) zu Leibe. Durch $\eta\cdot 2+4 \lhd^1 \eta\cdot 3$ erreichen wir für $j \in P$

$$\mathcal{H}^{\eta\cdot 3}_\gamma[\Theta,s]\Big|\frac{\alpha_0}{\bar{\mu}}\ \Gamma, A'_j(t_j,s) \quad \text{für alle } s \in \mathcal{T}_\pi.$$

Zur einheitlichen Schreibweise sei $A'_j(t_j,x) :\equiv A_j(t_j)$ für $j \in [0,k]\backslash P$ gesetzt. Dann gilt Obiges und $A'_j(t_j,s) \in \Sigma_{\le 1}(\pi)$ für alle $j \le k$. Sei ein $s \in \mathcal{T}_\pi$ festgehalten. Für $\gamma_s := \gamma \oplus |s|$ gilt $\mathcal{A}(\Theta, s; \gamma_s, \pi, \sigma, \mu)$ nach ($\mathcal{A}4$) ($\sigma \le \gamma$ gilt nach Voraussetzung), also bekommen wir via Nebeninduktionsvoraussetzung für alle $j \le k$

$$\mathcal{H}^{\eta_s}_{\alpha_s}[\Theta,s]\Big|\frac{\beta_s}{\cdot}\ \Gamma, A'_j(t_j,s) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \alpha_s := \gamma_s \oplus \omega_2(\mu\oplus\alpha_0) \\ \beta_s := \Psi^\sigma_\pi(\alpha_s) \\ \eta_s := \pi\oplus\sigma\oplus\eta\otimes\omega_2(\alpha_s)\cdot 6+m+1. \end{array}$$

Es ist $\alpha_s < \hat{\alpha_0} \oplus \pi < \hat{\alpha}$ und wegen $s \lhd^1_s \pi$ gilt:

- $\eta_s \lhd^1_s \pi\oplus\sigma\oplus\eta\otimes\omega_2(\hat{\alpha_0}\oplus\pi)\cdot 6+m+1$

  $\lhd_\Theta \pi\oplus\eta\otimes(\omega_2(\hat{\alpha_0}\oplus\pi)\cdot 6+1)+m+1$

  $\lhd_\Theta \pi\oplus\eta\otimes\omega_2(\hat{\alpha})\oplus\alpha_0+m+1$

  $\lhd_\Theta \hat{\eta}$

Damit ist $\mathcal{H}^{\eta_s}_{\alpha_s}[\Theta, s] \subseteq \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi}[\Theta, s]$. Nun können wir die Reflexion des ursprünglichen Schlusses mit dem Beschränkungslemma 7.9 erreichen. Als Reflexionspunkt wird $\nu := \Psi^\sigma_\pi(\hat{\alpha_0} \oplus \pi + 1)$ dienen. Wir betrachten nur noch $s \in \mathcal{T}_\nu$ und zeigen

(2) $\quad \beta_s < \nu < \pi.$

$\Psi^\sigma_\pi(\hat{\alpha_0})$ ist in Normalform, also nach (zweimaliger Anwendung von) Lemma 3.22 (iv) auch $\nu = \Psi^\sigma_\pi(\hat{\alpha_0} \oplus \pi + 1)$. Damit ist $\nu < \pi$ gesichert und es gilt $\pi, \hat{\alpha_0} \in \mathrm{C}^\sigma_\pi(\hat{\alpha_0} \oplus \pi + 1)$. Im Verein mit $|s| < \nu \subseteq \mathrm{C}^\sigma_\pi(\hat{\alpha_0} \oplus \pi + 1)$ folgt $\alpha_s \in \mathrm{C}^\sigma_\pi(\hat{\alpha_0} \oplus \pi + 1)$ und mit Lemma 3.22 (iii) erreichen wir $\beta_s = \Psi^\sigma_\pi(\alpha_s) < \nu$.
Wegen (2) und $\nu \in \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi+1}[\Theta, s]$ können wir das Beschränkungslemma 7.9 einsetzen.

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha_0}\oplus\pi+1}[\Theta, s] \overset{\beta_s}{\underset{\cdot}{\mid\!\!\!\frac{\quad}{\quad}}} \Gamma, A'^{(\nu,\pi)}_j(t_j, s) \quad \text{für alle } j \leq k$$

Wir vergrößern den Operator auf $\mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta, s]$ und wenden auf alle Herleitungen mit $j \in P$ die $(\forall)$–Regel an ((2) und $\nu \in \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta]$ beachten).

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta] \overset{\nu}{\underset{\bar{\mu}}{\mid\!\!\!\frac{\quad}{\quad}}} \Gamma, A^{(\nu,\pi)}_j(t_j) \quad \text{für alle } j \leq k$$

Für die bevorstehende Existenzquantifizierung ist die Schichtbeschränkung zu prüfen. Die in (1) enthaltene Information auswertend erhalten wir $|t_j| \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \cap \pi \subseteq \Psi^0_\pi(\gamma + 1) \subseteq \nu$. Daher kommen wir mit der $(\exists)$–Regel zu (siehe auch (4), unten)

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta] \overset{\nu+2}{\underset{\cdot}{\mid\!\!\!\frac{\quad\quad}{\quad\quad}}} \Gamma, \exists y{\in}\mathrm{L}_\nu\, A^{(\nu,\pi)}_j(y) \quad \text{für alle } j \leq k.$$

Durch k Anwendungen von $(\wedge)$ erhalten wir

(3) $$\mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta] \overset{\nu+k+2}{\underset{\cdot}{\mid\!\!\!\frac{\quad\quad\quad}{\quad\quad\quad}}} \Gamma, \bigwedge_{j\leq k} \exists y{\in}\mathrm{L}_\nu\, A^{(\nu,\pi)}_j(y) \quad \text{für alle } j \leq k.$$

Um die letzten $k + 2$ Herleitungsschritte zu legitimieren, muss noch

(4) $\quad \nu + k + 2 \in \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta]$

gezeigt werden. Dies folgt aus $k < \mathrm{lh}(\bigwedge_{j\leq k} A_j(t_j)) \lhd_\Theta \eta$ ganz leicht:

- $\nu + k + 2 \lhd^1 \hat{\alpha} \oplus \alpha_0 \oplus \pi \oplus \sigma + k \lhd_\Theta \hat{\alpha} \oplus \eta \cdot 4 \lhd^1 \eta \otimes \omega^{\hat{\alpha}} \cdot 5 \lhd^1 \hat{\eta}$

Um auf die Hauptformel des zu eliminierenden (ref^σ_π)–Schlusses zu kommen, müssen wir noch herleiten, dass die Reflexionsmenge L_ν den gewünschten Zulässigkeitsgrad σ besitzt. Wie unter (2) gezeigt, ist $\nu = \Psi^\sigma_\pi(\hat{\alpha_0} \oplus \pi + 1)$ in Normalform, also gilt nach Lemma 3.22 (ii) $\nu \in \mathrm{M}^\sigma$. Von $\stackrel{\star}{\models} \mathrm{L}_\nu = \mathrm{L}_\nu$ kann man daher mit ($\bigvee$)

(5) $\quad \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta] \Big|\frac{\omega_2(\nu+2)}{0}\ \mathrm{Ad}^\sigma(\mathrm{L}_\nu)$

herleiten. Wir verbinden die Herleitungen (3) und (5) mit ($\wedge$) und gelangen wegen $\nu < \pi$ (siehe (2)) mit der ($\exists$)–Regel zu

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta] \Big|\frac{\omega_2(\nu+2)+3}{\cdot}\ \Gamma, \exists z {\in} \mathrm{L}_\pi\, [\mathrm{Ad}^\sigma(z) \wedge \bigwedge_{j \leq k} \exists y {\in} z\, A^{(z,\pi)}_j(y)].$$

Mittels Lemma 3.22 (iii) erhalten wir $\nu < \Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ aus

- $\hat{\alpha_0} \oplus \pi + 1 < \hat{\alpha}$ gilt wegen $\pi \leq \mu$.
- $\hat{\alpha_0}, \sigma, \pi \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ ist erfüllt, denn
  - ∘ $\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ in NF $\quad\Rightarrow\quad \hat{\alpha}, \pi \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha}) \quad\Rightarrow\quad \gamma, \mu, \pi \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ und
  - ∘ $\alpha_0, \sigma \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subseteq \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$.

Damit ist auch $\omega_2(\nu+2)+3 < \Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha}) \in \mathcal{H}^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha}}[\Theta]$ gezeigt und dieser Fall abgeschlossen.

- Im Fall (cut) haben wir für eine Schnittformel C mit Rang $< \bar{\mu}$ die Prämisse

(6) $\quad \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta] \Big|\frac{\alpha_0}{\bar{\mu}}\ \Gamma, (\neg)C \quad$ für ein $\alpha_0 < \alpha$ wobei $\mathrm{lh}(C) \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[\Theta]$ ist.

∘ 1. Fall: $\bar{\mu} = \mathcal{K}+1$. Für $\kappa := \Xi(\hat{\alpha_0})$ folgt aus Satz 7.13 ($\mathrm{stg}(\Theta) \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\gamma+1)$ gilt durch die Voraussetzung $\pi \leq \Xi(\gamma+1)$ aus $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \ldots)$)

$$\mathcal{H}^{\eta_0}_{\hat{\alpha_0} \oplus \kappa}[\Theta, \kappa] \Big|\frac{\Xi(\hat{\alpha_0} \oplus \kappa)}{\cdot}\ \Gamma, (\neg)C^{(\kappa,\mathcal{K})} \quad \text{mit } \eta_0 := \eta \otimes \omega_1(\hat{\alpha_0}) \cdot 2 + m + 1,$$

denn wegen $\Gamma \subseteq \Sigma_{\leq 1}(\pi)$ und $\pi < \mathcal{K}$ (nach Konvention ist $\pi \in \mathrm{REG}^{<\mathcal{K}}$) gilt $\Gamma^{(\kappa,\mathcal{K})} \equiv \Gamma$. Aus $N\kappa = N\hat{\alpha_0} + 1 \leq N\eta \otimes \omega_1(\hat{\alpha_0}) + 1$ folgt $\mathcal{H}^{\eta_0}_{\hat{\alpha_0} \oplus \kappa}[\Theta, \kappa] \subseteq \mathcal{H}^{\eta_1}_{\gamma'}[\Theta]$ für $\gamma' := \hat{\alpha_0} \oplus \omega_2(\mathcal{K} \oplus \alpha_0)$ und $\eta_1 := \eta \otimes \omega_1(\hat{\alpha_0}) \cdot 3 + m + 2$. Bevor ein Schnitt ausgeführt werden kann, muss $\mathrm{rk}(C^{(\kappa,\mathcal{K})}) < \Xi(\hat{\alpha_0} \oplus \kappa)$ gezeigt werden.

- $\mathrm{rk}(C^{(\kappa,\mathcal{K})}) \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\hat{\alpha_0} \oplus \kappa) \cap \mathcal{K} = \Xi(\hat{\alpha_0} \oplus \kappa)$ folgt aus
  $\circ$ $\mathrm{stg}(C) \subseteq \mathcal{H}^{\eta}_{\gamma}[\Theta] \subseteq \mathrm{C}(\gamma+1,\pi) \subseteq \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\gamma+1) \subseteq \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\hat{\alpha_0} \oplus \kappa)$ und
  $\circ$ $\kappa \in \mathrm{C}_{\mathcal{K}}(\hat{\alpha_0} \oplus \kappa)$.

Wir können daher unser Vorhaben durchführen.

(7) $\quad \mathcal{H}^{\eta_1}_{\gamma'}[\Theta] \overset{\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\kappa)+1}{\underset{\cdot}{\vdash}} \Gamma$

Die Voraussetzung $\mathcal{A}(\Theta;\gamma,\pi,\xi,\mu)$ beinhaltet $\pi \le \Xi(\gamma+1)$, womit durch Lemma 3.21 (iv) $\pi \le \Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\mathcal{K})$ offenbar wird. Aus (7) wissen wir, dass $\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\pi) \in \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta]$ der Fall ist. Insgesamt ist so der Nachweis von $\mathcal{A}(\Theta;\gamma',\pi,\xi,\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\kappa))$ erbracht. Da $\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\kappa) < \mathcal{K} = \mu$ ist, können wir die Hauptinduktionsvoraussetzung einsetzen (Bemerkung nach Satz 7.13 beachten).

$$\mathcal{H}^{\eta_2}_{\beta}[\Theta] \overset{\Psi^{\xi}_{\pi}(\beta)}{\underset{\cdot}{\vdash}} \Gamma \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \beta := \gamma' \oplus \omega_2(\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\kappa)\cdot 2+1) \\ \eta_2 := \xi \oplus \pi \oplus \eta_1 \otimes \omega_2(\beta)\cdot 2 + m \end{array}$$

Wie oben folgt $\hat{\alpha_0} \in \mathrm{C}^{\xi}_{\pi}(\hat{\alpha})$. Dann ist wegen $\hat{\alpha_0} < \hat{\alpha}$ auch $\kappa,\gamma' \in \mathrm{C}^{\xi}_{\pi}(\hat{\alpha})$ und wegen $\hat{\alpha_0}\oplus\kappa < \hat{\alpha}$ auch $\Xi(\hat{\alpha_0}\oplus\kappa) \in \mathrm{C}^{\xi}_{\pi}(\hat{\alpha})$. Insgesamt ergibt sich $\beta \in \mathrm{C}^{\xi}_{\pi}(\hat{\alpha})\cap\hat{\alpha}$, was $\Psi^{\xi}_{\pi}(\beta) < \Psi^{\xi}_{\pi}(\hat{\alpha})$ nach sich zieht. Es bleibt $\eta_2 \lhd_{\Theta} \hat{\eta}$ in $\mathcal{H}_{\hat{\alpha}}$ zu zeigen. Es gilt

- $\eta_1 \lhd^1 \eta \otimes \omega_1(\hat{\alpha_0})\cdot 3m$ nach Lemma 3.33 (vii).
- $\eta_2' := \eta_1 \otimes \omega_2(\beta)\cdot 2 + m \lhd \eta \otimes \omega_1(\hat{\alpha_0}) \otimes \omega_2(\beta)\cdot 6m^2 =: \eta_3'$
- $\eta_3' \lhd^1 \eta \otimes \omega_1(\hat{\alpha}) \oplus \hat{\alpha_0} + m \lhd^1 \eta \otimes \omega_1(\hat{\alpha})\cdot 2 + m =: \eta_4'$ errechnet man wie folgt.
  $\circ$ $N\gamma' \le 2N\hat{\alpha_0}$
  $\circ$ $N\beta \le N\gamma' + 4N\hat{\alpha_0} + 7 \le 6N\hat{\alpha_0} + 7$
  $\circ$ $N\eta_3' \le 3^2\cdot 6\cdot N\eta\cdot N\omega_1(\hat{\alpha_0})\cdot N\omega_2(\beta)\cdot m^2$
  $\le 2[3(N\eta + 6N\hat{\alpha_0} + 11)]^3\cdot m^2$
  $\le 2[33(N\eta + N\hat{\alpha_0} + 1)]^3\cdot m^2$
  $\le \Phi(N\eta + N\hat{\alpha_0} + 1)\cdot\Phi(m)$ mit $(\Phi.2)$
  $\le \Phi(N\eta \otimes \omega_1(\hat{\alpha}) \oplus \hat{\alpha_0} + m)$ mit $(\Phi.4)$ und Lemma 3.31

Alles in allem gilt $\eta_2 = \xi \oplus \pi \oplus \eta_2' \lhd_{\Theta} \xi \oplus \pi \oplus \eta_4' = \hat{\eta}$.

Bei den folgenden Fällen sei $\mu < \mathcal{K}$ vorausgesetzt. Sie gehen analog zu den

Fällen 4.1 bis 4.3 in der imprädikativen Schnittelimination bei KPM, Satz 7.6.

∘ 2.Fall: $\mathrm{rk}(C) < \pi$. Aus (6) ist $\mathrm{stg}(C) \subseteq \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ ersichtlich, was $\mathrm{rk}(C) \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \pi \subseteq \Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha_0})$ nach sich zieht. Damit folgt auch $(\neg)C \in \Delta_0(\pi)$ und darum ist es erlaubt, die Nebeninduktionsvoraussetzung anzuwenden.

$$\mathcal{H}^{\hat{\eta_0}}_{\hat{\alpha_0}}[\Theta]\Big|\frac{\Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha_0})}{\cdot}\ \Gamma, (\neg)C$$

Hinsichtlich obiger Rangabschätzung lässt sich der ursprüngliche Schnitt wiederholen (die Längenbedingung bekommt man aus (6)) und man kommt dank ($\mathcal{A}$1) und ($\mathcal{A}$3) zur Behauptung.

∘ 3. Fall: $\pi < \mathrm{rk}(C) \notin \mathrm{REG}$. Aus $\mathrm{stg}(C) \subseteq \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ folgt $\mathrm{rk}(C) \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$, also können wir mit Lemma 3.25 und 3.23 (vi) ein $\sigma \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ wählen, für das

$$\Omega_\sigma \leq \mathrm{rk}(C) < \Omega_{\sigma+1} \quad \text{und} \quad N\sigma \leq N\mathrm{rk}(C)$$

gilt. Sei $\tau := \Omega_{\sigma+1}$. Aus $\pi < \mathrm{rk}(C) < \mu \in \mathrm{Card}$ folgt $\pi < \tau \leq \mu$ nach Wahl von σ. Es gilt daher $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \tau, 0, \mu)$ nach ($\mathcal{A}$5) und $\Gamma \cup \{C, \neg C\} \subseteq \Delta_0(\tau)$ wodurch eine Anwendung der Nebeninduktionsvoraussetzung legitimiert ist.

$$\mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}}[\Theta]\Big|\frac{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0})}{\cdot}\ \Gamma, (\neg)C \quad \text{mit } \eta_1 := \tau \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \cdot 2 + m + 1$$

Mit $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \tau, 0, \mu)$ folgt $\mathrm{rk}(C) \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \tau \subseteq \Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0})$. Aus einfachen Monotoniegründen ($\tau \leq \mu\ \ \&\ \ N\tau \leq N\mathrm{rk}(C){+}2 \Rightarrow \tau \lhd \mu \oplus \mathrm{rk}(C) \lhd_\Theta \mu \oplus \eta \otimes \omega^2 \lhd^1 \eta \otimes \mu$) kann daher mit $C' :\equiv C$ bei ($\Box$) fortgesetzt werden.

∘ 4. Fall: $\pi \leq \mathrm{rk}(C) \in \mathrm{REG}$. Sei $\tau := \mathrm{rk}(C)$ und o.E. $C \equiv \exists x{\in}\mathrm{L}_\tau\, A(x) \in \Sigma_1(\tau)$. Es gilt $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \tau, 0, \mu)$ nach ($\mathcal{A}$5) und $\Gamma, C \subseteq \Sigma_{\leq 1}(\tau)$, weshalb die Nebeninduktionsvoraussetzung zum Einsatz kommen kann.

$$\mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}}[\Theta]\Big|\frac{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0})}{\cdot}\ \Gamma, C \quad \text{mit } \eta_1 := \tau \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \cdot 2 + m + 1$$

Wegen $\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0} + 1) \in \mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta]$ können wir folgende Beschränkung (7.9) durchführen.

$$\mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta]\Big|\frac{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0})}{\cdot}\ \Gamma, C^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0}+1), \tau)}$$

Ebenfalls wegen $\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0}+1) \in \mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta]$ resultiert eine geeignete Anwendung der Persistenz 5.11 auf (6) in

$$\mathcal{H}^{\eta_1}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta]\Big|\frac{\alpha_0}{\bar{\mu}}\ \Gamma, \neg C^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0}+1),\tau)}.$$

Da $\mathcal{A}(\Theta; \hat{\alpha_0}, \tau, 0, \mu)$ nach ($\mathcal{A}5$) erfüllt ist, ergibt die Nebeninduktionsvoraussetzung

$$\mathcal{H}^{\eta_2}_{\gamma'}[\Theta]\Big|\frac{\Psi^0_\tau(\gamma')}{\cdot}\ \Gamma, \neg C^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0}+1),\tau)} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l}\gamma' := \hat{\alpha_0} \oplus \omega_2(\mu \oplus \alpha_0) + 1\\ \eta_2 := \tau \oplus \eta_1 \otimes \omega_2(\gamma') \cdot 2 + m + 1.\end{array}$$

Für $C' :\equiv C^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0}+1),\tau)}$ ist $\mathrm{rk}(C') \in \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta] \cap \tau \subseteq \Psi^0_\tau(\gamma')$. Wir können ($\tau = \mathrm{rk}(C) \lhd_\Theta \eta \otimes \omega^2$) fortfahren mit ...

($\square$) Es gilt $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \tau, 0, \mu)$ & $\mathrm{rk}(C') < \Psi^0_\tau(\gamma')$ & $\mathrm{lh}(C') = \mathrm{lh}(C)$ und $\pi \leq \tau \leq \mu$ & $\tau \lhd_\Theta \eta \otimes \mu$ in $\mathcal{H}_{\gamma'}$ sowie

$$\mathcal{H}^{\eta_2}_{\gamma'}[\Theta]\Big|\frac{\Psi^0_\tau(\gamma')}{\cdot}\ \Gamma, (\neg)C' \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l}\gamma' := \hat{\alpha_0} \oplus \omega_2(\mu \oplus \alpha_0)\\ \eta_2 := \tau \oplus \eta_1 \otimes \omega_2(\gamma') \cdot 2 + m + 1.\end{array}$$

Wegen $\mathrm{lh}(C') = \mathrm{lh}(C)$ erhalten wir aus (6) die nötige Information, um die Formeln C' und $\neg C'$ mit einem Schnitt gegeneinander auszuspielen.

$$\mathcal{H}^{\eta_2}_{\gamma'}[\Theta]\Big|\frac{\Psi^0_\tau(\gamma')+1}{\Psi^0_\tau(\gamma')}\ \Gamma$$

Gilt $\pi = \tau$, so gelangen wir durch Ausnutzung der Monotonien $\gamma' < \hat{\alpha}$, $\Psi^0_\tau(\gamma') < \Psi^0_\tau(\hat{\alpha})$ und $\eta_2 \lhd_\Theta \hat{\eta}$ in $\mathcal{H}_{\hat{\alpha}}$ zum Ziel. Dabei folgt $\eta_2 \lhd_\Theta \hat{\eta}$ aus der unten nachgewiesenen Abschätzung $\eta_4 \lhd_\Theta \hat{\eta}$, da η_2 ein Teilterm von η_4 ist. Für den Vergleich der Ψ–Terme reicht der Hinweis, dass nach ($\mathcal{A}2$) $\alpha_0, \mu \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subseteq \mathrm{C}^0_\pi(\hat{\alpha})$ gilt.
Sei also fortan $\pi < \tau$. Wegen $\Psi^0_\tau(\gamma') \in \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta]$ gibt es nach Lemma 3.25 und 3.23 (vi) ein $\sigma \in \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta]$ mit

$$\Omega_\sigma \leq \Psi^0_\tau(\gamma') < \Omega_{\sigma+1} \text{ und } N\sigma \leq N\Psi^0_\tau(\gamma').$$

Für $\nu := \Omega_\sigma$ gilt $[\bar{\nu}, \Psi^0_\tau(\gamma')[\cap \mathrm{REG}^{<\mathcal{K}} = \emptyset$, deswegen können wir einige prädikative Schnitte mittels Lemma 5.14 eliminieren.

$$\mathcal{H}^{\eta_3}_{\gamma'}[\Theta]\Big|\frac{\beta}{\bar{\nu}}\ \Gamma \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \beta := \varphi\Psi^0_\tau(\gamma')(\Psi^0_\tau(\gamma')+2) \\ \eta_3 := \eta_2 \otimes \beta \cdot 2 \end{array}$$

$\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \pi, \xi, \mu)$ beinhaltet $\pi \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$. Mit $\mathcal{A}(\Theta; \gamma, \tau, 0, \mu)$ erlangt man $\pi \subseteq \mathrm{C}^0_\tau(\gamma+1) \cap \tau \subseteq \Psi^0_\tau(\gamma')$. Nach Wahl von σ folgt $\nu \in \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta]$ und im Verein mit der gerade hergeleiteten Abschätzung $\pi \leq \nu$, also ist $\mathcal{A}(\Theta; \gamma', \pi, \xi, \nu)$ der Fall. Wegen $\nu < \mu$ kann jetzt die Hauptinduktionsvoraussetzung zuschlagen.

$$\mathcal{H}^{\eta_4}_{\beta'}[\Theta]\Big|\frac{\Psi^\xi_\pi(\beta')}{\cdot}\ \Gamma \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \beta' := \gamma' \oplus \omega_2(\nu \oplus \beta) \\ \eta_4 := \pi \oplus \xi \oplus \eta_3 \otimes \omega_2(\beta') \cdot 2 + m \end{array}$$

Aus $\gamma, \alpha_0, \sigma, \tau, \mu \in \mathcal{H}_{\gamma'}[\Theta] \subseteq \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ folgt $\nu, \Psi^0_\tau(\gamma') \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ und schließlich $\beta \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$. Daraus setzt sich insgesamt $\beta' \in \mathrm{C}^\xi_\pi(\hat{\alpha})$ zusammen. Im Verein mit $\beta' < \hat{\alpha}$ liefert Lemma 3.22 (iii) $\Psi^\xi_\pi(\beta') < \Psi^\xi_\pi(\hat{\alpha})$. Es bleibt $\eta_4 \lhd_\Theta \hat{\eta}$ in $\mathcal{H}_{\hat{\alpha}}$ zu zeigen.

- $\eta_1 = \tau \oplus \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \cdot 2 + m + 1 \lhd_\Theta \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \cdot 3m$
  nach Lemma 3.33 (vii) und wegen $\tau \lhd_\Theta \eta \otimes \mu$ (Voraussetzung von ($\Box$))
- $\eta_2 = \tau \oplus \eta_1 \otimes \omega_2(\gamma') \cdot 2 + m + 1 \lhd_\Theta \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \otimes \omega_2(\gamma') \cdot 7m^2$
- $\eta_3 = \eta_2 \otimes \beta \cdot 2 \lhd_\Theta \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \otimes \omega_2(\gamma') \otimes \beta \cdot 14m^2$
- $\eta'_4 := \eta_3 \otimes \omega_2(\beta') \cdot 2 + m \lhd_\Theta \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha_0}) \otimes \omega_2(\gamma') \otimes \omega_2(\beta') \otimes \beta \cdot 28m^3 =: \eta'_5$
- $\eta'_5 \lhd^1 \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \hat{\alpha_0} \oplus \tau + m =: \eta'_6$ errechnet man wie folgt:
  ∘ $N\gamma' \leq 2N\hat{\alpha_0} + 1$
  ∘ $N\beta \leq 4N\hat{\alpha_0} + 2N\tau + 7$
  ∘ $N\nu \leq N\Psi^0_\tau(\gamma') + 1 \leq 2N\hat{\alpha_0} + N\tau + 3$
  ∘ $N\beta' \leq 8N\hat{\alpha_0} + 3N\tau + 13$
  ∘ $$\begin{aligned} N\eta'_5 &\leq 28 \cdot 3^4 \cdot N\eta \cdot (N\beta' + 2)^4 \cdot m^3 \\ &\leq 10 \cdot 3^5 \cdot [N\eta + 8N\hat{\alpha_0} + 3N\tau + 15]^5 \cdot m^3 \\ &\leq 10 \cdot [3 \cdot 15(N\eta + N\hat{\alpha_0} + N\tau + 1)]^5 \cdot m^3 \\ &\leq \Phi(N\eta + N\hat{\alpha_0} + N\tau + 1) \cdot \Phi(m) \quad \text{mit } (\Phi.2) \\ &\leq \Phi(N\eta'_6) \quad \text{mit } (\Phi.4) \text{ und Lemma 3.30 (i), da } N\omega_2(\hat{\alpha}) \geq 2 \end{aligned}$$

- $\eta_6' \lhd_\Theta \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \oplus \hat{\alpha} \oplus \eta \oplus \eta \otimes \mu + m \lhd^1 \eta \otimes \omega_2(\hat{\alpha}) \cdot 2 + m =: \eta_7'$

  Alles in allem folgt:

- $\eta_1 \lhd_\Theta \eta_4 = \pi \oplus \xi \oplus \eta_4' \lhd_\Theta \pi \oplus \xi \oplus \eta_7' = \hat{\eta}$

Kapitel 8

Hauptsätze und Resultate

In den Sätzen dieses Kapitels werden nur noch Terme endlicher Schicht zum Operator adjungiert. Für solche Terme s und t gilt[1] $\mathcal{H}[s,t] = \mathcal{H}[\max\{|s|,|t|\}]$, daher reicht es, im Folgenden Operatoren zu betrachten, denen nur eine natürliche Zahl adjungiert ist.
Nach den hochentwickelten Schnitteliminationsverfahren folgt ein Kapitel mit ganz elementaren Beweisen. Die letzte Aufgabe, die auf dem Weg zur Charakterisierung der beweisbar rekursiven Funktionen noch vor uns liegt, besteht darin, den Parameter η bei einer schnittfreien Herleitung einer $\Sigma_1(\omega)$–Formel in den abzählbaren Bereich des Bezeichnungssystems zu kollabieren. Mit dieser Technik kann man auch ein weiteres Ergebnis beweisen. Die schnittfreie RS(ϑ)–Herleitung einer $\Sigma_1(\omega)$–Formel ist endlich. Eine endliche Herleitungslänge kann man effektiv bestimmen, durch die folgende Version der η–Kollabierung.

Satz (η–Kollabierung, alternative Fassung)
Sei $\mathrm{stg}(\Gamma, B(\varnothing)) \leq k < \omega$ *und* $\gamma \in \mathcal{H}_\gamma[k]$*. Dann gilt für* $\hat{\eta} := \gamma \oplus \eta \otimes \omega^\alpha \cdot 2$

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[k] \vert\!\frac{\alpha}{0}\; \Gamma, \exists x{\in}\mathrm{L}_\omega\, B(x) \quad \Rightarrow \quad \vert\!\frac{m}{0}\; \Gamma, \exists x{\in}\mathrm{L}_m\, B(x) \quad \text{mit } m := \mathrm{F}_{\psi_\Omega \hat{\eta}}(k).$$

[1] Dabei ist mit $\mathcal{H}[k]$ für $k \in \omega$ natürlich der Operator $(X \mapsto \mathcal{H}(\{k\} \cup X))$ gemeint.

Dies lässt sich ohne weitere Hilfsmittel durch Induktion nach α beweisen. (Dabei zeigt man $\vdash^{m}_{0} \Gamma, \exists x{\in}\mathrm{L}_{\tilde{m}}\, B(x)$ für $\tilde{m} \geq m$.) Wir verwenden aber eine Fassung der η–Kollabierung, die analog zur Kollabierung (Lemma 2.7) in PA läuft. Dazu benötigen wir zunächst etwas Semantik und ein Analogon zu Lemma 2.5 (iii).

Definition 8.1 *Sei $\mathbb{L}$ die konstruktible Hierarchie. Wir definieren rekursiv:*

- $o\colon\ \mathcal{T}^{\vartheta}_{\omega} \to \mathbb{L}_{\omega};\quad \begin{cases} \mathrm{L}_n & \mapsto\ \mathbb{L}_n \\ [x \in \mathrm{L}_n :\ A^{\mathrm{L}_n}(x, \vec{s})] & \mapsto \{x \in \mathbb{L}_n :\ \mathbb{L}_n \models A[x, o(\vec{s})]\} \end{cases}$

Zur einheitlichen Formulierung setzen wir $o(0) := 0$ und $o(1) := 1$. Für $\mathrm{J} \subseteq \mathcal{T}^{\vartheta}_{\omega}$ sei $o[\mathrm{J}] := \{o(\iota)\ :\ \iota \in \mathrm{J}\}$. Für $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Formeln $\phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\vec{a})$ mit $\vec{a} \in \mathcal{T}^{\vartheta}_{\omega}$ setzen wir $(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\vec{a}))^o :\equiv \phi^{\mathbf{L}_\alpha}(o(\vec{a}))$.

Lemma 8.2 $\forall n{<}\omega\ o[\mathcal{T}^{\vartheta}_{n}] = \mathbb{L}_n$

Beweis. $o[\mathcal{T}^{\vartheta}_{n}] \subseteq \mathbb{L}_n$ ist klar, für die andere Richtung wird Induktion über n gemacht.

- Es gilt $\mathbb{L}_0 = \emptyset = o[\mathcal{T}^{\vartheta}_{0}]$.
- Sei $s \in \mathbb{L}_{n+1}$, also $s \subseteq \mathbb{L}_n$. Es ist $\mathrm{card}(\mathbb{L}_n) = 2_n(0)$, also ist $s = \{s_1, \ldots, s_m\}$ mit $m \leq 2_n(0)$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{T}^{\vartheta}_{n}$, so dass $o(x_i) = s_i$ gilt. Dann ist $x := \{z \in \mathrm{L}_{n+1} :\ z = x_1 \vee \cdots \vee z = x_m\} \in \mathcal{T}^{\vartheta}_{n+1}$, denn es gilt $|x_i| < n+1$ und $\mathrm{lh}(z = x_1 \vee \cdots \vee z = x_m) < 6m < \Phi(n+1)$. Außerdem gilt $o(x) = s$.

Lemma 8.3 *Sei* $\mathrm{stg}(A) \subseteq \omega$. *Dann gilt:*

(i) $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}:\quad \mathbb{L}_\omega \models A^o \quad\Leftrightarrow\quad \forall\iota{\in}\mathrm{J}\ \ \mathbb{L}_\omega \models (A_\iota)^o$

(ii) $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}:\quad \mathbb{L}_\omega \models A^o \quad\Leftrightarrow\quad \exists\iota{\in}\mathrm{J}\ \ \mathbb{L}_\omega \models (A_\iota)^o$

Beweis folgt aus dem vorigen Lemma.

Die beiden folgenden Aussagen treffen auf $\mathrm{RS}(M)$– und $\mathrm{RS}(\mathcal{K})$–Herleitung gleichermaßen zu. Beim Beweis der η–Kollabierung sollte man jedoch beachten, dass in den beiden Fällen die C–Mengen unterschiedlich definiert sind.

Die Analogie sowohl bei den C–Mengen, als auch bei der Normalformbedingung an die Terme $\psi_\Omega\alpha$ bzw. $\Psi^0_\Omega(\alpha)$ ist jedoch so groß, dass der Beweis der η–Kollabierung für beide Fälle formal gleich geführt werden kann.

Lemma 8.4 *Sei* $\mathrm{stg}(A) \leq k < \omega \;\&\; \mathbb{L}_\omega \models \neg A^o$. *Dann gilt:*

$$\mathcal{H}^\eta[k] \vdash^{\alpha}_{0} \Gamma, A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^\eta[k] \vdash^{\alpha}_{0} \Gamma$$

Beweis durch Induktion nach α.

1. $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}}$ ist Hauptformel des letzten Schlusses.

$$\mathcal{H}^\eta[k,\iota] \vdash^{\alpha_\iota}_{0} \Gamma, A, A_\iota \quad \text{mit } \alpha_\iota < \alpha \text{ für alle } \iota \in \mathrm{J}$$

Aus $\mathbb{L}_\omega \models \neg A^o$ folgt mit Lemma 8.3, dass es ein $\iota_0 \in \mathrm{J}$ gibt, für das $\mathbb{L}_\omega \models \neg(A_{\iota_0})^o$ gilt. Es ist $\mathrm{stg}(A_{\iota_0}) \leq \mathrm{stg}(A) \leq k < \omega$ und wegen $|\iota_0| \leq k < \omega$ gilt $\mathcal{H}^\eta[k,\iota_0] = \mathcal{H}^\eta[k]$, also folgt mit zweifacher Anwendung der Induktionsvoraussetzung die Behauptung.

2. $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}}$ ist Hauptformel des letzten Schlusses.

$$\mathcal{H}^\eta[k] \vdash^{\alpha_0}_{0} \Gamma, A, A_{\iota_0} \quad \text{mit } \alpha_0 < \alpha \text{ für ein } \iota_0 \in \mathrm{J}$$

Aus $\mathbb{L}_\omega \models \neg A^o$ folgt mit Lemma 8.3 $\mathbb{L}_\omega \models \neg(A_{\iota_0})^o$. Es ist $\mathrm{stg}(A_{\iota_0}) \leq \mathrm{stg}(A) \leq k < \omega$, also folgt mit zweifacher Anwendung der Induktionsvoraussetzung die Behauptung.

3. Die Hauptformel des letzten Schlusses ist in Γ. In diesem Fall folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung mit demselben Schluss.

Satz 8.5 (η–Kollabierung)
Sei $\mathrm{stg}(B(\varnothing)) \leq k < \omega \;\&\; \gamma \in \mathcal{H}_\gamma[k]$. *Dann gilt für* $\hat\eta := \gamma \oplus \eta \otimes (\alpha + 1)$

$$\mathrm{RS}(\vartheta):\ \mathcal{H}^\eta_\gamma[k] \vdash^{\alpha}_{0} \exists x{\in}\mathrm{L}_\omega\, B(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_\omega \models \exists x{\in}\mathbb{L}_{\mathrm{F}^\vartheta_{\psi^\vartheta\hat\eta}(k)}\, B^o(x).$$

Dabei ist $\psi^{\mathrm{M}}\alpha := \psi_\Omega\alpha$ *und* $\psi^{\mathcal{K}}\alpha := \Psi^0_\Omega(\alpha)$.

Beweis durch Induktion nach α. Wir schreiben F anstelle von F^ϑ und ψ für ψ^ϑ. Zu gegebenem α_0 sei $\hat{\eta_0} := \gamma \oplus \eta \otimes (\alpha_0 + 1)$. Als Voraussetzung für den letzten Schluss haben wir

$$(*) \quad \mathcal{H}^\eta_\gamma[k] \vert\!\frac{\alpha_0}{0}\ \exists x{\in}\mathrm{L}_\omega\, B(x), B(\iota_0) \quad \text{mit } \alpha_0 < \alpha \text{ für ein } \iota_0 \in \mathcal{T}_\omega.$$

(O.E. tritt ι_0 in $B(\iota_0)$ auf, vgl. die erste Bemerkung nach Definition 5.3.) Aus $|\iota_0| \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[k]$ folgt, dass es $\eta_0, \ldots, \eta_n \in \mathcal{H}_\gamma[k]$ gibt mit $|\iota_0| = \eta_0 \lhd^1_k \cdots \lhd^1_k \eta_n = \eta$. Ist $|\iota_0| = 0$, so setzen wir $\eta_0 = 1$ (bzw. streichen η_0 aus der Reihe $\eta_0, \ldots, \eta_n$, falls $\eta_1 = 1$ ist). In jedem Fall erhalten wir

$$|\iota_0| \unlhd^1 \eta_0 \lhd^1_k \eta_1 \cdots \lhd^1_k \eta_n = \eta \quad \text{und} \quad \eta_0 > 0$$

Für $i \leq n$ gilt (da auch $\gamma \in \mathcal{H}_\gamma[k]$ ist)

$$\gamma \oplus \eta_i \in \mathcal{H}_\gamma[k] \subseteq \mathrm{C}(\gamma + 1, 0) \subseteq \mathrm{C}(\gamma \oplus \eta_i, 0),$$

also ist $\psi(\gamma \oplus \eta_i)$ in Normalform. Mit der Information $|\iota_0| < \omega$ folgt daraus

$$(1) \quad |\iota_0| \lhd^1 \psi(\gamma \oplus \eta_0) \lhd^1_k \cdots \lhd^1_k \psi(\gamma \oplus \eta_n) \unlhd^1 \psi\hat{\eta_0}.$$

Wiederum wegen $|\iota_0| < \omega$ folgt mit Lemma 3.28 (ii) und (iii)

$$(2) \quad |\iota_0| < \mathrm{F}_{|\iota_0|}(k) < \mathrm{F}_{\psi\hat{\eta_0}}(k).$$

Wegen $\alpha_0 \in \mathcal{H}^\eta_\gamma[k]$ gibt es $\eta_0, \ldots, \eta_n$ aus $\mathcal{H}_\gamma[k]$ mit $\alpha_0 = \eta_0 \lhd^1_k \eta_1 \lhd^1_k \cdots \lhd^1_k \eta_n = \eta$. Für $i \leq n$ gilt (da auch $\gamma, \alpha \in \mathcal{H}_\gamma[k]$ sind)

$$\gamma \oplus \eta \otimes \alpha \oplus \eta_i \in \mathcal{H}_\gamma[k] \subseteq \mathrm{C}(\gamma + 1, 0) \subseteq \mathrm{C}(\gamma \oplus \eta \otimes \alpha \oplus \eta_i, 0),$$

also ist $\psi_i := \psi(\gamma \oplus \eta \otimes \alpha \oplus \eta_i)$ in Normalform und ebenso $\psi\hat{\eta_0}$ und $\psi\hat{\eta}$. Damit erhalten wir

$$(3) \quad \psi\hat{\eta_0} \unlhd^1_k \psi_0 \lhd^1_k \psi_1 \lhd^1_k \cdots \lhd^1_k \psi_n = \psi\hat{\eta}.$$

1. Fall: $\mathbb{L}_\omega \models (B(\iota_0))^o$. Aus (2) und (3) folgt $|\iota_0| < \mathrm{F}_{\psi\hat{\eta}}(k)$, also gilt die Behauptung.

2. Fall: $\mathbb{L}_\omega \models \neg(B(\iota_0))^o$. Wir vergrößern den Operator in $(*)$ auf $\mathcal{H}^\eta_\gamma[\mathrm{F}_{\psi\hat{\eta}_0}(k)]$ und wenden Lemma 8.4 an (es gilt $\mathrm{stg}(B(\iota_0)) \leq \mathrm{F}_{\psi\hat{\eta}_0}(k) < \omega$).

$$\mathcal{H}^\eta_\gamma[\mathrm{F}_{\psi\hat{\eta}_0}(k)] \overset{\alpha_0}{\underset{0}{\vdash}} \exists x{\in}\mathrm{L}_\omega\, B(x)$$

Mit (3) und Lemma 3.28 (iii) folgt

$$F_{\psi\hat{\eta}_0}(F_{\psi\hat{\eta}_0}(k)) \leq \mathrm{F}_{\psi\hat{\eta}}(k).$$

Die Behauptung kann jetzt durch die Induktionsvoraussetzung erschlossen werden.

Die Kodierung einer Berechnung in einer mengentheoretischen ($\mathcal{L}_\in$) Version von Kleenes T–Prädikat kann nur in $\mathbb{L}_\omega$, nicht aber in ω stattfinden[2]. Daher müssen wir eine $\mathcal{L}_\in$–Formel Lomega(z) definieren, die die Menge $\mathbb{L}_\omega$ beschreibt und von der die infinitären Systeme zeigen, dass sie auf L_ω zutrifft. Diese Aufgabe wird im Anhang erledigt.

Definition. Lomega ist die $\mathcal{L}_\in$–Formel, die im Anhang C.2 definiert wird und für die

$$\mathrm{KP}\omega \vdash \exists z\, \mathrm{Lomega}(z) \quad \text{und} \quad \mathbb{L} \models \forall z\, (\mathrm{Lomega}(z) \leftrightarrow z = \mathbb{L}_\omega)$$

gilt.

Lemma 8.6 $\mathrm{RS}(\vartheta) \overset{\star}{\vdash} \mathrm{Lomega}^\vartheta(\mathrm{L}_\omega)$
Beweis ist im Anhang, Korollar C.8.

Satz 8.7 (Hauptsatz für KPM)
Sei $\phi \in \Delta_0$ eine $\mathcal{L}_\in$–Formel mit $FV(\phi) \subseteq \{x, y\}$.
Gilt $\mathrm{KPM} \vdash \mathrm{Lomega}(z) \rightarrow \forall x{\in}z\, \exists y{\in}z\, \phi(x)$*, so gibt es ein $\eta < \psi_\Omega \varepsilon_{M+1}$ mit*

$$\mathbb{L}_\omega \models \forall x\, \exists y{\in}\mathbb{L}_{\mathrm{F}^M_\eta(|x|)}\, \phi(x, y).$$

Dabei bezeichnet $|x|$ für $x \in \mathbb{L}$ die Schicht von x in $\mathbb{L}$.

[2]Für diesen Hinweis danke ich Wilfried Buchholz.

Beweis. Für die Größenabschätzung des Parameters η reicht es nach Satz 3.6 zu wissen, dass er am Ende im abzählbaren Teil des Bezeichnungssystems $\mathrm{T}(M)$ gelandet ist. Da es offensichtlich ist, dass durch die angewendeten Sätze das Bezeichnungssystem nicht verlassen wird, müssen wir im Folgenden die Ordinalzahlschranken nicht genau bestimmen.
Aus der Voraussetzung folgt mit dem KPM–Interpretationssatz 6.7 die Existenz von $\eta_0, \alpha_0 \in \mathrm{T}(M)$ und $n < \omega$ mit

$$\mathcal{H}_0^{\eta_0} \Big|\frac{\alpha_0}{M+n}\; \forall z{\in}\mathrm{L}_M \big(\mathrm{Lomega}^M(z) \;\rightarrow\; \forall x{\in}z\, \exists y{\in}z\, \phi(x,y)\big).$$

Durch Inversionen 5.6 (i), (iii) und Schnitte mit $\big|\frac{0}{0}\; \mathrm{L}_\omega \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_M$ und der Herleitung aus Lemma 8.6 erhalten wir

$$\mathcal{H}_0^{\eta_0}[\omega] \Big|\frac{\alpha_0+2}{M+n}\; \forall x{\in}\mathrm{L}_\omega\, \exists y{\in}\mathrm{L}_\omega\, \phi(x,y).$$

Wegen $\alpha \lhd_2 \eta \Rightarrow \alpha \lhd \eta+3$ gilt $\mathcal{H}_0^{\eta_0}[\omega] \subseteq \mathcal{H}_0^{\eta_0+3}$ (es ist $N\omega = N\omega^{\omega^0} = 2$). Daher können wir den Operator erhöhen auf $\mathcal{H}_0^{\eta_0+3}$. Durch $(n-1)$–fache Anwendung der prädikativen Schnittelimination 5.8 ergibt sich

$$\text{(1)} \quad \mathcal{H}_0^{\eta_1} \Big|\frac{\alpha_1}{M+1}\; \forall x{\in}\mathrm{L}_\omega\, \exists y{\in}\mathrm{L}_\omega\, \phi(x,y).$$

Es ist $0, \Omega, M \in \mathcal{H}_0$ und $\mathrm{stg}(\forall x{\in}\mathrm{L}_\omega\, \exists y{\in}\mathrm{L}_\omega\, \phi(x,y)) = \{\omega\} \subseteq \mathrm{C}_\Omega(1)$, also bekommen wir mit der imprädikativen Schnittelimination 7.6

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha}_1}^{\eta_2} \Big|\frac{\alpha_2}{\cdot}\; \forall x{\in}\mathrm{L}_\omega\, \exists y{\in}\mathrm{L}_\omega\, \phi(x,y) \quad \text{für } \hat{\alpha}_1 := \omega_2(M \oplus \alpha_1).$$

Die verbliebenen Schnitte werden von der prädikativen Schnittelimination 5.8 beseitigt.

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha}_1}^{\eta_3} \Big|\frac{\alpha_3}{0}\; \forall x{\in}\mathrm{L}_\omega\, \exists y{\in}\mathrm{L}_\omega\, \phi(x,y)$$

Daher liefert Inversion 5.6 (i) und ein Schnitt mit $\big|\!\frac{\star}{}\; t \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_\omega$

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha}_1}^{\eta_3+1}[t] \Big|\frac{\alpha_3}{0}\; \exists y{\in}\mathrm{L}_\omega\, \phi(t,y) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_\omega.$$

Da nach (1) insbesondere $\alpha_1 \in \mathcal{H}_0$ der Fall ist, gilt auch $\hat{\alpha}_1 \in \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_{\hat{\alpha}_1}[t]$, also folgt mit η–Kollabierung 8.5 für ein $\eta \in \mathrm{T}(M) \cap \Omega$

$$\mathbb{L}_\omega \models \exists x{\in}\mathbb{L}_{\mathrm{F}^M_\eta(|t|)}\, \phi(o(t), x) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_\omega.$$

Nach Satz 3.6 gilt $\eta < \psi_\Omega \varepsilon_{M+1}$, also erhalten wir mit Lemma 8.2 die Behauptung.

Korollar 8.8 *Für jede beweisbar rekursive Funktion f von* KPM *existiert ein $\eta < \psi_\Omega \varepsilon_{M+1}$ mit der Eigenschaft*

$$\forall x{\in}\omega \quad f(x) < \mathrm{F}^M_\eta(x).$$

Beweis. Nach elementaren Ergebnissen der Rekursionstheorie kann der Graph jeder rekursiven Funktion durch eine Σ_1–Formel beschrieben werden. In der Sprache $\mathcal{L}_\in$ kann die Berechnung in $\mathbb{L}_\omega$ kodiert werden. Zu einer rekursiven Funktion f gibt es also eine Δ_0–Formel F, so dass für alle $x, y \in \omega$

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L}_\omega \models \exists w\, F(w, x, y)$$

gilt. Ist f beweisbar rekursiv in KPM, so ist

$$\mathrm{KPM} \vdash \mathrm{Lomega}(z) \ \rightarrow\ \forall x{\in}z\, \exists y{\in}z\, \exists w{\in}z \qquad (\mathrm{ord}(x) \ \rightarrow\ \mathrm{ord}(y) \ \wedge\ F(w, x, y))$$

der Fall. Dann gilt aber auch schon

$$\mathrm{KPM} \vdash \mathrm{Lomega}(z) \ \rightarrow\ \forall x{\in}z\, \exists y{\in}z\, \exists w_1{\in}y\, \exists w_2{\in}w_1\, \exists w_3{\in}w_1 \qquad (\mathrm{ord}(x) \ \rightarrow\ \mathrm{ord}(w_3) \ \wedge\ y = \langle w_2, w_3 \rangle \ \wedge\ F(w_2, x, w_3)).$$

Nach Satz 8.7 gibt es ein $\eta < \psi_\Omega \varepsilon_{M+1}$ mit

$$\mathbb{L}_\omega \models \forall x\, \exists y{\in}\mathrm{L}_{\mathrm{F}^M_\eta(|x|)}\, \exists w_1{\in}y\, \exists w_2{\in}w_1\, \exists w_3{\in}w_1 \qquad (\mathrm{ord}(x) \ \rightarrow\ \mathrm{ord}(w_3) \ \wedge\ y = \langle w_2, w_3 \rangle \ \wedge\ F(w_2, x, w_3)).$$

und das hat

$$\forall x{\in}\omega \;\; f(x) < \mathrm{F}^M_\eta(x).$$

zur Folge.

Damit ist die Analyse von KPM geschafft. Analog zu dem Resultat für PA erhalten wir eine Charakterisierung der beweisbar rekursiven Funktionen von KPM. Die Tatsache, dass die Totalität aller Funktionen der Hierarchie $(\mathrm{F}_\gamma)_{\gamma<\psi_\Omega\varepsilon_{M+1}}$ in KPM bewiesen werden kann, folgt aus [Rathjen 1994a].

Korollar 8.9 (Die beweisbar rekursiven Funktionen von KPM)
Die Klasse der rekursiven Funktionen, deren Totalität in KPM *bewiesen werden kann, enthält genau diejenigen Funktionen, die durch iterierte Anwendung von Substitution, primitiver Rekursion und* $(\mathrm{F}^M_\gamma)_{\gamma<\psi_\Omega\varepsilon_{M+1}}$*–beschränktem* μ*–Operator auf die Funktionen* $(x \mapsto 0)$, $(x \mapsto x+1)$ *und* $(\vec{x} \mapsto x_i)$ *erzeugt werden.*

Satz 8.10 (Hauptsatz für KP+(Π_3–Ref))
Sei $\phi \in \Delta_0$ *eine* $\mathcal{L}_\in$*–Formel mit* $FV(\phi) \subseteq \{x,y\}$*.*
Aus $\mathrm{KP} + (\,\Pi_3\text{-Ref}) \vdash \mathrm{Lomega}(z) \,\rightarrow\, \forall x{\in}z\, \exists y{\in}z\, A(x,y)$ *folgt*

$$\mathbb{L}_\omega \models \forall x\, \exists y{\in}\mathbb{L}_{\mathrm{F}^{\mathcal{K}}_\eta(|x|)}\, A(x,y) \quad \textit{für ein } \eta < \Psi^0_\Omega(\varepsilon_{\mathcal{K}+1}).$$

Beweis. Wie in Satz 8.7 brauchen wir auch hier die Ordinalzahlschranken nicht genau zu bestimmen.
Aus der Voraussetzung folgt mit dem Interpretationssatz 6.9 die Existenz von $\eta_0, \alpha_0 \in \mathrm{T}(\mathcal{K})$ und $n < \omega$ mit

$$\mathcal{H}^{\eta_0}_0 \Big|\frac{\alpha_0}{\mathcal{K}+n}\; \forall z{\in}\mathrm{L}_\mathcal{K} \left(\mathrm{Lomega}^\mathcal{K}(z) \,\rightarrow\, \forall x{\in}z\, \exists y{\in}z\, A(x,y)\right).$$

Durch Inversionen 5.12 (i), (iv) und Schnitte mit $\models^{\!\!\star}\ \mathrm{L}_\omega \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_\mathcal{K}$ und der Herleitung aus Lemma 8.6 erhalten wir für $\eta_1, \alpha_1 \in \mathrm{T}(\mathcal{K})$

$$\mathcal{H}^{\eta_1}_0[\omega] \Big|\frac{\alpha_1}{\mathcal{K}+n}\; \forall x{\in}\mathrm{L}_\omega\, \exists y{\in}\mathrm{L}_\omega\, A(x,y).$$

Wegen $\alpha \lhd_2 \eta \Rightarrow \alpha \lhd \eta + 3$ gilt $\mathcal{H}_0^{\eta_1}[\omega] \subseteq \mathcal{H}_0^{\eta_2}$ für $\eta_2 := \eta_1 + 3$ (es ist $N\omega = N\omega^{\omega^0} = 2$). Daher können wir den Operator erhöhen auf $\mathcal{H}_0^{\eta_2}$. Nach $(n-1)$–facher Anwendung der prädikativen Schnittelimination 5.14 haben wir

(1) $\quad \mathcal{H}_0^{\eta_3} \Big|\frac{\alpha_2}{\mathcal{K}+1}\ \forall x{\in}\mathrm{L}_\omega\, \exists y{\in}\mathrm{L}_\omega\, A(x,y).$

Wegen $0, \Omega, \mathcal{K} \in \mathcal{H}_0$ gilt $\mathcal{A}(\emptyset; 0, \Omega, 0, \mathcal{K})$. Nach der Beobachtung zu Satz 6.9 können wir Satz 7.15 anwenden. Wir setzen $\hat{\alpha}_2 := \omega_2(\mathcal{K} \oplus \alpha_2)$, um

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha}_2}^{\eta_4} \Big|\frac{\alpha_3}{\cdot}\ \forall x{\in}\mathrm{L}_\omega\, \exists x{\in}\mathrm{L}_\omega\, A(x,y)$$

zu erhalten. Inversion 5.12 (ii) und ein Schnitt mit der Herleitung $\models^{\!\star}\ t \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_\omega$ liefert

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha}_2}^{\eta_4}[t] \Big|\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\ \exists y{\in}\mathrm{L}_\omega\, A(t,y).$$

Den verbleibenden Schnitten rücken wir mit der prädikativen Schnittelimination 5.14 zu Leibe.

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha}_2}^{\eta_5}[t] \Big|\frac{\alpha_5}{0}\ \exists y{\in}\mathrm{L}_\omega\, A(t,y)$$

Da nach (1) insbesondere $\alpha_2 \in \mathcal{H}_0$ der Fall ist, gilt auch $\hat{\alpha}_2 \in \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_{\hat{\alpha}_2}[t]$, also folgt mit der η–Kollabierung 8.5 für ein $\eta \in \mathrm{T}(\mathcal{K}) \cap \Omega$

$$\mathbb{L}_\omega \models \exists y{\in}\mathbb{L}_{\mathrm{F}_\eta^{\mathcal{K}}(|t|)}\, A(t,y) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_\omega.$$

Mit Lemma 3.17 (ii) und 8.2 erhalten wir die Behauptung.

Um die vollständige Charakterisierung der beweisbar rekursiven Funktionen zu erhalten, benutzen wir das Resultat aus [Schlüter 1997]. Damit folgt, dass KP+(Π_3–Ref) die Totalität aller Funktionen der Hierarchie $(\mathrm{F}_\gamma^{\mathcal{K}})_{\gamma<\Psi_\Omega^0(\varepsilon_{\mathcal{K}+1})}$ beweist.

Korollar 8.11 (Die beweisbar rek. Funktionen von KP+(Π_3–Ref))
Die rekursiven Funktionen, deren Totalität KP +(Π_3–Ref) *beweist, sind genau diejenigen Funktionen, die durch iterierte Anwendung von Substitution, primitiver Rekursion und* $(\mathrm{F}_\gamma^{\mathcal{K}})_{\gamma<\Psi_\Omega^0(\varepsilon_{\mathcal{K}+1})}$*–beschränktem* μ*–Operator auf die Funktionen* $(x \mapsto 0)$, $(x \mapsto x+1)$ *und* $(\vec{x} \mapsto x_i)$ *erzeugt werden.*

Kapitel 9

Epilog

In dieser Arbeit werden drei Techniken zur Bestimmung von Π^0_2–Skolem Funktionen entwickelt. Der Ansatz, der zur Untersuchung von KPM und KP+(Π_3–Ref) eingesetzt wurde, ist so universell, dass er sich auf viele Theorien anwenden lässt, für die man eine Ordinalzahlanalyse mit Operatortechnik machen kann. Letzteres wird für ein ganzes Bündel von KP–Theorien in [Pohlers 199?] durchgeführt. Für viele dieser Theorien lässt sich mit der hier vorgestellten Vorgehensweise ohne Probleme eine Klassifizierung der Π^0_2–Skolem Funktionen vornehmen. Die Schnitteliminationsverfahren können dazu aus dieser Arbeit übernommen werden. Die Analyse der Theorien in [Pohlers 199?] unterscheidet sich im Wesentlichen bei der Einbettung. Um dies zu illustrieren, folgt eine Skizze, wie man die Analyse von KPM für die Theorien KPl und KPi nutzen kann.

KPi entsteht aus KPM durch Ersetzung des Axioms (Mahlo) durch:
(Lim) $\forall x\, \exists y\, (\mathrm{Ad}(y) \,\wedge\, x \in y)$
Streicht man die (Δ_0–Koll) aus KPi, so erhält man **KPl**.

Um das (Lim)–Axiom in das infinitäre System RS(M) einbetten zu können, erweitern wir die Definition von $X^\star$ um die Komponente $\{\xi^+ :\ \xi \in X\}$ und sehen nur noch solche Operatoren als gut an, die abgeschlossen unter $(\xi \mapsto \xi^+)_{\xi<M}$

sind. Durch die Ausweitung der Sternoperation können wir

$$\mathrel{|\!\!\frac{\star}{\quad}} (\mathrm{Lim})^\lambda \quad \text{für jedes } \lambda \text{, das Limespunkt von } \mathrm{REG}^{\leq M} \text{ ist,}$$

zeigen: Sei $a \in \mathcal{T}_\lambda^M$ gegeben. Dank der neuen Sternoperation gilt $\kappa := |a|^+ \in \mathrm{stg}(\exists y{\in}\mathrm{L}_\lambda\,(\mathrm{Ad}(a) \wedge a \in y))^\star$. Die Voraussetzung, dass λ ein Limespunkt von REG ist, garantiert $\kappa < \lambda$. Mit Lemma 4.11 folgt $\mathrel{|\!\!\frac{\star}{\quad}} \mathrm{L}_\kappa \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_\lambda \wedge \mathrm{Ad}(\mathrm{L}_\kappa) \wedge a \in \mathrm{L}_\kappa$. Ein $(\bigvee)^\star$–Schluss ergibt $\mathrel{|\!\!\frac{\star}{\quad}} \exists y{\in}\mathrm{L}_\lambda\,(\mathrm{Ad}(y) \wedge a \in y)$ und daraus folgt die Behauptung.

i:$= \psi_M 0 = \min\{\beta \in \mathrm{REG} :\ \mathrm{C}(0,\beta) \cap M \subseteq \beta\}$ ist die kleinste unerreichbare Kardinalzahl[1]. l:$= \Omega_\omega$ ist der kleinste Limespunkt von REG. Unter Hinzunahme von Lemma 4.13 erhalten wir die folgende Einbettung der Theorie KPϑ für $\vartheta \in \{\mathrm{i}, \mathrm{l}\}$ analog zum KPM–Interpretationssatz 6.7.

Für jeden $\mathcal{L}_\in$–Satz ϕ gibt es ein $\eta \in \mathrm{T}(M) \cap \varepsilon_{\vartheta+1}$ und ein $n \in \omega$, so dass

$$\mathrm{KP}\vartheta \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^\eta \mathrel{|\!\!\frac{\omega^{\vartheta+\omega}+n}{\vartheta+n}} \phi^\vartheta$$

gilt.

Um die Π^0_2–Skolem Funktionen von KPϑ geeignet majorisieren zu können, muss man im Hauptsatz für KPM, Satz 8.7, überall M durch ϑ ersetzt. Zusatzlich muss man überprüfen, dass der Parameter η nach der Einbettung die nächste Epsilonzahl $\varepsilon_{\vartheta+1}$ durch die Schnittelimination nicht erreicht oder überschreitet. Dazu reicht ein kurzer Blick auf die verwendeten Sätze. Wir stehen also mit einem $\eta \in \mathrm{T}(M) \cap \varepsilon_{\vartheta+1}$ vor der finalen Anwendung der η–Kollabierung. Diese liefert uns die Aussage, dass die Skolem Funktion des Π^0_2–Satzes mit dem wir aus KPϑ gestartet sind, durch die Funktion $\mathrm{F}^M_{\psi_\Omega\hat{\eta}}$ majorisiert wird. $\psi_\Omega\hat{\eta}$ ist in Normalform (diese Information liefert der Beweis der η–Kollabierung) und $\hat{\eta}$ ist kleiner als $\varepsilon_{\vartheta+1}$. Es folgt $\psi_\Omega\hat{\eta} < \psi_\Omega\varepsilon_{\vartheta+1}$ nach Lemma 3.11 (iv). Damit erhalten wir die Charakterisierung[2] der beweisbar rekursiven Funktionen aus Abschnitt 1.2 auch für die Theorien KPl und KPi, und zwar mit den beweistheoretischen

[1] Üblicherweise wird diese mit I bezeichnet.

[2] Dazu muss $\mathrm{F}^T_\gamma := \mathrm{F}^{\mathrm{KPM}}_\gamma$ für $T =$ KPl und KPi gesetzt werden.

Ordinalzahlen:

- $||\,\mathrm{KPl}\,|| := \psi_\Omega \varepsilon_{\Omega_\omega+1}$
- $||\,\mathrm{KPi}\,|| := \psi_\Omega \varepsilon_{\psi_M 0+1}$

Anhang A

Analyse von KPω

Wir benutzen die Terminologie aus Kapitel 3. Zunächst wird das für die Analyse von KPω benutzte Ordinalzahlbezeichnungssystem eingeführt und die Funktionenhierarchie, die die KPω–beweisbar rekursiven Funktionen majorisiert.

Definition A.1 *Durch simultane Rekursion nach α definieren wir*

- $\vartheta\alpha := \min\{\beta : \mathrm{C}(\alpha,\beta) \cap \Omega \subseteq \beta \;\;\&\;\; \alpha \in \mathrm{C}(\alpha,\beta)\}$
- $\mathrm{C}(\alpha,\beta)$ *ist der Abschluß von* $\beta \cup \{0,\Omega\}$ *unter den Funktionen* $+, \varphi$ *und* $(\eta \mapsto \vartheta\eta)_{\eta<\alpha}$.

Zur Abkürzung sei

- $\bar{\theta}\alpha\beta := \vartheta(\omega^{\Omega\oplus\alpha} \oplus \beta)$ *für* $\beta < \Omega$.

Man kann $\bar{\theta}\alpha\beta$ natürlich auch für beliebige β definieren, aber um ein einfaches Größenvergleichskriterium zu haben, benutzen wir per Konvention $\bar{\theta}\alpha\beta$ nur für $\beta < \Omega$. $\mathrm{T}(\Omega)$ bestehe aus allen Ordinalzahlen, die aus 0 und Ω mit den Funktionen $+$, $(\xi \mapsto \omega^\xi)$, $(\rho\xi \mapsto \varphi\rho\xi)_{\rho,\xi<\Omega}$ und $(\eta \mapsto \vartheta\eta)$ gebildet werden können. Der Term $\vartheta\alpha$ ist für jedes α in Normalform. Für $\alpha \in \mathrm{T}(\Omega)$ sei $N_\Omega(\alpha)$, auch kurz $N\alpha$ geschrieben, die Anzahl der Zeichen Ω, φ, ϑ in der Termdarstellung der Normalform von α. (Wir sehen wieder ω^α nur als Abkürzung für $\varphi 0\alpha$ an.) Beispiel: $N\omega = N\varphi 0(\varphi 00) = 2$, $N\bar{\theta}\alpha\beta = N\vartheta(\omega^{\Omega\oplus\alpha} \oplus \beta) \leq 3 + N\alpha + N\beta$, wobei Gleichheit für $\alpha > 0$ gilt.

Des Weiteren setzen wir

- $\alpha^* := \max\,(\mathrm{SC}_\Omega\alpha \cup \{0\})$.

Satz A.2

(i) $\mathrm{T}(\Omega) \subseteq \mathrm{C}(\varepsilon_{\Omega+1}, 0) \cap \varepsilon_{\Omega+1}$

(ii) $\mathrm{T}(\Omega) \cap \Omega \subseteq \vartheta\varepsilon_{\Omega+1}$

Beweis. (i) Da die Kollabierungsfunktion nur Werte $\leq\ \Omega$ annimmt und die Funktion $(\rho\xi \mapsto \varphi\rho\xi)$ für $\rho > 0$ in $\mathrm{T}(M)$ nur auf abzählbare Werte angewendet werden darf, gilt $\mathrm{T}(\Omega) \subseteq \varepsilon_{\Omega+1}$. Daraus folgt durch einen Vergleich der Definition von $\mathrm{T}(\Omega)$ mit derjenigen der C–Menge $\mathrm{T}(\Omega) \subseteq \mathrm{C}(\varepsilon_{\Omega+1}, 0)$.

(ii) Mit (i) folgt $\mathrm{T}(\Omega) \cap \Omega \subseteq \mathrm{C}(\varepsilon_{\Omega+1}, 0) \cap \Omega \subseteq \mathrm{C}(\varepsilon_{\Omega+1}, \vartheta\varepsilon_{\Omega+1}) \cap \Omega \subseteq \vartheta\varepsilon_{\Omega+1}$.

Ab jetzt stehen kleine Griechen nur noch für Ordinalzahlen aus $\mathrm{T}(\Omega)$.

Lemma A.3

(i) $\beta < \Omega \quad \Rightarrow \quad \mathrm{card}\,\mathrm{C}(\alpha, \beta) < \Omega$

(ii) $\mathrm{C}(\alpha, \lambda) = \bigcup\{\mathrm{C}(\alpha, \beta) : \beta < \lambda\}$ *für* $\lambda \in \mathrm{LIM}$

(iii) $\eta \in \mathrm{C}(\alpha, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{SC}(\eta) \subseteq \mathrm{C}(\alpha, \beta)$

(iv) $\vartheta\alpha \in \mathrm{SC}$

(v) $\alpha^* < \vartheta\alpha < \Omega$

(vi) $\alpha \neq \vartheta\alpha$

Beweis. (i) bis (iv) folgen direkt aus der Definition.

(v) Wir zeigen zunächst $\vartheta\alpha < \Omega$. Dazu setzen wir $\beta_0 := \alpha^* + 1 < \Omega$ und $\beta_{n+1} := \min\{\xi : \mathrm{C}(\alpha, \beta_n) \cap \Omega \subseteq \xi\}$ und $\beta := \sup\{\beta_n : n \in \omega\}$. Wegen (i) gilt $\forall n{\in}\omega\ (\beta_n \leq \beta_{n+1} < \Omega)$ und aufgrund der Regularität von Ω ist $\beta < \Omega$. Mit (ii) ergibt sich

(1) $\quad \mathrm{C}(\alpha, \beta) \cap \Omega \ =\ \bigcup\{\mathrm{C}(\alpha, \beta_n) \cap \Omega :\ n{\in}\omega\} \ \subseteq\ \bigcup\{\beta_{n+1} :\ n{\in}\omega\} \ =\ \beta.$

Es folgt $\alpha \in \mathrm{C}(0, \alpha^* + 1)$ aus $\alpha^* \in \mathrm{C}(0, \alpha^* + 1)$ mit (iii). Damit erhalten wir

(2) $\quad \alpha \in \mathrm{C}(0, \beta_0) \subseteq \mathrm{C}(\alpha, \beta).$

Nach Definition von $\vartheta\alpha$ folgt aus (1) und (2) $\vartheta\alpha \leq \beta < \Omega$.
Es bleibt $\alpha^* < \vartheta\alpha$ zu zeigen. Aus $\alpha \in \mathrm{C}(\alpha, \vartheta\alpha)$ folgt $\alpha^* \in \mathrm{C}(\alpha, \vartheta\alpha) \cap \Omega = \vartheta\alpha$.

(vi) folgt für $\alpha \geq \Omega$ aus (v) und für $\alpha < \Omega$, wenn man die Definition von $\vartheta\alpha$ betrachtet. Für $\alpha < \Omega$ gilt nämlich $\alpha \in \mathrm{C}(\alpha, \vartheta\alpha) \cap \Omega = \vartheta\alpha$, also $\alpha < \vartheta\alpha$.

Lemma A.4

(i) $\alpha^* < \vartheta\beta \;\;\&\;\; \alpha < \Omega \quad \Rightarrow \quad \alpha < \vartheta\beta$

(ii) $\alpha < \beta \;\;\&\;\; \alpha^* < \vartheta\beta \quad \Rightarrow \quad \vartheta\alpha < \vartheta\beta$

(iii) $\alpha_0 < \alpha_1 \;\;\&\;\; \mathrm{SC}_\Omega\{\alpha_0, \xi_0\} < \bar{\theta}\alpha_1\xi_1 \quad \Rightarrow \quad \bar{\theta}\alpha_0\xi_0 < \bar{\theta}\alpha_1\xi_1$

Beweis. (i) Aus $\alpha^* < \vartheta\beta$ folgt $\mathrm{SC}_\Omega\alpha \subseteq \mathrm{C}(\beta, \vartheta\beta) \cap \Omega$. Mit der Voraussetzung $\alpha < \Omega$ erhalten wir $\alpha \in \mathrm{C}(\beta, \vartheta\beta) \cap \Omega = \vartheta\beta$.

(ii) Aus $\alpha^* < \vartheta\beta$ folgt $\alpha^* \in \mathrm{C}(\beta, \vartheta\beta)$ und mit $\alpha < \beta$ und $\vartheta\alpha < \Omega$ (Lemma A.3 (v)) können wir auf $\vartheta\alpha \in \mathrm{C}(\beta, \vartheta\beta) \cap \Omega = \vartheta\beta$ schließen und haben damit die Behauptung bestätigt.

(iii) folgt aus (ii), wenn die Konvention $\xi_0, \xi_1 < \Omega$ beachtet wird.

Definition A.5 *Für die allgemeine Definition von $\lhd_x^{N,1}$ siehe 3.26.*

- $\mathrm{F}_\eta^\Omega(x) := \max\ \big(\{\Phi(x)\} \cup \{\mathrm{F}_\alpha \circ \mathrm{F}_\alpha(x)\ :\ \alpha \lhd_x^{N_\Omega,1} \eta\}\big)$
- $\mathrm{F}\eta := \mathrm{F}_\eta^\Omega(0)$

Im Folgenden schreiben wir $N\alpha$ anstelle von $N_\Omega(\alpha)$, und lassen den oberen Index N_Ω bzw. Ω bei den Funktionen F_η und den Relationen $\lhd$ meistens weg.

Lemma A.6

(i) $x < \Phi(x) \leq \mathrm{F}_\eta(x) < \mathrm{F}_{\eta+1}(x)$

(ii) $\mathrm{F}_\eta(x) < \mathrm{F}_\eta \circ \mathrm{F}_\eta \leq \mathrm{F}_{\eta+1}(x)$, *insbesondere gilt $n < \mathrm{F}_n(x)$*

(iii) $\alpha \lhd_x^1 \eta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}_\alpha(x) < \mathrm{F}_\eta(x)$

(iv) $\alpha < \eta \;\;\&\;\; N\alpha \leq \Phi(N\eta + \mathrm{F}_\eta(x)) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}_\alpha(x) < \mathrm{F}_{\eta+1}(x)$

(v) $\mathrm{F}(\bar{\theta}\eta\xi + 1) < \mathrm{F}\bar{\theta}(\eta + 1)\xi$

Beweis. (i)–(iii) werden wie in Lemma A.6 bewiesen und (v) folgt aus (iii).
(iv) Mit (i) dann (iii) dann (ii) folgt

$$\mathrm{F}_\alpha(x) < \mathrm{F}_\alpha(\mathrm{F}_\eta(x)) < \mathrm{F}_\eta(\mathrm{F}_\eta(x)) \leq \mathrm{F}_{\eta+1}(x).$$

Setzen wir $\mathcal{L}^\Omega_{\mathrm{Ad}} := \mathcal{L}_\in$, so erhalten wir die Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\Omega)}$ und den Kalkül $\mathrm{RS}(\Omega)^\star$ aus den allgemeinen Definitionen der Kapitel 4.1 und 4.3. Viele der im Weiteren benötigten Definitionen und Sätze lassen sich wörtlich oder mit kleinen Änderungen aus der Analyse von KPM übertragen. Bei wichtigen Änderungen, die sich aus der andersartigen Gestalt der Operatoren ergeben, werden die Beweise ausgeführt.

Lemma A.7
(i) $\overset{\star}{\models}$ $(\mathit{Ext})^\Omega \wedge (\mathit{Paar})^\Omega \wedge (\mathit{Verein})^\Omega \wedge (\Delta_0\text{–}\mathit{Sep})^\Omega \wedge (\mathit{Fund})^\Omega$

Die Definition der Operatoren, die wir für die Analyse von KPω einsetzen werden, geht auf einen Vorschlag von Andreas Weiermann zurück. Da wir bei der partiellen Schnittelimination in RS(Ω) im Gegensatz zu RS(M) und RS($\mathcal{K}$) nur eine einzige Kollabierungsfunktion einsetzen müssen, können wir die Norm der Ordinalzahlen im Operator direkt durch diejenige Hierarchie majorisieren, die die beweisbar rekursiven Funktionen einhüllt. Dies geschieht analog zum Vorgehen bei PA. Allerdings erfüllt der Operator in der Analyse von KPω noch eine weitere Funktion. Er gewährleistet, dass die Kollabierungsfunktion auf den in einer $\mathcal{H}$–kontrollierten Herleitung vorkommenden Ordinalzahlen (unter zusätzlichen Voraussetzungen) streng monoton ist (siehe Eigenschaft (c) in Satz A.21).

Definition A.8 ($\boldsymbol{\mathcal{H}_\eta}$–Operatoren) *Der Begriff Operator wird aus Kapitel 5 übernommen. Für $X = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ sei $\check{X} := \xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_n$.*

- $\mathcal{H}_\eta \colon X \mapsto \{\alpha \in \mathrm{T}(\Omega) : \mathrm{SC}_\Omega\alpha < \bar{\theta}\eta\check{X} \;\;\&\;\; N\alpha < \mathrm{F}\bar{\theta}\eta\check{X}\}$

Sei Θ *eine endliche Menge von* RS(Ω)*–Sätzen und Elementen von* $\mathcal{T}^\Omega \cup \{0,1\}$*. Wir setzten* $\check{\Theta}{:=}\ (\mathrm{stg}(\Theta))\check{}$ *und definieren wie bisher*

- $\mathcal{H}[\Theta] \colon X \mapsto \mathcal{H}(\mathrm{stg}(\Theta) \cup X)$.

Lemma A.9

(i) $\mathcal{H}_\eta[\Theta]$ *ist ein Operator.*

(ii) $\eta \in \mathcal{H}_\eta[\Theta]$

(iii) $\{\bar{\theta}\eta 0, \mathrm{F}\bar{\theta}\eta\check{\Theta}\} \subseteq \mathcal{H}_{\eta+1}[\Theta]$

(iv) $\alpha < \eta \ \& \ \alpha^* < \bar{\theta}\eta\check{\Theta} \ \& \ N\alpha \leq \Phi(N\eta + \mathrm{F}\bar{\theta}\eta\check{\Theta})$
$\quad\Rightarrow \quad \mathcal{H}_\alpha[\Theta] \subseteq \mathcal{H}_{\eta+1}[\Theta]$

Beweis. (i)–(iii) sind klar.

(iv) Aus der Voraussetzung folgt $\bar{\theta}\alpha\check{\Theta} < \bar{\theta}\eta\check{\Theta}$ nach Lemma A.4 (iii) und $N\bar{\theta}\alpha\check{\Theta} \leq \Phi(N\bar{\theta}\eta\check{\Theta} + \mathrm{F}\bar{\theta}\eta\check{\Theta})$, also impliziert Lemma A.6 (iv) und (v) $\mathrm{F}\bar{\theta}\alpha\check{\Theta} < \mathrm{F}\bar{\theta}(\eta+1)\check{\Theta}$ und im Verein mit $\bar{\theta}\alpha\check{\Theta} < \bar{\theta}(\eta+1)\check{\Theta}$ folgt die Behauptung.

Lemma A.10

(i) $\mathcal{H}[\iota][\iota] = \mathcal{H}[\iota]$

(ii) $|\iota| \in \mathcal{H}_\eta[\Theta] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_\eta[\Theta, \iota] \subseteq \mathcal{H}_{\eta+2}[\Theta]$

(iii) $\mathrm{stglh}(A) \subseteq \mathcal{H}_\eta[\Theta] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rk}(A) \in \mathcal{H}_{\eta+2}[\Theta]$

(iv) $\mathrm{stg}(A) \subseteq \mathcal{H}_\eta[\Theta] \ \& \ A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}} \ \& \ \iota \in \mathrm{J}$
$\quad\Rightarrow \quad \mathrm{stg}(A_\iota) \subseteq \mathcal{H}_\eta[\Theta, \iota]$

(v) $\mathrm{stglh}(A) \subseteq \mathcal{H}_\eta[\Theta] \ \& \ A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}} \ \& \ \iota \in \mathrm{J}$
$\quad\Rightarrow \quad \mathrm{lh}(A_\iota) \in \mathcal{H}_{\eta+1}[\Theta]$

Beweis. (i) folgt aus $\mathrm{stg}(\iota) \cup \mathrm{stg}(\iota) = \mathrm{stg}(\iota)$.

(ii) Gegeben ist $|\iota| \in \mathcal{H}_\eta[\Theta]$, also $\mathrm{SC}_\Omega|\iota| < \bar{\theta}\eta\check{\Theta}$ und $N|\iota| < \mathrm{F}\bar{\theta}\eta\check{\Theta}$.

- $\bar{\theta}\eta(\Theta,\iota)\check{} \leq \bar{\theta}\eta(\check{\Theta} \oplus |\iota|) < \bar{\theta}(\eta+1)\check{\Theta}$
- $N\bar{\theta}\eta(\Theta,\iota)\check{} \leq N\bar{\theta}\eta\check{\Theta} + N|\iota| < \Phi(N\bar{\theta}(\eta+1)\check{\Theta} + \mathrm{F}\bar{\theta}(\eta+1)\check{\Theta})$

Mit Hilfe von Lemma A.6 (iv) und (v) folgt die Behauptung.

(iii) Es ist $\mathrm{SC}_\Omega\mathrm{rk}(A) = \mathrm{SC}_\Omega\mathrm{stg}(A) \subseteq \mathcal{H}_\eta[\Theta]$, also $\mathrm{SC}_\Omega\mathrm{rk}(A) < \bar{\theta}(\eta+2)\check{\Theta}$. Durch Induktion nach A wird nun unter Verwendung von $\mathrm{stg}(A) \subseteq \mathcal{H}_\eta[\Theta]$

$$(*) \quad N\mathrm{rk}(A) < \mathrm{F}\bar{\theta}(\eta+1)\check{\Theta} \cdot \mathrm{lh}(A)$$

gezeigt. Wegen $\mathrm{lh}(A) \in \mathcal{H}_\eta[\Theta]$ ist die rechte Seite von $(*)$ $< (\mathrm{F}\bar{\theta}(\eta+1)\check{\Theta})^2 <$

$\mathrm{F}(\bar\theta(\eta+1)\check\Theta+1) < \mathrm{F}\bar\theta(\eta+2)\check\Theta$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Nun zu $(*)$:

- $N\mathrm{rk}(a \in b) \le 6N|a| + 6N|b| + 4 \le 12\mathrm{F}\bar\theta\eta\check\Theta < \mathrm{F}\bar\theta(\eta+1)\check\Theta$
- $N\mathrm{rk}(A \wedge B) <^{Iv} \mathrm{F}\bar\theta(\eta+1)\check\Theta \cdot \max\{\mathrm{lh}(A), \mathrm{lh}(B)\} + 1$
  $\le \mathrm{F}\bar\theta(\eta+1)\check\Theta \cdot \mathrm{lh}(A \wedge B)$
- $N\mathrm{rk}(\exists x{\in}a\, B(x)) <^{Iv} 6N|a| + 2 + \mathrm{F}\bar\theta(\eta+1)\check\Theta \cdot \mathrm{lh}(B)$
  $\le \mathrm{F}\bar\theta(\eta+1)\check\Theta \cdot (\mathrm{lh}(B)+1)$

(iv) Dank der restriktiven Termdefinition gilt $\mathrm{SC}_\Omega\mathrm{stg}(A_\iota) \subseteq \mathrm{SC}_\Omega(\{|\iota|\} \cup \mathrm{stg}(A))$. Damit folgt $\mathrm{SC}_\Omega\mathrm{stg}(A_\iota) < \bar\theta\eta(\Theta,\iota)\check{}$. Ist ι ein Seperationsterm $[x{\in}\mathrm{L}_{|\iota|} : A(x)]$, so gilt für jeden Term t aus der definierenden Formel A: $N|t| < \Phi(N|\iota|)$, woraus sich $N\mathrm{stg}(A_\iota) < \mathrm{F}\bar\theta\eta(\Theta,\iota)\check{}$ ergibt.

(v) Es ist $\mathrm{lh}(A_\iota) < \mathrm{F}\bar\theta(\eta+1)\check\Theta$ zu prüfen. Dazu sei an die Bedingung $\mathrm{lh}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}) \le \Phi(N\alpha)$ bei der Definition eines Terms $[x{\in}\mathrm{L}_\alpha : \phi^{\mathrm{L}_\alpha}(x,\vec a)]$ erinnert. Im folgenden ist $\beta \in \mathrm{stg}(A)$, also $N\beta < \mathrm{F}\bar\theta\eta\check\Theta$.

- $A \equiv a \notin \mathrm{L}_\beta :\ \mathrm{lh}(\iota \notin \varnothing \to \iota \ne \mathrm{L}_\beta) = 7 < \mathrm{F}\bar\theta(\eta+1)\check\Theta$
- $A \equiv a \notin [x{\in}\mathrm{L}_\beta : F(x)] :\ \mathrm{lh}(F(\iota) \to \iota \ne a) \le \Phi(N\beta) + 6 \le \Phi(\mathrm{F}\bar\theta\eta\check\Theta)$
  $< \mathrm{F}\bar\theta(\eta+1)\check\Theta$
- $A \equiv A_0 \wedge A_1 :\ \mathrm{lh}(A_\iota) < \mathrm{lh}(A) < \mathrm{F}\bar\theta\eta\check\Theta < \mathrm{F}\bar\theta(\eta+1)\check\Theta$
- $A \equiv \forall y{\in}\mathrm{L}_\beta\, B(y) :\ \mathrm{lh}(\iota \notin \varnothing \to B(\iota)) = 2 + \mathrm{lh}(B) = 1 + \mathrm{lh}(A)$
  $\le \mathrm{F}\bar\theta\eta\check\Theta < \mathrm{F}\bar\theta(\eta+1)\check\Theta$
- $A \equiv \forall y{\in}[x{\in}\mathrm{L}_\beta : F(x)]\, B(x) :\ \mathrm{lh}(F(\iota) \to B(\iota)) \le \Phi(N\beta) + \mathrm{lh}(B) + 1$
  $< \Phi(\mathrm{F}\bar\theta\eta\check\Theta) + \mathrm{F}\bar\theta\eta\check\Theta < \mathrm{F}\bar\theta(\eta+1)\check\Theta$

Definition A.11 *Durch transfinite Rekursion nach α werden die Operator kontrollierten Herleitungen von* $\mathrm{RS}(\Omega)$ *definiert. Sei* $\mathrm{J}{\restriction}\alpha := \{\iota \in \mathrm{J} : |\iota| < \alpha\}$.

$$\mathcal{H}\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Gamma \quad \textit{gilt, falls} \quad \{\alpha\} \cup \mathrm{stg}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}$$

und einer der folgenden Fälle vorliegt:

$(\bigwedge)$ $\quad \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}} \in \Gamma \ \ \& \ \ \mathcal{H}[\iota]\overset{\alpha_\iota}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Gamma, A_\iota \quad \textit{mit} \quad \alpha_\iota < \alpha \quad \textit{für alle } \iota \in \mathrm{J}$

$(\bigvee)$ $\quad \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}} \in \Gamma \ \ \& \ \ \mathcal{H}\overset{\alpha_0}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Gamma, A_{\iota_0} \quad \textit{mit} \quad \alpha_0 < \alpha \quad \textit{für ein } \iota_0 \in \mathrm{J}{\restriction}\alpha$

(cut) $\quad \mathrm{rk}(C) < \rho \ \ \& \ \ \mathcal{H}\overset{\alpha_0}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Gamma, (\neg)C \quad \textit{mit} \quad \begin{array}{l}\alpha_0 < \alpha \\ \mathrm{lh}(C) \in \mathcal{H}\end{array}$

(ref_Ω) $\quad \exists z{\in}\mathrm{L}_\Omega\, A^{(z,\Omega)} \in \Gamma \ \ \& \ \ \mathcal{H}\overset{\alpha_0}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Gamma, A \quad \textit{mit} \quad \begin{array}{l}\Omega, \alpha_0 < \alpha \\ A \in \Sigma_{\le 1}(\Omega)\end{array}$

Lemma A.12 (Inversion)

(i) $\mathcal{H}_\eta[\Theta]\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Gamma, \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}} \ \ \& \ \ \iota_0 \in J \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_\eta[\Theta, \iota_0]\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Gamma, A_{\iota_0}$

(ii) $\mathcal{H}\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Gamma, A_0 \wedge A_1 \quad \Rightarrow \quad \forall i < 2 \ \ \mathcal{H}\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Gamma, A_i$

Beweis. Beim Beweis von (i) verwendet man Lemma A.10 (i) und (iv).

Lemma A.13 (Reduktion)
Für $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ *mit* $\mathrm{rk}(A) = \rho \neq \Omega$ *und* $\mathrm{lh}(A) \in \mathcal{H}_\eta[\Theta]$ *gilt*

$$\mathcal{H}_\eta[\Theta]\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Gamma, \neg A \ \ \& \ \ \mathcal{H}_\eta[\Theta]\overset{\beta}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Delta, A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_{\eta+2}[\Theta]\overset{\alpha+\beta}{\underset{\rho}{\mid}}\ \Gamma, \Delta.$$

Beweis analog zu 5.7, aber unter Verwendung von A.10 (ii) und (v).

Satz A.14 (Prädikative Schnittelimination)
Sei $\alpha \in \mathcal{H}_\eta[\Theta]$ *und* $\Omega \notin [\rho, \rho + \omega^\alpha[$.

$$\mathcal{H}_\eta[\Theta]\Big|\frac{\beta}{\rho + \omega^\alpha}\ \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_{\eta \oplus \varphi\alpha\beta+1}[\Theta]\Big|\frac{\varphi\alpha\beta}{\rho}\ \Gamma$$

Beweis durch Hauptinduktion nach α und Nebeninduktion nach β. Im kritischen Fall haben wir für eine Schnittformel C mit $\mathrm{rk}(C) < \rho + \omega^\alpha$

$$\mathcal{H}_\eta[\Theta]\Big|\frac{\beta_0}{\rho + \omega^\alpha}\ \Gamma, (\neg)C \quad \text{mit } \beta_0 < \beta \text{ und } \mathrm{lh}(C) \in \mathcal{H}_\eta[\Theta].$$

Aus der Nebeninduktionsvoraussetzung folgt

$$(1) \quad \mathcal{H}_{\eta \oplus \varphi\alpha\beta_0+1}[\Theta]\Big|\frac{\varphi\alpha\beta_0}{\rho}\ \Gamma, (\neg)C.$$

Wegen $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_\eta[\Theta]$ ist $\varphi\alpha\beta \in \mathcal{H}_{\eta\oplus\varphi\alpha\beta+1}[\Theta]$. Ist $\mathrm{rk}(C) < \rho$, so folgt die Behauptung mit (cut). Sei also $\mathrm{rk}(C) = \rho + \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_n}$ mit $\alpha_n \le \cdots \le \alpha_1 < \alpha$. Im Fall $n = 0$ setzen wir $\alpha_1 := 0$. Durch Reduktion 5.7 von (1) erhalten wir

$$\mathcal{H}_{\eta_0}[\Theta]\Big|\frac{\xi_0}{\rho + \omega^{\alpha_1} \cdot n}\ \Gamma \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \xi_0 := \varphi\alpha\beta_0 \cdot 2 \quad \text{und} \\ \eta_0 := \eta \oplus \varphi\alpha\beta_0 + 3. \end{array}$$

Wir wenden n–mal die Hauptinduktionvoraussetzung und bekommen

$$\mathcal{H}_{\eta_n}[\Theta]\Big|\frac{\xi_n}{\rho}\ \Gamma \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \xi_{i+1} := \varphi\alpha_1\xi_i \quad \text{und} \\ \eta_{i+1} := \eta_i \oplus \xi_{i+1} + 1. \end{array}$$

Aus $\mathrm{stglh}(C) \subseteq \mathcal{H}_\eta[\Theta]$ folgt nach Lemma A.10 (iii) $\mathrm{rk}(C) \in \mathcal{H}_{\eta+2}[\Theta]$, also insbesondere $n, N\alpha_1 < \mathrm{F}\bar{\theta}(\eta + 2)\check{\Theta}$ und $\alpha_1^* < \bar{\theta}(\eta{+}2)\check{\Theta}$. Wir erhalten $\xi_n < \varphi\alpha\beta$ durch die Wachstumseigenschaft der φ–Funktion (siehe Lemma 3.1). Nun muss noch $\mathcal{H}_{\eta_n}[\Theta] \subseteq \mathcal{H}_{\eta\oplus\varphi\alpha\beta+1}[\Theta]$ gezeigt werden, damit die Behauptung durch Monotonie erreicht werden kann. Dies geschieht mit Lemma A.9 (iv) durch die folgenden Rechnungen.

- $\eta_n < \eta \oplus \varphi\alpha\beta$
- $\mathrm{SC}_\Omega\eta_n = \mathrm{SC}_\Omega\{\eta, \alpha, \beta_0, \alpha_1\} < \bar{\theta}(\eta + 2)\check{\Theta} < \bar{\theta}(\eta \oplus \varphi\alpha\beta + 1)\check{\Theta}$

- $N\eta_n \leq N\eta + N\varphi\alpha\beta_0 + 3 + \sum_{i=1}^{n}(N\xi_i + 1)$
$$\begin{aligned}&\leq N\eta + N\alpha + N\beta_0 + 4 + n(n + nN\alpha_1 + N\xi_0)\\ &\leq N\eta + (2n+1)N\alpha + (2n+1)N\beta_0 + n^2 N\alpha_1 + n(n+2) + 4\\ &\leq N\eta + 5[\mathrm{F}\bar{\theta}(\eta \oplus \varphi\alpha\beta)\check{\Theta}]^3\\ &< \Phi(N\eta + \mathrm{F}\bar{\theta}(\eta \oplus \varphi\alpha\beta)\check{\Theta}) \quad \text{mit } (\Phi.2)\end{aligned}$$

Lemma A.15 (Persistenz)

$$\mathcal{H}\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vert}}\, \Gamma, \forall x{\in}\mathrm{L}_\eta\, A(x) \;\;\&\;\; \beta \in \mathcal{H} \cap \eta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}\overset{\alpha}{\underset{\rho}{\vert}}\, \Gamma, \forall x{\in}\mathrm{L}_\beta\, A(x)$$

Lemma A.16 *Sei* $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ *oder* $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ *und* $\iota, \iota_1, \cdots, \iota_n \in \mathrm{J}$.

(i) $\mathcal{H}_{\mathrm{No}(\Lambda, A_\iota)+1}[\Lambda, A_\iota] \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{No}(\Lambda,A)+1}[\Lambda, A]$

(ii) $\mathrm{stg}(\iota_1, \cdots, \iota_n) \subseteq \mathrm{stg}(\Lambda, A)^\star \;\;\&\;\; 1 \leq n \leq 2 \cdot \max\{\mathrm{nt}(B) : B \in \Lambda\}$
$\quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}_{\mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n})+1}[\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}] \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{No}(\Lambda,A)+1}[\Lambda, A]$

Beweis siehe Anhang, Lemma B.6.

Mit diesem Hilfslemma erhalten wir durch eine Beweisführung wie in Lemma 6.2:

Lemma A.17

$$\mathrm{RS}(\Omega)\overset{\star}{\underset{0}{\vert}}\, \Lambda \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_{\mathrm{No}(\Lambda)+1}[\Lambda]\overset{\|\Lambda\|}{\underset{0}{\vert}}\, \Lambda$$

Um die Δ_0–Kollektion einbetten zu können, haben wir die Regel (ref_Ω) in unser halbformales System RS(Ω) aufgenommen.

Lemma A.18 (Einbettung von ($\boldsymbol{\Delta_0}$–Koll)) *Es sei* $\Omega \in \mathcal{H}$ *und* F *eine* RS(Ω)*–Formel mit* $\mathrm{stg}(F) \subseteq \Omega$ *und* $FV(F) \subseteq \{x, y\}$*.* t *sei ein* RS(Ω)*–Term. Für* $B(z) :\equiv \forall x{\in}t\, \exists y{\in}z\, F(x, y)$ *gilt*

$$\mathcal{H}^{\mathrm{No}(Koll)}\overset{\|Koll\|}{\underset{0}{\vert}}\, Koll \quad \textit{wobei } Koll :\equiv B(\mathrm{L}_\Omega) \to \exists z{\in}\mathrm{L}_\Omega\, B(z).$$

Beweis. Der Beweis verläuft genau wie derjenige von Lemma 6.6, wobei hier der Schluss (ref$_\Omega$) die Rolle von (mah) übernimmt.

Die Aussagenlogik lässt sich wörtlich wie bei der KPM–Analyse behandeln. Somit erhalten wir:

Satz A.19 (KPω–Interpretationssatz)
Zu $\phi \in \mathcal{L}_\in$ gibt es ein $\eta \in \mathrm{T}(\Omega)$ und ein $n < \omega$, so dass

$$\mathrm{KP}\omega \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_\eta \overset{\omega^{\Omega+\omega}+n}{\underset{\Omega+n}{\mid\!\!-\!\!-}} \phi^\Omega$$

gilt.

Aufgrund der einfacheren Gestalt der verfeinerten Operatoren, können wir die Kontrolleigenschaft der Operatoren in diesem Kalkül direkter ausnutzen. Die Rolle, die die η–Kollabierung für die $\mathcal{H}^\eta$–Operatoren spielt, kann hier von einer einfachen Art der Beschränkung (Teil (ii) im folgenden Lemma) übernommen werden.

Satz A.20 (Beschränkung)

(i) $\mathcal{H} \overset{\alpha}{\underset{\rho}{\mid\!\!-}} \Gamma, C \;\;\&\;\; \alpha \leq \beta \in \mathcal{H} \cap \gamma \;\;\&\;\; C \in \Sigma_{\leq 1}(\gamma) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \overset{\alpha}{\underset{\rho}{\mid\!\!-}} \Gamma, C^{(\beta,\gamma)}$

(ii) $\mathcal{H}_\eta[\Theta] \overset{\alpha}{\underset{0}{\mid\!\!-}} \Gamma, \exists x{\in}\mathrm{L}_\omega\, A(x) \;\;\&\;\; \Gamma \subseteq \Delta_0(\omega)$

$\quad\Rightarrow \quad \mathcal{H}_{\eta+1}[\Theta] \overset{\alpha}{\underset{0}{\mid\!\!-}} \Gamma, \exists x{\in}\mathrm{L}_{\mathrm{F}\bar{\theta}\eta\check{\Theta}}\, A(x)$

Beweis. (i) Der Beweis aus [Rathjen 1994b], Lemma 7.6, greift auch für diesen Kalkül.

(ii) durch Induktion nach α. Im interessanten Fall ist $\exists x{\in}\mathrm{L}_\omega\, A(x)$ die Hauptformel des letzten Schlusses. Aufgrund der Schnittfreiheit und wegen $\Gamma \subseteq \Delta_0(\omega)$ kommt als Schluss nur ($\bigvee$) in Frage. Also haben wir

$$\mathcal{H}_\eta[\Theta] \overset{\alpha_0}{\underset{0}{\mid\!\!-}} \Gamma, \exists x{\in}\mathrm{L}_\omega\, A(x), \iota \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_\omega \wedge A(\iota) \quad \text{für ein } \iota \in \mathcal{T}_\omega.$$

Es ist o.E. $|\iota| \in \mathrm{stg}(A(\iota)) \subseteq \mathcal{H}_\eta[\Theta]$, daher gilt $|\iota| = N|\iota| < \mathrm{F}\bar{\theta}\eta\check{\Theta}$. Wegen $\iota \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_\omega \equiv \iota \mathrel{\mathring{\in}} \mathrm{L}_{\mathrm{F}\bar{\theta}\eta\check{\Theta}}$ und $\mathrm{stg}(\exists x{\in}\mathrm{L}_{\mathrm{F}\bar{\theta}\eta\check{\Theta}}\, A(x)) = \mathrm{stg}(\exists x{\in}\mathrm{L}_\omega\, A(x)) \cup \{\mathrm{F}\bar{\theta}\eta\check{\Theta}\} \subseteq \mathcal{H}_{\eta+1}[\Theta]$ (mit Hilfe von Lemma A.9 (iii)) folgt die Behauptung mit ($\bigvee$) aus der Induktionsvoraussetzung.

Satz A.21 (Imprädikative Schnittelimination)
Sei $\Gamma \subseteq \Sigma_{\leq 1}(\Omega)$ *und* $\Theta < \bar{\theta}(\eta+1)0$.

$$\mathcal{H}_\eta[\Theta] \vdash^{\alpha}_{\Omega+1} \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_{\hat{\alpha}+1}[\Theta] \vdash^{\bar{\theta}\hat{\alpha}0}_{.} \Gamma \quad \textit{mit } \hat{\alpha} := \eta \oplus \omega^{\Omega \oplus \alpha}$$

Beweis durch Induktion nach α. Die Schlüsse $(\bigwedge)$, $(\bigvee)$ und (ref_Ω) können wie in 7.6 behandelt werden, wobei man untenstehende Eigenschaften nutzt.

(a) $\quad \bar{\theta}\eta\check{\Theta} < \bar{\theta}(\eta+1)0 < \bar{\theta}\hat{\alpha}0$

(b) $\quad \bar{\theta}\hat{\alpha}0 \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha}+1}[\Theta]$

(c) $\quad \alpha_0 \in \mathcal{H}_\eta[\Theta_0] \cap \alpha \;\;\&\;\; \Theta_0 < \bar{\theta}(\eta+1)0$
$\quad\quad \Rightarrow \quad \bar{\theta}\hat{\alpha_0}0 < \bar{\theta}\hat{\alpha}0 \;\;\&\;\; \mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta_0] \subseteq \mathcal{H}_{\hat{\alpha}+1}[\Theta_0]$

(a) und (b) folgen aus Lemma A.4 (iii) bzw. A.9 (iii).

(c) Es ist $\hat{\alpha_0} < \hat{\alpha}$ und aus $\alpha_0 \in \mathcal{H}_\eta[\Theta_0]$ folgt mit (a) $\mathrm{SC}_\Omega\hat{\alpha_0} < \bar{\theta}\hat{\alpha}0$, wodurch sich $\bar{\theta}\hat{\alpha_0}0 < \bar{\theta}\hat{\alpha}0$ mittels Lemma A.4 (iii) offenbart. Die Inklusion der Operatoren folgt mit Lemma A.9 (iv) aus $N(\hat{\alpha_0}+1) \leq N\hat{\alpha} + N\alpha_0 < N\hat{\alpha} + \mathrm{F}\bar{\theta}\eta(\Theta_0)\check{\ } < \Phi(N\hat{\alpha} + \mathrm{F}\bar{\theta}\hat{\alpha}(\Theta_0)\check{\ })$.

4. C ist ein $\mathrm{RS}(\Omega)$–Satz mit $\mathrm{rk}(C) \leq \Omega$ und es gilt

$$(1) \quad \mathcal{H}_\eta[\Theta] \vdash^{\alpha_0}_{\Omega+1} \Gamma, (\neg)C \qquad \text{mit } \alpha_0 < \alpha \quad \text{und } \mathrm{lh}(C) \in \mathcal{H}_\eta[\Theta].$$

4.1. $\mathrm{rk}(C) < \Omega$. Aus $\mathrm{stg}(C) \subseteq \mathcal{H}_\eta[\Theta]$ folgt mit (a) $\mathrm{SC}_\Omega\mathrm{rk}(C) = \mathrm{SC}_\Omega\mathrm{stg}(C) < \bar{\theta}\hat{\alpha}0$, also wegen $\mathrm{rk}(C) < \Omega$ auch $\mathrm{rk}(C) < \bar{\theta}\hat{\alpha}0$. Die Behauptung kann somit aus der Induktionsvoraussetzung mit (cut) erschlossen werden.

4.2. $\mathrm{rk}(C) = \Omega$, also o.E. $C \equiv \exists x{\in}\mathrm{L}_\Omega\, A(x)$. Es ist $\Gamma, C \subseteq \Sigma_{\leq 1}(\Omega)$, daher können wir die Induktionsvoraussetzung auf die Herleitung von Γ, C aus (1) anwenden.

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta] \vdash^{\bar{\theta}\hat{\alpha_0}0}_{.} \Gamma, \exists x{\in}\mathrm{L}_\Omega\, A(x)$$

Durch Beschränkung A.20 (i) erhalten wir wegen $\bar{\theta}\hat{\alpha_0}0 \in \mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta]$

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta] \vdash^{\bar{\theta}\hat{\alpha_0}0}_{.} \Gamma, \exists x{\in}\mathrm{L}_{\bar{\theta}\hat{\alpha_0}0}\, A(x).$$

Um später einen Schnitt durchführen zu können, setzen wir Monotonie ein.

$$(2) \quad \mathcal{H}_{\eta'+1}[\Theta] \overset{\bar{\theta}\eta' 0}{\underset{\cdot}{\vdash}} \Gamma, \exists x{\in}\mathrm{L}_{\bar{\theta}\hat{\alpha_0}0}\, A(x) \quad \text{mit } \eta' := \hat{\alpha_0} \oplus \omega^{\Omega \oplus \alpha_0} + 1$$

Die Herleitung von $\Gamma, \neg C$ in (1) wird mit Persistenz A.15 bearbeitet:

$$\mathcal{H}_{\hat{\alpha_0}+1}[\Theta] \overset{\alpha_0}{\underset{\Omega+1}{\vdash}} \Gamma, \forall x{\in}\mathrm{L}_{\bar{\theta}\hat{\alpha_0}0}\, \neg A(x)$$

Wegen $\Gamma, \forall x{\in}\mathrm{L}_{\bar{\theta}\hat{\alpha_0}0}\, \neg A(x) \subseteq \Sigma_{\leq 1}(\Omega)$ kann nun die Induktionsvoraussetzung zum Einsatz kommen.

$$(3) \quad \mathcal{H}_{\eta'+1}[\Theta] \overset{\bar{\theta}\eta' 0}{\underset{\cdot}{\vdash}} \Gamma, \forall x{\in}\mathrm{L}_{\bar{\theta}\hat{\alpha_0}0}\, \neg A(x)$$

Bevor der Schnitt durchgeführt wird, soll der Operator in (2) und (3) auf $\mathcal{H}_{\hat{\alpha}+1}[\Theta]$ erhöht werden. Dies ist nach Lemma A.9 (iv) möglich, denn es gilt:

- $\eta' + 1 < \hat{\alpha}$
- $(\eta' + 1)^* < \bar{\theta}\hat{\alpha}0 \quad$ wegen $\eta^* < \bar{\theta}\eta 0 < \bar{\theta}\hat{\alpha}0$ und $\alpha_0^* < \bar{\theta}\eta\check{\Theta} < \bar{\theta}\hat{\alpha}0$
- $N(\eta' + 1) \leq 4 + N\alpha_0 + N\hat{\alpha_0} \leq 4 + 2N\alpha_0 + N\hat{\alpha} \leq 4 + N\hat{\alpha} + 2\mathrm{F}\bar{\theta}\eta\check{\Theta}$
  $\leq \Phi(N\hat{\alpha} + \mathrm{F}\bar{\theta}\hat{\alpha}0)$

Mit dem erhöhten Operator können (2) und (3) wegen $\mathrm{rk}(\exists x{\in}\mathrm{L}_{\bar{\theta}\hat{\alpha_0}0}\, A(x)) = \bar{\theta}\hat{\alpha_0}0 < \bar{\theta}\hat{\alpha}0$ und $\bar{\theta}\eta'0 < \bar{\theta}\hat{\alpha}0$ und $\mathrm{lh}(\exists x{\in}\mathrm{L}_{\bar{\theta}\hat{\alpha_0}0}\, A(x)) = \mathrm{lh}(C) \in \mathcal{H}_\eta[\Theta] \subseteq \mathcal{H}_{\hat{\alpha}+1}[\Theta]$ zur Behauptung zurecht geschnitten werden.

Aus Lemma 8.3 erhalten wir den folgenden partiellen Korrektheitssatz:

Lemma A.22 (partielle Korrektheit) *Sei* $\mathrm{stg}(\Gamma) \subseteq \omega$. *Dann gilt*

$$\mathcal{H} \overset{\alpha}{\underset{\omega}{\vdash}} \Gamma[\vec{s}] \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_\omega \models \bigvee \Gamma[o(\vec{s})]$$

Damit haben wir alle Hilfsmittel beisammen, um den Hauptsatz für die Charakterisierung der beweisbar rekursiven Funktionen von KPω beweisen zu können.

Satz A.23 (Hauptsatz)
Sei $\phi \in \Delta_0$ *eine* $\mathcal{L}_\in$*–Formel mit* $FV(\phi) \subseteq \{x, y\}$*.*
Gilt $\mathrm{KP}\,\omega \vdash \mathrm{Lomega}(z) \;\to\; \forall x{\in}z\,\exists y{\in}z\,\phi(x,y)$*, so gibt es ein* $\eta < \vartheta\varepsilon_{\Omega+1}$ *mit*

$$\mathbb{L}_\omega \models \forall x\,\exists y{\in}\mathbb{L}_{\mathrm{F}_\eta(|x|)}\,\phi(x,y).$$

Beweis. Auf bekannte Weise erhält man durch Einbettung, Schnittelimination und Inversion für ein $\eta \in \mathrm{T}(\Omega)$

$$\mathcal{H}_\eta[t]\big|\!\frac{\alpha}{0}\;\exists y{\in}\mathrm{L}_\omega\,A(t,y) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_\omega^\Omega.$$

Nun kommt die Kontrolleigenschaft der $\mathcal{H}_\eta$–Operatoren zum Tragen. Der Teil (ii) des Beschränkungslemmas A.20 liefert

$$\mathcal{H}_\eta[t]\big|\!\frac{\alpha}{0}\;\exists y{\in}\mathrm{L}_{\mathrm{F}_{\bar\theta\eta|t|}}\,A(t,y) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_\omega^\Omega.$$

Eine Anwendung des partiellen Korrektheitssatzes A.22 ergibt

$$\mathbb{L}_\omega \models \exists y{\in}\mathrm{L}_{\mathrm{F}_{\bar\theta\eta|t|}}\,A(o(t),y) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_\omega^\Omega.$$

Wegen Lemma A.2 und 8.2 folgt hieraus die Behauptung.

Korollar A.24 (Die beweisbar rekursiven Funktionen von KP$\boldsymbol{\omega}$)
Die rekursiven Funktionen, deren Totalität in $\mathrm{KP}\,\omega$ *bewiesen werden kann, sind genau diejenigen Funktionen, die durch iterierte Anwendung von Substitution, primitiver Rekursion und* $(\mathrm{F}_\eta^\Omega)_{\eta<\vartheta\varepsilon_{\Omega+1}}$*–beschränktem* μ*–Operator auf die Funktionen* $(x \mapsto 0)$*,* $(x \mapsto x+1)$ *und* $(\vec{x} \mapsto x_i)$ *erzeugt werden.*

Anhang B

Normabschätzungen für die Einbettung

In diesem Kapitel werden die lästigen, aber einfachen Rechnungen ausgeführt, die in der Einbettung benötigt werden. Diese gelten gleichermaßen für die Systeme $\mathrm{RS}(\Omega)$, $\mathrm{RS}(M)$ und $\mathrm{RS}(\mathcal{K})$. Sei also $\vartheta \in \{\Omega, M, \mathcal{K}\}$. Für das System $\mathrm{RS}(\Omega)$ sind die Abschätzungen von $\mathrm{no}(\mathrm{Ad}(b))$ überflüssig. Die Untersuchung der Formeln $\mathrm{Ad}^{\xi}(b)$ erübrigt sich wegen der Identität $\mathrm{no}(\mathrm{Ad}^{\xi}(b)) = \mathrm{no}(\mathrm{Ad}(b))$.

Lemma B.1

(i) $\mathrm{no}(a = b) < \omega^{3|a|+1} \cdot 2 \oplus \omega^{3|b|+1} \cdot 2 \oplus \omega^2 \cdot 2 \oplus 2$

(ii) $N\mathrm{no}(a = b) \le 16 + 6N|a| + 6N|b|$

Lemma B.2

Ist $\phi(\vec{x})$ *eine* $\mathcal{L}^{\vartheta}_{\mathrm{Ad}}$*–Formel mit* $\mathrm{lh}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}) \le \Phi(N\alpha)$ *und sind* $\vec{t}$ $\mathrm{RS}(\vartheta)$*–Terme mit* $|\vec{t}\,| < \alpha$ *und* $N|\vec{t}\,| \le N\alpha$*, so gilt:*

(i) $\mathrm{no}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\vec{t}\,)) \ < \ \omega^{3\alpha} \cdot \mathrm{lh}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha})$

(ii) $N\mathrm{no}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\vec{t}\,)) \ < \ \Phi(N\alpha + 1)$

Beweis durch Induktion nach ϕ. Es wird anstelle von (ii) zunächst

(iii) $N\mathrm{no}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\vec{t}\,)) \ < \ \Phi(N\alpha) \cdot \mathrm{lh}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha})$

gezeigt.

- (i) $\mathrm{no}(\mathrm{Ad}(a)) \;=\; \omega^{3|a|+2} \;<\; \omega^{3\alpha}$

  (iii) $N\mathrm{no}(\mathrm{Ad}(a)) \leq 3 + 3N|a| \leq 3 + 3N\alpha \;<\; \Phi(N\alpha)$
- (i) $\mathrm{no}(a \in b) \;=\; \omega^{3|a|+2} \oplus \omega^{3|b|+1} \;<\; \omega^{3\alpha}$

  (iii) $N\mathrm{no}(a \in b) \leq 3 + 3N|a| + 2 + 3N|b| \leq 5 + 6N\alpha \;<\; \Phi(N\alpha)$
- Nach Voraussetzung ist $\mathrm{lh}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}) \leq N\alpha$, also $\alpha > 0$, daher gilt $2 < \omega^{3\alpha}$.

  (i) $$\begin{aligned} \mathrm{no}(A \vee B) = {} & 2 + \mathrm{no}(A) + \mathrm{no}(B) \\ <^{Iv} {} & 2 + \omega^{3\alpha} \cdot \mathrm{lh}(A) + \omega^{3\alpha} \cdot \mathrm{lh}(B) \\ \leq {} & \omega^{3\alpha} \cdot (\mathrm{lh}(A) + \mathrm{lh}(B) + 1) \end{aligned}$$

  (iii) $$\begin{aligned} N\mathrm{no}(A \vee B) = {} & 2 + N\mathrm{no}(A) + N\mathrm{no}(B) \\ <^{Iv} {} & 2 + \Phi(N\alpha)\mathrm{lh}(A) + \Phi(N\alpha) \cdot \mathrm{lh}(B) \\ \leq {} & \Phi(N\alpha)(\mathrm{lh}(A) + \mathrm{lh}(B) + 1) \end{aligned}$$
- (i) $$\begin{aligned} \mathrm{no}(\exists x{\in}\mathrm{L}_\alpha\, B(x)) \leq {} & \omega^{3\alpha} \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing)) + 1 \\ <^{Iv} {} & \omega^{3\alpha} \oplus \omega^{3\alpha} \cdot \mathrm{lh}(B) \\ = {} & \omega^{3\alpha} \cdot (\mathrm{lh}(B) + 1) \end{aligned}$$

  (iii) $$\begin{aligned} N\mathrm{no}(\exists x{\in}\mathrm{L}_\alpha\, B(x)) \leq {} & 2 + 3N\alpha + N\mathrm{no}(B(\varnothing)) \\ <^{Iv} {} & 2 + 3N\alpha + \Phi(N\alpha) \cdot \mathrm{lh}(B) \\ \leq {} & \Phi(N\alpha)(\mathrm{lh}(B) + 1) \end{aligned}$$
- Ist der Beschränkungsterm $a \not\equiv \mathrm{L}_\alpha$, so gilt $|a| < \alpha$

  (i) $$\begin{aligned} \mathrm{no}(\exists x{\in}a\, B(x)) \leq {} & \omega^{3|a|+1} \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing)) \\ <^{Iv} {} & \omega^{3\alpha} \oplus \omega^{3\alpha} \cdot \mathrm{lh}(B) \\ = {} & \omega^{3\alpha} \cdot (\mathrm{lh}(B) + 1) \end{aligned}$$

  (iii) $$\begin{aligned} N\mathrm{no}(\exists x{\in}a\, B(x)) \leq {} & 2 + 3N|a| + N\mathrm{no}(B(\varnothing)) \\ <^{Iv} {} & 2 + 3N\alpha + \Phi(N\alpha) \cdot \mathrm{lh}(B) \\ \leq {} & \Phi(N\alpha)(\mathrm{lh}(B) + 1) \end{aligned}$$

Die Behauptung (ii) folgt nun wegen $\mathrm{lh}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}) \leq \Phi(N\alpha)$ und Eigenschaft (Φ.6):

$$N\mathrm{no}(\phi) \;<\; \Phi(N\alpha)^2 \;<\; \Phi(N\alpha + 1)$$

Lemma B.3

(i) $\mathrm{no}(F(a)) \;<\; \omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(F) \oplus \mathrm{no}(F(\varnothing))$

(ii) $N\mathrm{no}(F(a)) \;<\; N(\omega^{3|a|+2}) \cdot \mathrm{nt}(F) + N\mathrm{no}(F(\varnothing))$

Beweis durch Induktion nach F. Tritt a nicht in $F(a)$ auf, so ist die Behauptung klar. Andernfalls gelten die folgenden Ungleichungen.

- (i) $\mathrm{no}(\mathrm{Ad}(a)) \;=\; \omega^{3|a|+2} \;<\; \omega^{3|a|+2} \oplus \mathrm{no}(\mathrm{Ad}(\varnothing))$

  (ii) $N\mathrm{no}(\mathrm{Ad}(a)) \;=\; N(\omega^{3|a|+2}) \;<\; N(\omega^{3|a|+2}) + N\mathrm{no}(\mathrm{Ad}(\varnothing))$

- (i) $\mathrm{no}(a \in a) \;=\; \omega^{3|a|+2} \oplus \omega^{3|a|+1} \;<\; \omega^{3|a|+2} \cdot 2 \;=\; \omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(a \in a)$

  (ii) $N\mathrm{no}(a \in a) \;=\; N\omega^{3|a|+2} + N\omega^{3|a|+1} \;<\; (N\omega^{3|a|+2}) \cdot 2$

  $\qquad = \; N(\omega^{3|a|+2}) \cdot \mathrm{nt}(a \in a)$

- (i) $\mathrm{no}(a \in b) \;=\; \omega^{3|a|+2} \oplus \omega^{3|b|+1} \;<\; \omega^{3|a|+2} \oplus \mathrm{no}(\varnothing \in b)$

  (ii) $N\mathrm{no}(a \in b) \;=\; N\omega^{3|a|+2} + N\omega^{3|b|+1} \;<\; N\omega^{3|a|+2} + N\mathrm{no}(\varnothing \in b)$

- (i) $\mathrm{no}(b \in a) \;=\; \omega^{3|b|+2} \oplus \omega^{3|a|+1} \;<\; \omega^{3|a|+2} \oplus \mathrm{no}(b \in \varnothing)$

  (ii) $N\mathrm{no}(b \in a) \;=\; N\omega^{3|b|+2} + N\omega^{3|a|+1} \;<\; N\omega^{3|a|+2} + N\mathrm{no}(b \in \varnothing)$

- (i) $\mathrm{no}(A(a) \,\vee\, B(a))$

  $$\begin{aligned} &= \mathrm{no}(A(a)) + \mathrm{no}(B(a)) + 2 \\ &<^{Iv} \omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(A) \oplus \mathrm{no}(A(\varnothing)) \oplus \omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing)) + 2 \\ &= \omega^{3|a|+2} \cdot (\mathrm{nt}(A) + \mathrm{nt}(B)) \oplus \mathrm{no}(A(\varnothing) \,\vee\, B(\varnothing)) \end{aligned}$$

  (ii) $N\mathrm{no}(A(a) \,\vee\, B(a))$

  $$\begin{aligned} &= N\mathrm{no}(A(a)) + N\mathrm{no}(B(a)) + 2 \\ &<^{Iv} N\omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(A) + N\mathrm{no}(A(\varnothing)) \\ &\qquad + N\omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) + N\mathrm{no}(B(\varnothing)) + 2 \\ &= N\omega^{3|a|+2} \cdot (\mathrm{nt}(A) + \mathrm{nt}(B)) + N\mathrm{no}(A(\varnothing) \,\vee\, B(\varnothing)) \end{aligned}$$

- (i) $\mathrm{no}(\exists x{\in}a\, B(x,a))$

  $$\begin{aligned} &\leq \omega^{3|a|+1} \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing, a)) \\ &<^{Iv} \omega^{3|a|+2} \oplus \omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing, \varnothing)) \\ &< \omega^{3|a|+2} \cdot (\mathrm{nt}(B) + 1) \oplus \mathrm{no}(\exists x{\in}b\, B(x, \varnothing)) \end{aligned}$$

  (ii) $N\mathrm{no}(\exists x{\in}a\, B(x,a))$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad N\omega^{3|a|+1} + N\mathrm{no}(B(\varnothing, a)) \\
&<^{Iv} N\omega^{3|a|+2} + N\omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) + N\mathrm{no}(B(\varnothing, \varnothing)) \\
&< \quad N\omega^{3|a|+2} \cdot (\mathrm{nt}(B) + 1) + N\mathrm{no}(\exists x{\in}b\, B(x, \varnothing))
\end{aligned}
$$

- Sei $\mathrm{L}_{|b|} \not\equiv a$.

  (i) $\mathrm{no}(\exists x{\in}\mathrm{L}_{|b|}\, B(x,a))$
  $$\begin{aligned} &= \omega^{3|b|} \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing,a)) + 1 \\ &<^{Iv} \omega^{3|b|} \oplus \omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing,\varnothing)) + 1 \\ &= \omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) \oplus \mathrm{no}(\exists x{\in}\mathrm{L}_{|b|}\, B(x,\varnothing)) \end{aligned}$$

  (ii) $N\mathrm{no}(\exists x{\in}\mathrm{L}_{|b|}\, B(x,a))$
  $$\begin{aligned} &= N\omega^{3|b|} + N\mathrm{no}(B(\varnothing,a)) \\ &<^{Iv} N\omega^{3|b|} + N\omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) + N\mathrm{no}(B(\varnothing,\varnothing)) \\ &= N\omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) + N\mathrm{no}(\exists x{\in}\mathrm{L}_{|b|}\, B(x,\varnothing)) \end{aligned}$$

- Sei $b \not\equiv a$ und $b \not\equiv \mathrm{L}_{|b|}$.

  (i) $\mathrm{no}(\exists x{\in}b\, B(x,a))$
  $$\begin{aligned} &= \omega^{3|b|+1} \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing,a)) \\ &<^{Iv} \omega^{3|b|+1} \oplus \omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing,\varnothing)) \\ &= \omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) \oplus \mathrm{no}(\exists x{\in}b\, B(x,\varnothing)) \end{aligned}$$

  (ii) $N\mathrm{no}(\exists x{\in}b\, B(x,a))$
  $$\begin{aligned} &= N\omega^{3|b|+1} + N\mathrm{no}(B(\varnothing,a)) \\ &<^{Iv} N\omega^{3|b|+1} + N\omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) + N\mathrm{no}(B(\varnothing,\varnothing)) \\ &= N\omega^{3|a|+2} \cdot \mathrm{nt}(B) + N\mathrm{no}(\exists x{\in}b\, B(x,\varnothing)) \end{aligned}$$

Lemma B.4 *Für $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ oder $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$ und $\iota \in \mathrm{J}$ gilt:*

(i) $\mathrm{no}(A_\iota) < \mathrm{no}(A)$

(ii) $N\mathrm{no}(A_\iota) < \Phi(N\mathrm{no}(A)) \cdot (N|\iota| + 1)$

(iii) $N\mathrm{no}(A_\iota) < \Phi(N\mathrm{no}(A) + N|\iota|)$

Beweis. (iii) folgt direkt aus (ii). Bei den Abschätzungen für (ii) wird sehr grob verfahren. Dazu sei die folgende Erklärung geliefert. Wird eine Summe abgeschätzt durch einen Term der Gestalt $n \cdot \Phi \ldots$, so folgt aus irgendwelchen einfachen Gründen, dass jeder Summand gegen $\Phi \ldots$ abgeschätzt werden kann, und es kommen höchstens n Summanden vor.

- $A \equiv \mathrm{Ad}(b)$, also ist $A_\iota \equiv b = \iota$ und $|\iota| \leq |b|$.

(i) $\mathrm{no}(A_\iota) \leq \omega^{3|b|+1} \oplus \omega^{3|\iota|+1} \oplus \omega^2 \cdot 2 \oplus 2 < \omega^{3|b|+1} \cdot 3 < \omega^{3|b|+2} = \mathrm{no}(A)$
Dabei ist $|b| > 0$ für $\mathrm{J} \neq \emptyset$ zu beachten.

(ii) $$\begin{aligned} N\mathrm{no}(A_\iota) &\leq 16 + 6N|b| + 6N|\iota| \\ &\leq 3 \cdot 6\Phi(N|b|+1) \cdot (N|\iota|+1) \\ &\leq \Phi(N\omega^{3|b|+2}) \cdot (N|\iota|+1) \\ &= \Phi(N\mathrm{no}(A)) \cdot (N|\iota|+1) \end{aligned}$$

- $A \equiv a \in \mathrm{L}_\alpha$, also ist $A_\iota \equiv \iota \notin \varnothing \wedge \iota = a$ und $\mathrm{J} = \mathcal{T}_\alpha^\vartheta$.

(i) $$\begin{aligned} \mathrm{no}(A_\iota) &\leq \omega^{3|\iota|+2} \oplus \omega \oplus \omega^{3|\iota|+1} \cdot 2 \oplus \omega^{3|a|+1} \cdot 2 + \omega^2 \cdot 2 + 4 \\ &< \omega^{3|a|+2} \oplus \omega^{3\alpha+1} = \mathrm{no}(A) \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} N\mathrm{no}(A_\iota) &\leq 18 + 6N|a| + 6N|\iota| + N(\omega^{3|\iota|+2}) \\ &\leq 18 + 6N|a| + 6N|\iota| + 3(N|\iota|+1) \\ &< 18 + 6N|a| + 9(N|\iota|+1) \\ &< 3\Phi(N\omega^{3|a|+2} + N\alpha) \cdot (N|\iota|+1) \\ &< \Phi(N\omega^{3|a|+2} + N\omega^{3\alpha+1}) \cdot (N|\iota|+1) \\ &= \Phi(N\mathrm{no}(A)) \cdot (N|\iota|+1) \end{aligned}$$

- $A \equiv a \in [x \in \mathrm{L}_\alpha :\ \phi^{\mathrm{L}_\alpha}(u, \vec{t})]$, also ist $A_\iota \equiv \phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\iota, \vec{t}) \wedge a = \iota$ und $\mathrm{J} = \mathcal{T}_\alpha^\vartheta$.

(i) Nach Lemma B.2 und B.3 (i) gilt für $n := \max\{\mathrm{lh}(a = \iota), \mathrm{nt}(\phi)\}$
$$\begin{aligned} \mathrm{no}(A_\iota) &\leq \omega^{3|a|+1} \cdot 2 \oplus \omega^{3|\iota|+1} \cdot 2 \oplus \omega^2 \cdot 2 \oplus 2 \oplus \omega^{3|\iota|+2} \cdot n \oplus \omega^{3\alpha} \cdot n \\ &< \omega^{3|a|+2} \oplus \omega^{3\alpha} \cdot n \oplus \omega^{3(|\iota|+1)} \\ &< \omega^{3|a|+2} \oplus \omega^{3\alpha+1} \\ &= \mathrm{no}(A) \end{aligned}$$

(ii) Nach Definition der RS(ϑ)–Terme gilt $tz(\phi) \leq 2\mathrm{lh}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}) \leq 2\Phi(N\alpha)$.
Nach Lemma B.2 und B.3 (ii) folgt
$$\begin{aligned} &N\mathrm{no}(A_\iota) \\ &\quad \leq 18 + 6N|a| + 6N|\iota| + N\mathrm{no}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\iota, \vec{t})) \\ &\quad \leq 18 + 6N|a| + 6N|\iota| + 3(N|\iota|+1) \cdot \mathrm{nt}(\phi) + \Phi(N\alpha+1) \\ &\quad \leq 18 + 6N|a| + 9\mathrm{nt}(\phi) \cdot (N|\iota|+1) + \Phi(N\alpha+1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad 18 + 6N|a| + 18\Phi(N\alpha+1)\cdot(N|\iota|+1) + \Phi(N\alpha+1)\\
&\leq^{(\Phi.5)} 18 + \Phi(N\omega^{3|a|+2}) + \Phi(3+N\alpha)\cdot(N|\iota|+1) + \Phi(N\alpha+1)\\
&\leq \quad 4\Phi(N\omega^{3|a|+2} + N\alpha)\cdot(N|\iota|+1)\\
&< \quad \Phi(N\omega^{3|a|+2} + N\omega^{3\alpha+1})\cdot(N|\iota|+1)\\
&= \quad \Phi(N\mathrm{no}(A))\cdot(N|\iota|+1)
\end{aligned}
$$

- $A \equiv A_0 \vee A_1$, also ist $\mathrm{J} = \{0, 1\}$.

  (i) $\mathrm{no}(A_\iota) < \mathrm{no}(A_0) \oplus \mathrm{no}(A_1) + 2 \ = \ \mathrm{no}(A)$

  (ii) $N\mathrm{no}(A_\iota) \ < \ \Phi(N\mathrm{no}(A_0 \vee A_1))\cdot(N|\iota|+1)$

- $A \equiv \exists x{\in}\mathrm{L}_\alpha\, B(x)$, also ist $A_\iota \equiv \iota \notin \varnothing \wedge B(\iota)$ und $\mathrm{J} = \mathcal{T}^\vartheta_\alpha$.

  (i) Nach Lemma B.3 (i) gilt

  $$
  \begin{aligned}
  \mathrm{no}(A_\iota) &< \omega^{3|\iota|+2} \oplus \omega \oplus \omega^{3|\iota|+2}\cdot \mathrm{nt}(B) \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing)) + 2\\
  &< \omega^{3\alpha} \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing)) = \mathrm{no}(A)
  \end{aligned}
  $$

  (ii) Nach Lemma B.3 (ii) gilt

  $$
  \begin{aligned}
  N\mathrm{no}(A_\iota) &= 2 + N\mathrm{no}(\iota \notin \varnothing) + N\mathrm{no}(B(\iota))\\
  &\leq 4 + N\omega^{3|\iota|+2} + 3(N|\iota|+1)\cdot \mathrm{nt}(B) + N\mathrm{no}(B(\varnothing))\\
  &\leq 4 + 3(N|\iota|+1) + 3N\mathrm{no}(B(\varnothing))(N|\iota|+1) + N\mathrm{no}(B(\varnothing))\\
  &\leq 8\Phi(N\alpha + N\mathrm{no}(B(\varnothing)))\cdot(N|\iota|+1)\\
  &< \Phi(N\omega^{3\alpha} + N\mathrm{no}(B(\varnothing)) + 1)\cdot(N|\iota|+1)\\
  &= \Phi(N\mathrm{no}(A))\cdot(N|\iota|+1)
  \end{aligned}
  $$

- $A \equiv \exists x{\in}[z \in \mathrm{L}_\alpha \ : \ \phi^{\mathrm{L}_\alpha}(z, \vec{t})]\ B(x)$, also ist $A_\iota \equiv \phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\iota, \vec{t}) \wedge B(\iota)$ und $\mathrm{J} = \mathcal{T}^\vartheta_\alpha$.

  (i) Nach Lemma B.2 und B.3 (i) gilt

  $$
  \begin{aligned}
  \mathrm{no}(A_\iota) &< \omega^{3|\iota|+2}\cdot \mathrm{nt}(\phi) \oplus \omega^{3\alpha}\cdot \mathrm{lh}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}) \oplus \omega^{3|\iota|+2}\cdot \mathrm{nt}(B) \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing))\\
  &< \omega^{3\alpha+1} \oplus \mathrm{no}(B(\varnothing))\\
  &= \mathrm{no}(A)
  \end{aligned}
  $$

  (ii) Nach Lemma B.2 und B.3 (ii) gilt

$$
\begin{aligned}
N\mathrm{no}(A_\iota) &= 2 + N\mathrm{no}(\phi^{\mathrm{L}_\alpha}(\iota,\vec{t})) + N\mathrm{no}(B(\iota)) \\
&\leq 2 + 3(N|\iota| + 1)\cdot \mathrm{nt}(\phi) + \Phi(N\alpha + 1) \\
&\qquad + 3(N|\iota| + 1)\cdot \mathrm{nt}(B) + N\mathrm{no}(B(\varnothing)) \\
&\leq 2 + 6\Phi(N\alpha + 1)\cdot (N|\iota| + 1) + \Phi(N\alpha + 1) \\
&\qquad + 3(N\mathrm{no}(B(\varnothing)))\cdot (N|\iota| + 1) + N\mathrm{no}(B(\varnothing)) \\
&\leq 12\Phi(N\alpha + N\mathrm{no}(B(\varnothing)))\cdot (N|\iota| + 1) \\
&< \Phi(N\omega^{3\alpha+1} + N\mathrm{no}(B(\varnothing)))\cdot (N|\iota| + 1) \\
&= \Phi(N\mathrm{no}(A))\cdot (N|\iota| + 1)
\end{aligned}
$$

Damit haben wir alle Hilfsrechnungen beisammen, um die für die Einbettung entscheidende Aussage über die Monotonie der Operatoren in der Analyse von $\mathrm{RS}(M)$ und $\mathrm{RS}(\mathcal{K})$ zu beweisen. Zur Erinnerung sei erwähnt, dass mit Λ Multimengen von $\mathrm{RS}(\vartheta)$–Sätzen bezeichnet werden.

Lemma B.5 *Sei* $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}}$ *oder* $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in \mathrm{J}}$ *und* $\mathrm{stg}(\Lambda, A) \subseteq \mathcal{H}$, *wobei* $\mathcal{H}$ *ein guter Operator ist. Dann gilt für* $\iota, \iota_1, \dots, \iota_n \in \mathrm{J}$*:*

(i) $\mathrm{no}(A_\iota) \lhd_\iota \mathrm{no}(A)$ *in* $\mathcal{H}$

(ii) $\mathrm{stg}(\iota_1, \dots, \iota_n) \subseteq \mathrm{stglh}(\Lambda, A)^\star \;\&\; 1 \leq n \leq 2\cdot \max\{\mathrm{nt}(B) : B \in \Lambda\}$
$\quad\Rightarrow\quad \mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \dots, A_{\iota_n}) + n \lhd \mathrm{No}(\Lambda, A)$ *in* $\mathcal{H}$

Beweis. Wir zeigen zunächst eine Hilfsaussage.

(1) $\mathrm{stg}(\iota_1, \dots, \iota_n) \subseteq \mathrm{stglh}(\Lambda, A)^\star \;\&\; n \leq 2\cdot \max\{\mathrm{nt}(B) : B \in \Lambda\}$
$\quad\Rightarrow\quad N\mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \dots, A_{\iota_n}) + n \leq \Phi(N\mathrm{No}(\Lambda, A))$

Aus der Voraussetzung folgt $n < N\mathrm{No}(\Lambda)$. Sei $k \in \{1, \dots, n\}$ so gewählt, dass $N|\iota_k| = \max\{N|\iota_j| : 1 \leq j \leq n\}$ ist. Es ist $|\iota_k| \in \mathrm{stglh}(\Lambda, A)^\star$, also im schlimmsten Fall $|\iota_k| = \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_m$ mit $m, \xi_1, \dots, \xi_m \in \mathrm{stglh}(\Lambda, A)$. Dann ist $N|\iota_k| \leq m\cdot \max\{N\xi_i : 1 \leq i \leq m\} < (N\mathrm{no}(A)\cdot N\mathrm{No}(\Lambda))^2$. Unter Hinzunahme von Lemma B.4 (ii) können wir (1) durch folgende Rechnung verifizieren.

- $$\begin{aligned} N\mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}) + n =& N(\mathrm{No}(\Lambda) \oplus \omega^{\mathrm{no}(A_{\iota_1})} \oplus \cdots \oplus \omega^{\mathrm{no}(A_{\iota_n})}) + n \\ <& N\mathrm{No}(\Lambda) + n \cdot \Phi(N\mathrm{no}(A))(N|\iota_k| + 1) + 2n \\ <& 4\Phi(N\mathrm{no}(A)) \cdot (N\mathrm{No}(\Lambda))^3 \cdot (N\mathrm{no}(A))^2 \\ \leq& \Phi(N\mathrm{no}(A) + N\mathrm{No}(\Lambda) + 1) \qquad \text{mit } (\Phi.7) \\ \leq& \Phi(N\mathrm{No}(\Lambda, A)) \end{aligned}$$

Da $\mathrm{no}(A)$ keine Epsilonzahl ist, gilt $N\mathrm{No}(A) = N\omega^{\mathrm{no}(A)} = N\mathrm{no}(A) + 1$. Dies rechtfertigt die letzte Ungleichung. Jetzt sind wir bereit, die beiden Aussagen des Lemma zu beweisen.

(i) Es gilt $\mathrm{SC}(\mathrm{stg}(A_\iota)) \subseteq \mathrm{SC}(\mathrm{stg}(A, \iota)) \subseteq \mathcal{H}[\iota]$, also $\mathrm{no}(A), \mathrm{no}(A_\iota) \in \mathcal{H}[\iota]$. Mit Lemma B.4 (i) und (iii) folgt die Behauptung.

(ii) Aus $\mathrm{stg}(\iota_1, \cdots, \iota_n) \subseteq \mathrm{stg}(\Lambda, A)^\star$ folgt $\mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}) \in \mathcal{H}$. Außerdem gilt

- $$\begin{aligned} \mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}) + n &= \mathrm{No}(\Lambda) \oplus \omega^{\mathrm{no}(A_{\iota_1})} \oplus \cdots \oplus \omega^{\mathrm{no}(A_{\iota_n})} + n \\ &< \mathrm{No}(\Lambda) \oplus \omega^{\mathrm{no}(A)} \quad \text{mit Lemma B.4 (i)} \\ &= \mathrm{No}(\Lambda, A) \end{aligned}$$
- $N\mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}) + n \leq^{(1)} \Phi(N\mathrm{No}(\Lambda, A))$.

Mit einer ähnlichen Rechnung können wir die Monotonie der Operatoren der Analyse von $\mathrm{KP}\omega$ beweisen.

Lemma B.6 *Für* $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota \in \mathrm{J}}$ *oder* $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in \mathrm{J}}$ *und* $\iota, \iota_1, \ldots, \iota_n \in \mathrm{J}$ *gilt:*

(i) $\mathcal{H}_{\mathrm{No}(\Lambda, A_\iota)+1}[\Lambda, A_\iota] \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{No}(\Lambda, A)+1}[\Lambda, A]$

(ii) $\mathrm{stg}(\iota_1, \ldots, \iota_n) \subseteq \mathrm{stglh}(\Lambda, A)^\star \;\;\&\;\; 1 \leq n \leq 2 \cdot \max\{\mathrm{nt}(B) : B \in \Lambda\}$
$\Rightarrow \quad \mathcal{H}_{\mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n})+1}[\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}] \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{No}(\Lambda, A)+1}[\Lambda, A]$

Beweis. Wir zeigen zunächst eine Hilfsaussage.

(1) $\mathrm{stg}(\iota_1, \ldots, \iota_n) \subseteq \mathrm{stglh}(\Lambda, A)^\star \;\;\&\;\; n \leq 2 \cdot \max\{\mathrm{nt}(B) : B \in \Lambda\}$
$\Rightarrow \quad N\mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}) + N(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}) + 4 \leq \Phi(N\mathrm{No}(\Lambda, A))$

Wie im Beweis des vorigen Lemmas folgt

$$(2) \quad n < N\mathrm{No}(\Lambda) \quad \text{und} \quad N|\iota_j| < (N\mathrm{no}(A) \cdot N\mathrm{No}(\Lambda))^2 \text{ für } 1 \leq j \leq n.$$

Für solche ι gilt aufgrund der Normeinschränkung bei der Termdefinition

- $N(A_\iota)\check{} < NA\check{} \cdot (1 + \mathrm{nt}(A_\iota)) + N|\iota|$
$$\begin{aligned} &\leq NA\check{} \cdot (2\mathrm{lh}(A_\iota) + 1) + N|\iota| \\ &\leq N\mathrm{no}(A) \cdot 2\Phi(\max\{N\alpha :\ \alpha \in \mathrm{stg}(A)\}) + (N\mathrm{no}(A) \cdot N\mathrm{No}(\Lambda))^2 \\ &\leq 3\Phi(N\mathrm{no}(A)) \cdot (N\mathrm{no}(A))^3 \cdot (N\mathrm{No}(\Lambda))^2 \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$(3) \quad N(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n})\check{} < N\mathrm{No}\Lambda + 3n\Phi(N\mathrm{no}(A)) \cdot (N\mathrm{no}(A))^3 \cdot (N\mathrm{No}(\Lambda))^2.$$

Mit den in (2), (3) und Lemma B.4 (ii) versammelten Kräften können wir (1) verifizieren. Dazu sei ein k mit $N|\iota_k| = \max\{N|\iota_j| :\ 1 \leq j \leq n\}$ gewählt.

- $N\mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}) + N(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n})\check{}$
$$\begin{aligned} &< N(\mathrm{No}(\Lambda) \oplus \omega^{\mathrm{no}(A_{\iota_1})} \oplus \ldots \oplus \omega^{\mathrm{no}(A_{\iota_n})}) + N\mathrm{No}\Lambda \\ &\quad + 3n\Phi(N\mathrm{no}(A)) \cdot (N\mathrm{no}(A))^3 \cdot (N\mathrm{No}(\Lambda))^2 \\ &< 2N\mathrm{No}(\Lambda) + n + n\Phi(N\mathrm{no}(A))(N|\iota_k| + 1) \\ &\quad + 3n\Phi(N\mathrm{no}(A)) \cdot (N\mathrm{no}(A))^3 \cdot (N\mathrm{No}(\Lambda))^2 \\ &< 7\Phi(N\mathrm{no}(A)) \cdot (N\mathrm{No}(\Lambda) \cdot N\mathrm{no}(A))^3 \\ &\leq \Phi(N\mathrm{no}(A) + N\mathrm{No}(\Lambda) + 1) \qquad \text{mit } (\Phi.7) \\ &\leq \Phi(N\mathrm{No}(\Lambda, A)) \end{aligned}$$

Da $\mathrm{no}(A)$ keine Epsilonzahl ist, gilt $N\mathrm{No}(A) = N\omega^{\mathrm{no}(A)} = N\mathrm{no}(A) + 1$. Dies rechtfertigt die letzte Ungleichung. Jetzt sind wir bereit, die beiden Aussagen des Lemma zu beweisen. Die kleinen römischen Nummern verweisen auf die entsprechenden Teile von Lemma B.4.

(i) Es gilt $\mathrm{SC}\,\mathrm{stg}(\Lambda, A_\iota) \subseteq \mathrm{SC}\,\mathrm{stg}(\Lambda, A, \iota)$ und so kann Lemma A.9 angewendet werden:
   - $\mathrm{No}(\Lambda, A_\iota) + 1 = \mathrm{No}(\Lambda) \oplus \omega^{\mathrm{no}(A_\iota)} + 1 <^{(i)} \mathrm{No}(\Lambda) \oplus \omega^{\mathrm{no}(A)} = \mathrm{No}(\Lambda, A)$
   - $\mathrm{SC}_\Omega \mathrm{No}(\Lambda, A_\iota) \subseteq \mathrm{SC}_\Omega \mathrm{stg}(\Lambda, A, \iota) < \vartheta\mathrm{No}(\Lambda, A)(\Lambda, A, \iota)\check{}$
   - $N\mathrm{No}(\Lambda, A_\iota) + 1 \leq^{(ii)} \Phi(N\mathrm{No}(\Lambda, A) + N|\iota|)$
$$< \Phi(N\mathrm{No}(\Lambda, A) + \mathrm{F}\bar{\theta}\mathrm{No}(\Lambda, A)(\Lambda, A, \iota)\check{})$$

(ii) ergibt sich aus den folgenden drei Punkten. Sei $\alpha := \mathrm{No}(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n})+1$.

- $$\begin{aligned} \alpha = &\ \mathrm{No}(\Lambda) \oplus \omega^{\mathrm{no}(A_{\iota_1})} \oplus \cdots \oplus \omega^{\mathrm{no}(A_{\iota_n})} + 1 \\ <^{(i)} &\ \mathrm{No}(\Lambda) \oplus \omega^{\mathrm{no}(A)} \\ = &\ \mathrm{No}(\Lambda, A) \end{aligned}$$
- $\mathrm{SC}_\Omega\{\alpha, (\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n})\breve{}\} \subseteq \mathrm{SC}_\Omega \mathrm{stg}(\Lambda, A) < \bar{\theta}\mathrm{No}(\Lambda, A)(\Lambda, A)\breve{}$, da $\mathrm{SC}_\Omega X^\star \subseteq \mathrm{SC}_\Omega X$ für beliebige Mengen $X \subseteq \mathrm{ON}$ gilt.
- $N\bar{\theta}\alpha(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n})\breve{} \leq^{(1)} \Phi(N\mathrm{No}(\Lambda, A))$

Aus den ersten beiden Punkten folgt $\bar{\theta}\alpha(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n})\breve{} < \bar{\theta}\mathrm{No}(\Lambda, A)(\Lambda, A)\breve{}$. Zieht man den letzen Punkt und (iv), (v) aus Lemma A.6 hinzu, so sieht man $\mathrm{F}\bar{\theta}\alpha(\Lambda, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n})\breve{} < \mathrm{F}\bar{\theta}(\mathrm{No}(\Lambda, A)+1)(\Lambda, A)\breve{}$ ein und damit auch die Behauptung (ii).

Anhang C

$\stackrel{\star}{\models}$ Lomega$^\vartheta(\mathrm{L}_\omega)$

Aufgrund der Einschränkungen beim Existenzschluss im RS*–Kalkül können wir nicht einmal für $\Sigma_1(\omega)$–Sätze Vollständigkeit erwarten. Der folgende Satz schöpft aber die Vollständigkeit des RS*–Kalküls so gut aus, dass sich der Beweis von $\stackrel{\star}{\models}$ Lomega$^\vartheta(\mathrm{L}_\omega)$ leichter als befürchtet gestaltet.

Lemma C.1 (Partielle Vollständigkeit von RS*)
Sei $\phi \in \Delta_0$ und $\vec{a} \in \mathcal{T}_\omega \cup \{\mathrm{L}_\omega\} \cup \{[x{\in}\mathrm{L}_\omega : Fx] : F \in \Sigma_{\leq 1}(\mathrm{L}_\omega)\}$, so dass $\phi(\vec{a})$ eine RS*–Formel ist, deren Existenzquantoren von Termen aus $\mathcal{T}_\omega$ beschränkt werden. Dann gilt*

$$\mathbb{L}_\omega \models \phi(o(\vec{a})) \quad \Rightarrow \quad \stackrel{\star}{\models} \phi(\vec{a})$$

Beweis. Wir identifizieren Formeln mit den assoziierten Disjunktionen/Konjunktionen und induzieren über deren Schachtelungstiefe in $\phi(\vec{a})$. Es folgt eine Fallunterscheidung nach Gestalt der Formel ϕ.

- $\mathbb{L}_\omega \models \bigwedge(\phi_\iota(\vec{a}))^o_{\iota\in\mathrm{J}}$, also $\mathbb{L}_\omega \models \phi_\iota(\vec{a})^o$ für alle $\iota \in \mathrm{J}$. Liegt eine endliche oder ein L_ω–Konjunktion vor, so ist klar, dass die Induktionsvoraussetzung angewendet werden darf. Ansonsten haben wir es bei der zugrunde liegenden Hauptformel mit einer Formel $\forall y{\in}a_i\, A(y)$ mit $a_i \equiv [x{\in}\mathrm{L}_\omega : Fx]$ mit $F \in \Sigma_{\leq 1}(\mathrm{L}_\omega)$ zu tun. Dann ist $\forall y{\in}a_i\, Ay \simeq \bigwedge(\iota \mathrel{\mathring{\in}} a_i \to A(\iota))_{\iota\in\mathrm{L}_\omega} \equiv \bigwedge(\neg F(\iota) \vee A(\iota))_{\iota\in\mathrm{L}_\omega}$. Die Formel $\neg F(\iota) \vee A(\iota)$ hat eine Gestalt, die uns erlaubt, auch in diesem

Fall die Induktionsvoraussetzung anzuwenden. Wir erhalten also $\models^{\star} \phi_\iota(\vec{a})$ für alle $\iota \in \mathrm{J}$, und mit $(\bigwedge)^\star$ folgt die Behauptung.

- $\mathbb{L}_\omega \models \bigvee(\phi_\iota(\vec{a}))^o_{\iota\in\mathrm{J}}$, also $\mathbb{L}_\omega \models \phi_{\iota_0}(\vec{a})^o$ für ein $\iota_0 \in \mathrm{J}$. Nach Voraussetzung gibt es ein $t \in \mathrm{stg}(\phi(\vec{a})) \cap \mathcal{T}_\omega$, so dass $\forall\iota{\in}\mathrm{J}\,(|\iota| \leq |t|)$, also insbesondere $|\iota_0| \in \mathrm{stg}(\phi(\vec{a}))^\star$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\models^{\star} \phi_{\iota_0}(\vec{a})$ für ein $\iota_0 \in \mathrm{J}$ und mit $(\bigvee)^\star$ folgt die Behauptung.

Beim Betrachten der folgenden Abkürzungen ist zu beachten, dass der semantische Gehalt nicht immer ganz dem Namen entspricht. Zum Beispiel trifft der Satz $u = \langle v, w\rangle$ auch für $u = \{\{v\}, \{w\}, \{v, w\}\}$ zu. Nichtsdesdotrotz erfüllen die Formeln ihren Dienst.

Definition C.2 (Abkürzungen)

$u = \emptyset :\equiv \forall x{\in}u\,(x \neq x)$

$u = v + 1 :\equiv v \subseteq u \wedge v \in u \wedge \forall x{\in}u\,(x \in v \;\vee\; x = v)$

$\mathrm{ord}(u) :\equiv \mathrm{trans}(u) \;\wedge\; \forall x{\in}u\,\mathrm{trans}(u)$

$\mathrm{NatNo}(u) :\equiv \mathrm{ord}(u) \wedge \forall x{\in}u\,\neg\mathrm{infinite}(x) \wedge \neg\mathrm{infinite}(u)$

$u = \{v, w\} :\equiv v \in u \wedge w \in u \wedge \forall x{\in}u\,(x = v \;\vee\; x = w)$

$u = \{v\} :\equiv u = \{v, v\}$

$u = \langle v, w\rangle :\equiv \exists a{\in}u\,\exists b{\in}u\,(a = \{v\} \wedge b = \{v, w\}) \wedge \forall x{\in}u\,\forall y{\in}x\,(y = v \vee y = w)$

$v = 1^{\mathrm{st}}(u) :\equiv \exists a{\in}u\,\exists b{\in}u\,\exists y{\in}b\,(a = \{v\} \wedge b = \{v, y\})$

$w = 2^{\mathrm{nd}}(u) :\equiv \exists a{\in}u\,\exists b{\in}u\,\exists x{\in}a\,(a = \{x\} \wedge b = \{x, w\})$

$\exists\langle x, y\rangle{\in}g\,A(x, y) :\equiv \exists d{\in}g\,\exists a{\in}d\,\exists b{\in}d\,\exists x{\in}a\,\exists y{\in}b\,(d = \langle x, y\rangle \wedge A(x, y))$

$\forall\langle x, y\rangle{\in}g\,A(x, y) :\equiv \forall d{\in}g\,\forall a{\in}d\,\forall b{\in}d\,\forall x{\in}a\,\forall y{\in}b\,(d = \langle x, y\rangle \to A(x, y))$

$\mathrm{zt}(u_1, u_2) :\equiv \forall a{\in}u_1\,\forall b_1{\in}u_1\,\forall x{\in}a\,\forall y_1{\in}b_1\,\forall b_2{\in}u_2\,\forall y_2{\in}b_2$
$\quad (u_1 = \langle x, y_1\rangle \;\wedge\; u_2 = \langle x, y_2\rangle \to y_1 = y_2)$

$\mathrm{Fun}(f) :\equiv \forall z_1{\in}f\,\forall z_2{\in}f\;\mathrm{zt}(z_1, z_2) \;\wedge\; \forall z{\in}f\,(\exists a{\in}z\,\exists b{\in}z\,\exists x{\in}a\,\exists y{\in}b\,(z = \langle x, y\rangle))$

$v = \mathrm{Pow}^{\mathrm{fin}}(u) :\equiv \forall y{\in}v\,(y \subseteq u) \wedge \forall x{\in}u\,\exists y{\in}v\,(y = \{x\}) \wedge$
$\quad \forall x_1{\in}v\,\forall x_2{\in}v\,\exists y{\in}v\,(x_1 \subseteq y \wedge x_2 \subseteq y \wedge \forall z{\in}y\,(z \in x_1 \;\vee\; z \in x_2))$

$\mathrm{gdef}(g, v, u) :\equiv \mathrm{Fun}(g) \wedge \mathrm{NatNo}(v) \wedge v = 1^{\mathrm{st}}(u) \wedge$
$\quad \exists\langle x, y\rangle{\in}g\,(x = \emptyset \wedge y = \emptyset) \wedge u \in g \wedge$
$\quad \forall\langle m_1, y_1\rangle{\in}g\,\big(m_1 \in v \to \exists\langle m_2, y_2\rangle{\in}g\,\big(m_2 = m_1 + 1 \wedge y_2 = \mathrm{Pow}^{\mathrm{fin}}(y_1)\big)\big)$

$\mathrm{fsep}(u) :\equiv \exists g\, \exists a{\in}u\, \exists b{\in}u\, \exists n{\in}a\, \exists y{\in}b\, (u = \langle n, y\rangle \;\wedge\; \mathrm{gdef}(g, n, u)$
$\mathrm{fdef}(f, u) :\equiv \mathrm{Fun}(f) \wedge \exists\langle x, y\rangle{\in}f\, (x = \emptyset \wedge y = \emptyset) \wedge$
$\quad \forall\langle m_1, y_1\rangle{\in}f\, \exists\langle m_2, y_2\rangle{\in}f\, (m_2 = m_1 + 1 \wedge y_2 = \mathrm{Pow}^{\mathrm{fin}}(y_1)) \wedge$
$\quad \forall x{\in}u\, \exists\langle m, y\rangle{\in}f\, (x \in y) \wedge \forall\langle m, y\rangle{\in}f\, (\mathrm{NatNo}(m) \wedge y \in u)$
$\mathrm{Lomega}(u) :\equiv \exists f\, \mathrm{fdef}(f, u)$

Mit Hilfe der Seperationsformel fsep wird nun ein RS(ϑ)–Term f definiert, für dessen Standardinterpretation $o(f) = \{\langle m, \mathbb{L}_m\rangle : m \in \omega\}$ gilt. Die ersten beiden Zeilen der Formel $\mathrm{fdef}(f, u)$ fordern, dass f mindestens diese Funktion umfasst. Mit der Forderung $\forall\langle m, y\rangle{\in}f\, (\mathrm{NatNo}(m))$ aus dem letzten Konjunktionsglied folgt, dass f genau obige Funktion darstellt. Der andere Teil des letzten Konjunktionsgliedes besagt, dass der Bildbereich von f eine Teilmenge von u ist, d.h. $\mathbb{L}_\omega \subseteq o(u)$. Das vorletzte Glied bewirkt schließlich $o(u) \subseteq \mathbb{L}_\omega$. Daher leistet die Formel Lomega das Gewünschte und der unten definierte Term f ist ein Zeuge für sie.
Bezüglich der Komplexitäten obiger Formeln beachte man, dass die Formeln fsep und Lomega Σ_1–Formeln sind, wohingegen alle anderen beschränkte Formeln sind.

Definition C.3 *Wir definieren* RS*–Terme f und g_n für $n \in \omega$.*

$\quad f :\equiv [x \in \mathrm{L}_\omega : \mathrm{fsep}^\omega(x)]$

Dies ist wegen $\mathrm{lh}(\mathrm{fsep}^\omega) \leq \Phi(2) = \Phi(N\omega)$ *ein* RS*–Term.*
Für $n \in \omega$ können wir mit Lemma 8.2 RS*–Terme g_n wählen, für die*

$\quad o(g_n) = \{\langle m, \mathbb{L}_m\rangle : m \leq n\}$

gilt.

Lemma C.4

(i) $\overset{\star}{\vdash} \mathrm{Fun}(f)$

(ii) $\overset{\star}{\vdash} \forall\langle m, y\rangle{\in}f\, (\mathrm{NatNo}(m) \;\wedge\; y \in \mathrm{L}_\omega)$

Beweis. Für die vorliegenden Formeln kann der partielle Vollständigkeitssatz C.1 angewendet werden.

Lemma C.5 $\stackrel{\star}{\vdash} \exists\langle x,y\rangle{\in}f\,(x=\varnothing \wedge y=\varnothing)$

Beweis. Setze $s :\equiv [x \in \mathrm{L}_1 : x = x] \in \mathcal{T}_1$. Nach Lemma C.1 gilt

$$\stackrel{\star}{\vdash} \exists a{\in}s\,\exists b{\in}s\,\exists n{\in}a\,\exists y{\in}b\,(s=\langle n,y\rangle \wedge \mathrm{gdef}(g,n,s)).$$

Wegen $|g_0| = 2 \in \mathrm{stg}(s)^\star$ folgt mit einem $(\bigvee)^\star$–Schluss

$$\stackrel{\star}{\vdash} s \mathrel{\mathring{\in}} f \equiv \mathrm{fsep}^\omega(s)$$

Mit der partiellen Vollständigkeit C.1 erhalten wir

$$\stackrel{\star}{\vdash} \exists a{\in}s\,\exists b{\in}s\,\exists x{\in}a\,\exists y{\in}b\,(s=\langle x,y\rangle \wedge x=\varnothing \wedge y=\varnothing).$$

Aus den letzten beiden Herleitungen folgt mit $(\bigwedge)^\star$ und $(\bigvee)^\star$ (zulässig wegen $|s| = 1 \in \mathrm{stg}(f)^\star$)

$$\stackrel{\star}{\vdash} \exists\langle x,y\rangle{\in}f\,(x=\varnothing \wedge y=\varnothing).$$

Lemma C.6 $\stackrel{\star}{\vdash} \forall\langle m_1,y_1\rangle{\in}f\,\exists\langle m_2,y_2\rangle{\in}f\,(m_2=m_1+1 \wedge y_2=\mathrm{Pow}^{\mathrm{fin}}(y_1))$

Beweis. Für $\underline{u}_1 \in \mathcal{T}_\omega$ gilt entweder 1. oder 2.
1. $o(\underline{u}_1)$ hat keine Gestalt $\langle n,\mathbb{L}_n\rangle$. Dann folgt mit Lemma C.1 $\stackrel{\star}{\vdash} \underline{u}_1 \mathrel{\mathring{\notin}} f$ und mit $(\bigvee)^\star$

$$\stackrel{\star}{\vdash} \underline{u}_1 \mathrel{\mathring{\in}} f \to \forall a{\in}\underline{u}_1\,\forall b{\in}\underline{u}_1\,\forall m_1{\in}a\,\forall y_1{\in}b\,\exists\langle m_2,y_2\rangle{\in}f$$
$$(m_2=m_1+1 \wedge y_2=\mathrm{Pow}^{\mathrm{fin}}(y_1)).$$

2. $o(\underline{u}_1) = \langle \underline{m}_1,\mathbb{L}_{\underline{m}_1}\rangle$ mit $\underline{m}_1 \in \omega$. Seien $\underline{m}_2,\underline{y}_2,\underline{u}_2 \in \mathcal{T}_\omega$ mit $o(\underline{m}_2) = m_1 + 1$, $o(\underline{y}_2) = \mathbb{L}_{m_1+1}$ und $o(\underline{u}_2) = \langle o(\underline{m}_2), o(\underline{y}_2)\rangle$ gewählt (mit Lemma 8.2). Nach Lemma C.1 gilt (mit $\underline{m}_2$ als Zeuge für m)

$$\stackrel{\star}{\vdash} \exists a{\in}\underline{u}_2\,\exists b{\in}\underline{u}_2\,\exists m{\in}a\,\exists y{\in}b\,(y_2=\langle m,y\rangle \wedge \mathrm{gdef}(g_{m_2},m,\underline{u}_2)).$$

Wegen $|g_{m_2}| = m_2 + 3 \in \mathrm{stg}(\underline{u}_2)^\star$ folgt mit einem $(\bigvee)^\star$–Schluss[1]

$$\stackrel{\star}{\vdash} \underline{u}_2 \mathrel{\mathring{\in}} f.$$

Des Weiteren erhalten wir mit Lemma C.1

$$\stackrel{\star}{\vdash} \underline{m}_2 = \underline{m}_1 + 1 \,\wedge\, \underline{y}_2 = \mathrm{Pow}^{\mathrm{fin}}(\underline{y}_1).$$

Aus den letzten beiden Herleitungen bekommen wir wegen $|\underline{u}_2| \in \mathrm{stg}(\underline{y}_1)^\star$ mit einigen $(\bigvee)^\star$–Schlüssen

$$\stackrel{\star}{\vdash} \exists \langle m_2, y_2\rangle {\in} f\, (m_2 = \underline{m}_1 + 1 \,\wedge\, y_2 = \mathrm{Pow}^{\mathrm{fin}}(\underline{y}_1)).$$

Es folgt

$$\stackrel{\star}{\vdash} \underline{u}_1 \mathrel{\mathring{\in}} f \;\rightarrow\; \forall a {\in} \underline{u}_1\, \forall b {\in} \underline{u}_1\, \forall m_1 {\in} a\, \forall y_1 {\in} b\, \exists \langle m_2, y_2\rangle {\in} f$$
$$(m_2 = m_1 + 1 \,\wedge\, y_2 = \mathrm{Pow}^{\mathrm{fin}}(y_1)).$$

Aus der unter 1. und 2. erstellten Herleitung erhalten wir mit $(\bigwedge)^\star$ die Behauptung.

Lemma C.7 $\stackrel{\star}{\vdash} \forall x {\in} \mathrm{L}_\omega\, \exists \langle m, y\rangle {\in} f\, (x \in y)$

Beweis. Für $\underline{x} \in \mathcal{T}_\omega$ setze $n := |\underline{x}| + 1$ und wähle $\underline{u} \in \mathcal{T}_\omega$ mit $o(\underline{u}) = \langle n, \mathbb{L}_n\rangle$. Mit Lemma C.1 folgt

$$\stackrel{\star}{\vdash} \exists a {\in} \underline{u}\, \exists b {\in} \underline{u}\, \exists m {\in} a\, \exists y {\in} b\, (a = \{m\} \,\wedge\, b = \{m, y\} \,\wedge\, \underline{x} \in y).$$

Wie in Lemma C.6 Fall 2. erhalten wir $\stackrel{\star}{\vdash} \underline{u} \mathrel{\mathring{\in}} f$ und mit $(\bigvee)^\star$ folgt wegen $|\underline{u}| = n + 2 \in \mathrm{stg}(\underline{x})^\star$

$$\stackrel{\star}{\vdash} \exists \langle m, y\rangle {\in} f\, (\underline{x} \in y).$$

Mit $(\bigwedge)^\star$ erhalten wir die Behauptung.

Korollar C.8 $\mathrm{RS}(\vartheta) \stackrel{\star}{\vdash} \mathrm{Lomega}^\vartheta(\mathrm{L}_\omega)$

Beweis. Lemma C.4 bis C.7 und $(\bigvee)^\star$ mit $|f| = \{\omega\} \subseteq \emptyset^\star$.

[1] Um diesen Schluss (und einen in Lemma C.7) ausführen zu können, haben wir die Menge $X^\star$ um die Komponente $\{m \in \omega : \exists n {\in} X \cap \omega\, (m \leq n + 3)\}$ erweitert.

Literaturverzeichnis

[Blankertz 1994] B. Blankertz: *Eine Charakterisierung der beweisbar totalen Funktionen von KPM.* Diplomarbeit, Münster 1994.

[Blankertz et al. 199?] B. Blankertz, A. Weiermann: *A uniform approach for characterizing the provably total number-theoretic functions of KPM and (some of its) subsystems.* Erscheint in: Studia Logica.

[Blankertz et al. 1996] B. Blankertz, A. Weiermann: *How to characterize provably total functions by the Buchholz' operator method.* In: P. Hájek (Hrsg.), Lecture Notes in Logic 6 (Gödel '96), 205–213.

[Buchholz 1991a] W. Buchholz: *A simplified version of local predicativity.* In: Proof Theory. A Selection of Papers from the Leeds Proof Theory Meeting 1990, P. Aczel, H. Simmons, S.S. Wainer (Hrsg). Cambridge University Press (1992), 115–148.

[Buchholz 1991b] W. Buchholz: *A Note on the Ordinal Analysis of KPM.* In: J. Väänänen (ed.), Proceedings Logic Colloquium '90 (1991).

[Buchholz et al. 1994] W. Buchholz, A. Cichon, A. Weiermann: *A Uniform Approach to Fundamental Sequences and Hier-*

archies. In: Mathematical Logic Quarterly (1994) 40, 273–286.

[Glaß 1990] Th. Glaß: *Partielle Modelle von Theorien imprädikativer Mengelehre.* Diplomarbeit Münster (1990).

[Kreisel 1952] G. Kreisel: *On the interpretation of non-finitist proofs II.* In: The Journal of Symbolic Logic 17 (1952), 43–58.

[Pohlers 1989] W. Pohlers: *Proof Theory. An Introduction.* Springer LNM 1407 (1989).

[Pohlers 1992] W. Pohlers: *A short course in ordinal analysis.* In: Proof Theory. A Selection of Papers from the Leeds Proof Theory Meeting 1990, P. Aczel, H. Simmons, S.S. Wainer (Hrsg). Cambridge University Press (1992), 27–78.

[Pohlers 1996] W. Pohlers: *Pure Proof Theory. Aims Methods and Results.* In: The Bulletin of Symbolic Logic 2 (1996), 159–188.

[Pohlers 199?] W. Pohlers: *Subsystems of Set Theory and Second Order Number-Theory.* Erscheint in: Handbook of Mathematical Logic, S. Buss (Hrsg).

[Rathjen 1991] M. Rathjen: *Proof-theoretic analysis of KPM.* In: Archive for Mathematical Logic (1991) 30: 377–403.

[Rathjen 1992] M. Rathjen: *Eine Ordinalzahlanalyse der* Π_3*–Reflexion.* Habilitationsschrift, Münster, 1992.

[Rathjen 1994a] M. Rathjen: *Collapsing functions based on recursively large ordinals: A well-ordering proof for KPM.* In: Archive for Mathematical Logic 33 (1994), 35–55.

[Rathjen 1994b] M. Rathjen: *Proof theory of reflection.* In: Annals of Pure and Applied Logic (1994), 181–224.

[Schlüter 1997] A. Schlüter: *What is provable using first order reflection?* Erscheint in: Annals of Pure and Applied Logic.

[Wainer 1970] S.S. Wainer: *A classification of the ordinal recursive functions.* Archiv für Mathematische Logik 13 (1970), 136–153.

[Weiermann 1996] A. Weiermann: *How to characterize provably total functions by local predicativity.* Journal of Symbolic Logic 61 (1996), 52–69.

Index

Allinversion, 17, 63, 69, 129
Allregel, 61
Axiome
  Gleichheits-, 10
  Induktionsschema, 10
  Nachfolger-, 10
  von KPω, 50
  von KP+(Π_3–Ref), 51
  von KPM, 50
  von PA, 10

Beschränkungslemma
  für KPω, 132
  für KP+(Π_3–Ref), 89
  für KPM, 80
beweisbar rekursive Funktionen
  von KP+(Π_3–Ref), 117
  von KPω, 135
  von KPM, 116
  von PA, 26

Cantor-Normalform, 10

Einbettung
  der Aussagenlogik, 75
  der Sternkalküle, 72
  von (Δ_0–Koll), 131
  von (Π_3–Ref), 78
  von (Mahlo), 77
  von PA, 24
Existenzregel, 61

Formel
  Δ_0, Σ_k, Π_k, 46
  RS(ϑ), 46
  $\mathcal{L}_{\mathrm{Ad}}^{\vartheta}$, 46
  $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\vartheta)}$, 45
  Prim-, 45

Größenvergleich
  für F_γ, 20
  für $\mathrm{F}_\gamma^{\mathcal{K}}$, 41
  für F_γ^{M}, 41
  für F_η^{Ω}, 125
  für φ, 28
  für Φ, 40
  für ψ_κ, 32
  für ψ_M, 31
  für Ψ_π^ξ, 37
  für ϑ, 125
  für $\bar{\theta}$, 125
  für Ξ, 36
  mit $\lhd$, 43

Herleitungen
in RS($\mathcal{K}$), 68
in RS($\mathcal{K}$)*, 53
in RS(M), 61
in RS(M)*, 53
Operator kontrollierte, 17, 61, 68
von PA, 10
Hierarchie
konstruktible, 110
subrekursive, 20, 40, 125

Interpretationssatz
für KPω, 132
für KP+(Π_3–Ref), 78
für KPM, 77
Inversion, 17, 63, 69, 129

Kardinalzahl
Mahlo, 29
schwach kompakte, 34
Kleenes T–Prädikat, 12
kollabieren
stationäres, 92
Kollabierung, 19
η–, 111
Korrektheitssatz, 134

Mahlo Kardinalzahl, 29
Monotonielemma, 17, 62, 68
μ–Operator, 25
Multimengen, 48

Norm, 10, 28
eines RS(ϑ)–Satzes, 49
für T($\mathcal{K}$), 39
für T(M), 32
für T(Ω), 123
Normalform, 30, 35

ω–Regel, 12
Operator, 13, 57, 126
guter, 57
verfeinerter $\mathcal{H}^\eta$, 58
Ordinalzahlbezeichnungssystem
für KP+(Π_3–Ref), 34
für KPM, 29

Persistenz, 62, 69, 131
Produkt
gewöhnliches, 43
natürliches, 42

Quantor
beschränkter, 46

Rang
einer PA–Formel, 12
eines RS(ϑ)–Satzes, 48
Reduktion, 18, 22, 63, 69, 129

Schicht
eines RS(ϑ)–Terms, 46
Schnittelimination
imprädikative
für KPω, 133
in RS($\mathcal{K}$), 92, 99
in RS(M), 81

in PA_ω, 22
prädikative
für $\mathrm{KP}\omega$, 130
in $\mathrm{RS}(\mathcal{K})$, 70
in $\mathrm{RS}(M)$, 64
Sprache
$\mathcal{L}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{Ad}}$, 45
$\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\mathrm{Ad}}$, 45
$\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\mathcal{K})}$, 45
$\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(M)}$, 45
$\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\Omega)}$, 126
$\mathcal{L}_{\in}$, 45
von PA, 10
stark kritisch, 28

Terme
von $\mathrm{RS}(\vartheta)$, 46
Turingmaschine, 12

Vollständigkeit, 149

Symbolverzeichnis

$N\alpha$, 10
$\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$, 10
PA$\vdash \Gamma$, 10
rk(A), 11
F, 12
F$[n]$, 12
$\Delta(\mathbb{N})$, 15
$(\neg)C$, 15
$A \sim A'$, 21
ON, 25
LIM, 25
AP, 25
EPS, 25
SC, 25
$\alpha \oplus \beta$, 25
$\aleph.$, 25
Ω, 25
SC(γ), SC$_\kappa(\gamma)$, 25
REG, 26
α^Γ, 26
Ω_σ, 26
ω^α, 26
$2_n(x)$, 26
M, 27
REG$^{\leq M}$, 27
$\psi_\kappa\alpha$, 27
C(α, β), 27
C$_\kappa(\alpha)$, 27
T(M), 27
$N_M\alpha$, 30
α^+, 30
$\mathcal{K}$, 32
REG$^{<\mathcal{K}}$, 32
$\Xi(\alpha)$, 32
$\Psi_\pi^\xi(\alpha)$, 32
C(α, β), 32
M$^\alpha$, 32
C$_\mathcal{K}(\alpha)$, C$_\pi^\xi(\alpha)$, 32
T$(\mathcal{K})$, 33
$N_\mathcal{K}\alpha$, 37
$\Phi(x)$, 38
$\lhd_x^1$, $\lhd^1$, $\lhd$, 38
F$_\gamma^N(x)$, 38
$TC(R)$, 38
$\alpha \otimes \beta$, 40
$3 \cdot \alpha$, 41
$\omega \cdot \alpha$, 41
$\mathcal{L}_\in$, 43
$\mathcal{L}_{\mathrm{Ad}}^{\mathrm{M}}$, 43
$\mathcal{L}_{\mathrm{Ad}}^{\mathcal{K}}$, 43
$\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\vartheta)}$, 43
A^u, 44

$\mathrm{lh}(A)$, 44
$\mathrm{nt}(A)$, 44
$A \to B$, 44
$A \leftrightarrow B$, 44
$\forall x{\in}v\, A(x)$, 44
$\exists x{\in}v\, A(x)$, 44
$u \subseteq v$, 44
$u = v$, 44
$u \neq v$, 44
$u \notin v$, 44
$[u \neq v]$, 44
$\mathrm{trans}(u)$, 44
$\lim(u)$, 44
$\mathrm{infinite}(u)$, 44
$\mathcal{T}^{\vartheta}$, $\mathcal{T}^{\vartheta}_{\alpha}$, 44
$\varnothing$, 44
stg, 45
$\vec{\mathrm{lh}}(\Gamma)$, 45
$\mathrm{stglh}(\Gamma)$, 45
$a \mathrel{\mathring{\in}} b$, 45
$\bigwedge(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$, 46
$\bigvee(A_\iota)_{\iota\in\mathrm{J}}$, 46
$\Delta_0(\alpha)$, $\Sigma_k(\alpha)$, $\Pi_k(\alpha)$, 46
$\Sigma_{\leq k}(\alpha)$, $\Pi_{\leq k}(\alpha)$, 46
A^{β}, $A^{(\beta,\alpha)}$, 46
$\mathrm{rk}(A)$, 46
$\|\Lambda\|$, 47
$\mathrm{no}(A)$, $\mathrm{No}(\Lambda)$, 47
KPω, 48
(Ext), (Fund), (Paar), 48
(Verein), (Unendl), 48
(Δ_0–Sep), (Δ_0–Koll), 48
KPM, 48
(Ad1), (Ad2), (Ad3), 48
(Mahlo), 48
(Π_3–Ref), 49
$X^{\star}$, 49
$\mathrm{RS}(M)^{\star}$, $\mathrm{RS}(\mathcal{K})^{\star}$, 50
$(\bigwedge)^{\star}$, $(\bigvee)^{\star}$, 50
$(\mathrm{Fund})^{\star}$, $(\mathrm{Ad})^{\star}$, $(\mathrm{Ref})^{\star}$, 50
$\models^{\star} \Lambda$, 50
$\mathcal{H}$, 53
$\vee X$, 53
$\vee\Theta$, 54
$\mathcal{H}[\Theta]$, 54
$\mathcal{H}^{\eta}$, 54
$\lhd_{\iota}$, 54
in $\mathcal{H}$, 54
$\mathcal{H}\vert\!\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma$, 57
$(\bigvee)$, $(\bigwedge)$, 57
(cut), (ref_{κ}), (mah), 57
$(\wedge)$, $(\vee)$, 57
(Ad), ($\neg$Ad), 57
$(\forall)$, $(\exists)$, 57
$\mathcal{H}\vert\!\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma$, 64
$(\bigvee)$, $(\bigwedge)$, 64
(cut), (ref^{ξ}_{π}), ($\mathrm{ref}_{\mathcal{K}}$), 64
$\mathcal{H}_{\gamma}$, 75
$\mathcal{H}^{\eta}_{\gamma}$, 75
Card^{M}, 76
$\bar{\mu}$, 76
$\mathcal{A}(\Theta;\gamma,\kappa,\mu)$, 76

$\mathcal{H}_\gamma$, 84
$\mathcal{H}_\gamma^\eta$, 85
$\mathrm{Card}^{\mathcal{K}}$, 85
$\bar{\mu}$, 85
$\mathcal{A}(\Theta;\gamma,\pi,\xi,\mu)$, 85
$\mathcal{B}(\Theta;\gamma)$, 86
$\mathbb{L}$, 106
$o(t)$, 106
Lomega, 109
KPi, 114
KPl, 114
(Lim), 114
$\vartheta\alpha$, 116
$\mathrm{C}(\alpha,\beta)$, 116
$\bar{\theta}\alpha\beta$, 116
$\mathrm{T}(\Omega)$, 116
$N_\Omega(\alpha)$, 116
α^*, 116
$\mathrm{F}_\eta^\Omega(x)$, 118
$\mathcal{L}_{\mathrm{Ad}}^\Omega$, 118
$\mathcal{L}_{\mathrm{RS}(\Omega)}$, 118
$\mathrm{RS}(\Omega)^\star$, 118
$\check{X}$, 119
$\mathcal{H}_\eta$, 119
$\check{\Theta}$, 119
$\mathrm{J}\restriction\alpha$, 122
$\mathcal{H}|\frac{\alpha}{\rho}\ \Gamma$, 122
$(\bigvee)$, $(\bigwedge)$, 122
(cut), (ref_Ω), 122
fsep, 140
Lomega, 141

Lebenslauf

Name:	Blankertz
Vorname:	Benjamin
geboren:	13.1.1969 in Berlin als Sohn von Herwig Paul Hermann und Gisela Elsbeth Hildegard Blankertz, geb. Färber
Familienstand:	ledig
Schulbildung:	1975–79 Wartburg Grundschule in Münster 1979–88 Schillergymnasium in Münster 11.6.1988 allgemeine Hochschulreife am Schillergymnasium in Münster
Studium:	Diplomstudiengang Mathematik mit Nebenfach Logik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom Oktober 1988 bis Septermber 1994
Prüfungen:	Diplom im Fach Mathematik am 22.9.1994 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
Tätigkeiten:	1.8.–10.10.1988 EDV-Praktikum bei der Firma Micro Service in Köln im WS 93/94 studentische Hilfskraft und seit 4.10.94 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung in Münster
Dissertation:	seit Oktober 1994 am Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung in Münster unter Betreuung von Prof. Dr. Pohlers